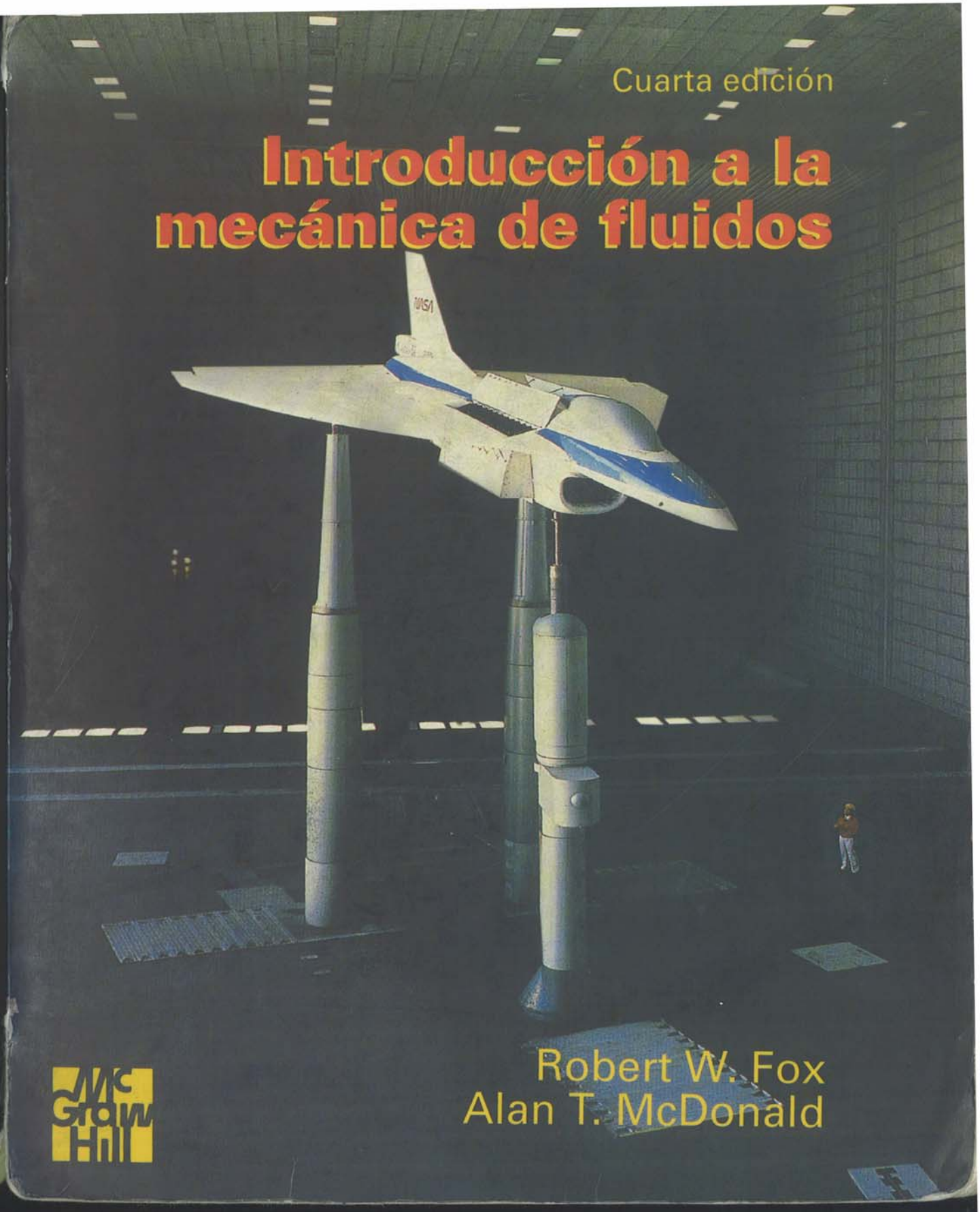
Cuarta edición

Introducción a la mecánica de fluidos



Robert W. Fox
Alan T. McDonald

Mc Graw Hill

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

LIBRO DE CORTESIA
MOSTRADOR
MEXICO

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Segunda edición
(Cuarta edición en inglés)

ROBERT W. FOX
ALAN T. McDONALD
School of Mechanical Engineering
Purdue University

Traducción
Físico Gabriel Nagore Cázares
Investigador del Instituto de
Investigaciones Eléctricas,
México.

Revisión Técnica
M. en C. Raymundo López Callejas
Jefe del Área de Termofluidos,
Departamento de Energía,
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco.

LIBRO DE CORTESIA
MOSTRADOR

McGRAW-HILL
MEXICO

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAN • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

Portada: *Un gran túnel de viento y un modelo*

La foto de la portada muestra un "modelo" a escala natural de un avión supersónico de despegue vertical y corto aterrizaje.

El modelo está montado a 40 pies sobre el piso del túnel de viento más grande del mundo —la nueva sección de prueba de 80 × 120 pies— en el Ames Research Center de la NASA. (El hombre sobre el piso del túnel muestra la escala.)

Este avión utiliza el concepto de eyector, en el cual el aire relativamente frío de un ventilador se dirige hacia el sistema eyector —rejillas de ventilación de entrada visibles a lo largo del fuselaje del avión— para producir la sustentación. Esto crea un campo de flujo relativamente frío sobre el suelo debajo del vehículo. El aire restante se deja escapar por la tobera posterior para proporcionar el empuje para el vuelo hacia adelante.

Un objetivo de prueba clave era medir el aumento del empuje del sistema eyector. Las pruebas a escala natural permiten la duplicación del número de Reynolds, el cual es importante en el giro de la transición a vuelo plano que sigue al despegue vertical. Las pruebas a gran escala también brindan datos más confiables de la planta de potencia y del funcionamiento del eyector que las pruebas a pequeña escala. La sección de prueba sumamente larga minimiza efectos extraños en los datos de la fuerza vertical.

(Reproducido con el permiso de
Aviation Week & Space Technology)

Gerente de producto: Alfonso García Bada
Supervisor de edición: Mateo Miguel García
Supervisor de producción: Zeferino García García

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1995, respecto a la segunda edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MÉXICO, S. A. de C. V.
Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto,
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890.

ISBN 970-10-0669-0
(ISBN 968-451-737-8 primera edición)

Traducido de la cuarta edición en inglés de
INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS
Copyright © MCMXCII, John Wiley & Sons, Inc.

ISBN 0-471-54852-9

4567890123 PE-95 9086543217

Impreso en México Printed in Mexico

Esta Obra se terminó de
imprimir en Octubre de 1997 en
Programas Educativos, S.A. de C.V.
Calz. Chabacano No. 65-A Col. Asturias
Delegación Cuauhtémoc
C.P. 06850 México, D.F.
Empresa Certificada por el
Instituto Mexicano de Normalización
y Certificación A.C. bajo la Norma
ISO-9002: 1994/NMX-CC-004: 1995
con el Núm. de Registro RSC-048

Se tiraron 1400 ejemplares

Prefacio

Este texto fue escrito para un curso introductorio de mecánica de fluidos. Nuestro acercamiento al tema no ha cambiado en la cuarta edición. Los conceptos físicos de la mecánica de fluidos y los métodos de análisis, iniciando desde los principios básicos, se destacan a lo largo de toda la obra. El objetivo fundamental de este libro es ayudar a los estudiantes a desarrollar un acercamiento metódico para la solución de problemas. Por ello, iniciamos a partir de las ecuaciones básicas, establecemos claramente las suposiciones y relacionamos los resultados con el comportamiento físico esperado. El acercamiento queda ilustrado a través de los 123 problemas ejemplo en el texto. Las soluciones a estos ejemplos se han preparado para mostrar técnicas adecuadas de solución y explicar algunos puntos problemáticos de la teoría. Los problemas ejemplo son un conjunto independiente del formato del texto, por lo que son, en particular, fáciles de seguir.

En la cuarta edición, se emplea, una vez, más el sistema internacional de unidades (SI) en aproximadamente 70% de los problemas ejemplo y de los problemas al final de cada capítulo. Las unidades inglesas de ingeniería son utilizadas en el resto de los problemas para familiarizar a los estudiantes con este sistema tradicional y realzar los métodos de conversión entre sistemas de unidades.

Las explicaciones completas en el texto, junto con los numerosos ejemplos detallados, hacen que esta obra sea comprensible para los estudiantes. Esto brinda libertad al instructor para desviarse de los métodos de enseñanza convencionales. El tiempo de clase puede emplearse para presentar material externo, ampliar temas especiales de interés (tales como flujo no newtoniano, flujo de capa límite, sustentación y arrastre o métodos de medición), resolver problemas de ejemplo o explicar puntos de dificultad de las tareas asignadas. De este modo, cada periodo de clase puede ser utilizado de manera más apropiada para satisfacer las necesidades del estudiante.

El material en este libro ha sido seleccionado cuidadosamente. Se presenta con detalle una amplia gama de temas convenientes para un curso de uno o dos semestres en mecánica de fluidos a nivel de estudiantes principiantes o avanzados. Los cursos introductorios en dinámica de cuerpo rígido y cálculo integral son prerrequisitos necesarios. Algunos fundamentos de termodinámica son deseables para el estudio de flujo compresible unidimensional.

La presentación está organizada en una amplia gama de áreas temáticas:

- Conceptos introductorios, propósito de la mecánica de fluidos y estática de fluidos (capítulos 1, 2 y 3).
- Desarrollo y aplicación de formas de ecuaciones básicas para el volumen de control (capítulo 4).
- Desarrollo y aplicación de formas diferenciales de ecuaciones básicas (capítulos 5 y 6).
- Análisis dimensional y correlación de datos experimentales (capítulo 7).
- Aplicaciones para flujo incompresible (flujos internos en el capítulo 8 y flujos externos en el capítulo 9).

- Análisis y aplicaciones de flujo en canales abiertos (capítulo 10).
- Análisis y aplicaciones de maquinaria hidráulica (capítulo 11).
- Análisis y aplicaciones de flujo compresible unidimensional (capítulos 12 y 13).

Un *resumen de objetivos*, listado al final de cada capítulo, indica los conceptos específicos que deben ser comprendidos y las tareas que los estudiantes deben ser capaces de realizar, después de haber estudiado el material.

Las principales adiciones en la cuarta edición incluyen un nuevo capítulo (capítulo 11) acerca de maquinaria hidráulica, una nueva sección sobre el flujo en canal supersónico y un gran número de nuevos problemas para resolver en casa. Un *Suplemento de software* se está desarrollando de manera independiente para ser utilizado con el texto.

El nuevo capítulo sobre maquinaria hidráulica destaca la maquinaria actual y sus aplicaciones. En un apéndice separado, se han incluido curvas de bombas para permitir el tratamiento de una variedad de aplicaciones realistas en sistemas de fluidos. La nueva sección sobre flujo supersónico en un canal con ondas de choque, permite una discusión completa de los flujos en túnel de viento supersónico. Con la inclusión de 440 nuevos problemas al final de los capítulos, la cuarta edición contiene ahora 1500 problemas para la asignación de tareas y ejercicios para los estudiantes, de manera que aproximadamente ocho semestres puedan ser cubiertos sin necesidad de repetir los problemas asignados. Algunos de los problemas que se encuentran al final de cada capítulo, pueden resolverse de mejor manera si se escriben programas sencillos de calculadora o de computadora (éstos son identificados mediante un doble símbolo de obelisco). Los programas de computadora seleccionados están contenidos en el *Suplemento de software*.

Además de los principales cambios, se han efectuado modificaciones en los subtítulos y mejoras a lo largo del texto. Esto ha favorecido a la pedagogía al brindar datos más actuales para situaciones reales, un mayor número de aplicaciones, problemas de diseño y aplicaciones de computadora.

El *Manual de soluciones* para la cuarta edición continúa la tradición establecida en este texto. Puede adquirirse junto con el libro y contiene una solución completa, detallada y amplia para cada uno de los 1500 problemas asignados para trabajar en casa. Cada solución ha sido elaborada empleando el formato de los problemas de ejemplo. Las soluciones pueden ser fotocopiadas para trabajar en clase o en la biblioteca, eliminando el trabajo que implica la solución de problemas para el instructor que utilice este libro.

La nueva *Guía para el instructor* en el *Manual de soluciones* brinda un índice de dificultad para cada problema además de referirlo a la sección del texto correspondiente. Esto facilita la asignación del trabajo al nivel de dificultad deseado para cada sección del libro.

Cada semestre, hemos estado empleando *problemas de diseño* abiertos en lugar de los experimentos de laboratorio tradicionales. Estos problemas proporcionan al estudiante una mayor cantidad de tiempo para explorar las aplicaciones de los principios de la mecánica de fluidos en el diseño de dispositivos y sistemas. Los problemas de diseño seleccionados se han dispuesto en la *Guía para el instructor*, junto con sugerencias para su uso.

El *Suplemento de software* está diseñado para permitir a los estudiantes jugar con enunciados del tipo *¿Qué pasa si. . .?* Los parámetros son fácilmente variables. De esta manera, es posible identificar rápidamente los efectos de los mismos sobre el comportamiento del sistema. El *Suplemento* incluye software para el análisis de propiedades de fluidos, atmósfera estándar, volúmenes de control acelerados, pérdidas de carga de flujo en tuberías, profundidad de superficie en flujo en canal abierto y flujo compresible unidimensional. Para cada caso de flujo compresible,

puede graficarse el diagrama de temperatura-entropía, si se desea. También se presentan sugerencias para el uso del software en la *Guía para el instructor*.

Se encuentran disponibles excelentes videos y películas de instrucción para aclarar y mostrar de manera más amplia los principios básicos de la mecánica de fluidos. Nos referiremos a ellos en el texto cuando su empleo resulte conveniente; una lista completa de proveedores y títulos queda incluida en el Apéndice C.

Cuando los estudiantes hayan terminado este curso, esperamos sean capaces de aplicar las ecuaciones básicas en diversos problemas, incluidos aquellos que no se hayan presentado previamente. Destacamos la comprensión física a lo largo del libro para que los estudiantes tengan conciencia de la variedad de fenómenos que ocurren en situaciones reales de flujo de fluidos. Al minimizar el número de "fórmulas mágicas" y destacar el enfoque fundamental, creemos que los estudiantes adquirirán confianza en su capacidad para aplicar el material y serán capaces de razonar las soluciones a problemas que impliquen un reto.

El libro es también muy apropiado para el estudio independiente de estudiantes o de ingenieros que se enfrentan a problemas prácticos. Sus ejemplos claros y fáciles de leer ayudan a consolidar la confianza del estudiante. El resumen de objetivos al final de cada capítulo puede utilizarse para revisar o evaluar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje.

Reconocemos que ningún enfoque puede satisfacer todas las necesidades. Agradecemos a muchos estudiantes y cuerpos docentes, cuyos comentarios ayudaron a mejorar la cuarta edición. Especialmente damos las gracias a los revisores de la misma, quienes son: Seppo Korpela de la Universidad del Estado de Ohio, Darryl Alofs de la Universidad de Missouri-Rolla, Jim Liburdy de la Universidad de Clemson, Stanley Berger de la Universidad de California-Berkeley, Willem Brutsaert de la Universidad de Maine, Charles Merkle de la Universidad Estatal de Pennsylvania, Frank Champagne de la Universidad de Arizona, Chris Rogers de la Universidad de Tufts, Eugene Kordyban de la Universidad de Detroit, Ed Shaughnessy de la Universidad de Duke y Edgar O'Rear de la Universidad de Oklahoma. En particular, los profesores Merkle y O'Rear brindaron revisiones detalladas y comentarios valiosos.

Agradecemos también a nuestras esposas, Beryl y Tania, quienes detrás de la escena soportaron las largas horas de preparación requeridas en este esfuerzo. Como siempre, gustosamente damos la bienvenida a críticas y sugerencias de los lectores o usuarios interesados en este libro.

Robert W. Fox
Alan T. McDonald

CAP

CAI

CA

Contenido

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN 1

1-1 Nota a los estudiantes 1
1-2 Definición de un fluido 3
1-3 Objetivo de la mecánica de fluidos 4
1-4 Ecuaciones básicas 5
1-5 Métodos de análisis 6
1-5.1 Sistema y volumen de control 6
1-5.2 Enfoque diferencial contra enfoque integral 7
1-5.3 Métodos de descripción 8
1-6 Dimensiones y unidades 10
1-6.1 Sistemas de dimensiones 10
1-6.2 Sistemas de unidades 11
1-6.3 Sistema de unidades preferido 12
1-7 Resumen de objetivos 13
Problemas 13

CAPÍTULO 2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES 19

2-1 Fluido como un medio continuo 19
2-2 Campo de velocidades 21
2-2.1 Flujos unidimensional, bidimensional y tridimensional 22
2-2.2 Líneas en el tiempo, líneas de trayectoria, líneas de traza y líneas de corriente 23
2-3 Campo de esfuerzos 26
2-4 Viscosidad 29
2-4.1 Fluido newtoniano 30
2-4.2 Fluidos no newtonianos 33
2-5 Descripción y clasificación de los movimientos de fluidos 34
2-5.1 Flujos viscosos y no viscosos 34
2-5.2 Flujos laminar y turbulento 39
2-5.3 Flujos compresible e incompresible 41
2-5.4 Flujos internos y externos 41
2-6 Resumen de objetivos 42
Problemas 43

CAPÍTULO 3 ESTÁTICA DE FLUIDOS 56

3-1 La ecuación básica de la estática de fluidos 56
3-2 Variaciones de presión en un fluido estático 60

3-3 La atmósfera estándar 66
3-4 Sistemas hidráulicos 69
3-5 Fuerza hidrostática sobre superficies sumergidas 69
3-5.1 Fuerza hidrostática sobre una superficie plana sumergida 69
3-5.2 Fuerza hidrostática sobre una superficie curva sumergida 77
3-6 Flotación y estabilidad 81
3-7 Fluidos en el movimiento de cuerpo rígido 83
3-8 Resumen de objetivos 88
Problemas 89

CAPÍTULO 4 ECUACIONES BÁSICAS EN FORMA INTEGRAL PARA UN VOLUMEN DE CONTROL 107

4-1 Leyes básicas para un sistema 107
4-1.1 Conservación de la masa 107
4-1.2 Segunda ley de Newton 108
4-1.3 El principio del momento angular 108
4-1.4 La primera ley de la termodinámica 108
4-1.5 La segunda ley de la termodinámica 109
4-2 Relación de las derivadas del sistema con la formulación del volumen de control 109
4-2.1 Derivación 110
4-2.2 Interpretación física 115
4-3 Conservación de la masa 116
4-3.1 Casos especiales 117
4-4 Ecuación de momento para el volumen de control inercial 124
4-4.1 Análisis del volumen de control diferencial 136
4-4.2 Volumen de control moviéndose con velocidad constante 141
4-5 Ecuación del momento para el volumen de control con aceleración rectilínea 144
4-6 Ecuación del momento para el volumen de control con aceleración arbitraria 152
4-7 El principio del momento angular 158
4-7.1 Ecuación para el volumen de control fijo 158
4.7.2 Ecuación para el volumen de control rotatorio 163
4-8 La primera ley de la termodinámica 168
4-8.1 Relación de trabajo efectuado por un volumen de control 169
4-8.2 Ecuación del volumen de control 171
4-9 La segunda ley de la termodinámica 175
4-10 Resumen de objetivos 177
Problemas 177

CAPÍTULO 5 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO 216

5-1 Conservación de la masa 216
5-1.1 Sistema de coordenadas rectangulares 216
5-1.2 Sistema de coordenadas cilíndricas 222
5-2 Función de corriente para un flujo bidimensional incompresible 225
5-3 Movimiento de un elemento de fluido (cinemática) 229
5-3.1 Aceleración de una partícula de fluido en un campo de velocidad 231
5-3.2 Rotación de un fluido 236
5-3.3 Deformación de fluido 240
5-4 Ecuación del momento 244
5-4.1 Fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido 245

5-4.2 Ecuación diferencial del momento 246
5-4.3 Fluido newtoniano: ecuaciones de Navier-Stokes 246
5-5 Resumen de objetivos 248
Referencias 248
Problemas 249

CAPÍTULO 6 FLUJO INCOMPRESIBLE NO VISCOSO 258
6-1 Ecuaciones de momento para flujos sin fricción: ecuaciones de Euler 258
6-2 Ecuaciones de Euler en coordenadas de línea de corriente 259
6-3 Ecuación de Bernoulli. Integración de la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente para flujo estacionario 263
6-3.1 Derivación empleando coordenadas de línea de corriente 263
6-3.2 Derivación empleando coordenadas rectangulares 264
6-3.3 Presiones estática, de estancamiento y dinámica 266
6-3.4 Aplicaciones 270
6-3.5 Precauciones en el uso de la ecuación de Bernoulli 276
6-4 Relación entre la primera ley de la termodinámica y la ecuación de Bernoulli 277
6-5 Ecuación de Bernoulli inestable. Integración de la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente 284
6-6 Flujo irrotacional 287
6-6.1 Ecuación de Bernoulli aplicada al flujo irrotacional 287
6-6.2 Potencial de velocidad 288
6-6.3 Función de corriente y potencial de velocidad para flujo bidimensional, incompresible e irrotacional; ecuación de Laplace 290
6-6.4 Flujos planos elementales 292
6-6.5 Superposición de flujos planos elementales 296
6-7 Resumen de objetivos 302
Referencias 302
Problemas 303

CAPÍTULO 7 ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SIMILITUD 317
7-1 Naturaleza del análisis dimensional 317
7-2 Teorema Pi de Buckingham 318
7-3 Determinación de los grupos Π 319
7-4 Grupos adimensionales de importancia en mecánica de fluidos 325
7-5 Similitud de flujo y estudio de modelos 327
7-5.1 Similitud incompleta 330
7-5.2 Escalamiento con parámetros dependientes múltiples 337
7-5.3 Comentarios acerca de la prueba de modelos 340
7-6 Adimensionalización de las ecuaciones diferenciales básicas 341
7-7 Resumen de objetivos 344
Referencias 344
Problemas 345

CAPÍTULO 8 FLUJO INTERNO INCOMPRESIBLE VISCOSO 355
8-1 Introducción 355

PARTE A. FLUJO LAMINAR COMPLETAMENTE DESARROLLADO 357
8-2 Flujo laminar completamente desarrollado entre placas paralelas infinitas 357

8-2.1 Ambas placas estacionarias 357
8-2.2 La placa superior moviéndose con velocidad constante, U 364
8-3 Flujo laminar completamente desarrollado en una tubería 371

PARTE B. FLUJO EN TUBERÍAS Y DUCTOS 376
8-4 Distribución de esfuerzos de corte en un flujo completamente desarrollado en una tubería 376
8-5 Perfiles de velocidad turbulentos en un flujo completamente desarrollado en una tubería 379
8-6 Consideraciones de energía de flujo en tubería 381
8-6.1 Coeficiente de energía cinética 383
8-6.2 Pérdida de carga 383
8-7 Cálculo de la pérdida de carga 384
8-7.1 Pérdidas mayores: factor de fricción 384
8-7.2 Pérdidas menores 391
8-7.3 Ductos no circulares 396
8-8 Solución de problemas de flujo en tubería 397
8-8.1 Sistemas de una sola trayectoria 397
8-8.2 Sistemas de trayectorias múltiples 412

PARTE C. MEDICIÓN DE FLUJO 417
8-9 Métodos directos 417
8-10 Restricción de los medidores de flujo para flujos internos 418
8-10.1 La placa de orificio 421
8-10.2 La tobera de flujo 423
8-10.3 El venturi 424
8-10.4 El elemento de flujo laminar 425
8-11 Medidores de flujo lineales 429
8-12 Métodos transversales 430
8-13 Resumen de objetivos 431
Referencias 432
Problemas 433

CAPÍTULO 9 FLUJO EXTERNO INCOMPRESIBLE VISCOSO 453

PARTE A. CAPAS LÍMITE 454
9-1 Concepto de la capa límite 454
9-2 Espesor de la capa límite 456
9-3 Capa límite laminar de placa plana: solución exacta 459
9-4 Ecuación integral de momento 464
9-5 Empleo de la ecuación integral del momento para el flujo de gradiente de presión cero 470
9-5.1 Flujo laminar 471
9-5.2 Flujo turbulento 476
9-6 Gradientes de presión en flujo de capa límite 479

PARTE B. FLUJO DE FLUIDO ALREDEDOR DE CUERPOS SUMERGIDOS 482
9-7 Arrastre 483
9-7.1 Flujo sobre una placa plana paralela al flujo: arrastre de fricción 484
9-7.2 Flujo sobre una placa plana normal al flujo: arrastre de presión 487
9-7.3 Flujo sobre una esfera y un cilindro: arrastre de fricción y de presión 489
9-7.4 Perfil aerodinámico 495
9-8 Sustentación 498
9-9 Resumen de objetivos 516
Referencias 516
Problemas 518

CAPÍTULO 10 FLUJO EN CANALES ABIERTOS 539

10-1 Características de los canales abiertos 540
10-2 Propagación de ondas superficiales 542
10-2.1 Velocidad de onda 543
10-2.2 El número de Froude 545
10-3 Ecuación de la energía para flujo en canal abierto 546
10-3.1 Energía específica 548
10-4 Flujo sin fricción: efecto del cambio de área 551
10-4.1 Flujo sobre una protuberancia 551
10-4.2 Flujo a través de una compuerta de esclusa 554
10-5 Flujo a profundidad normal: flujo uniforme 558
10-5.1 Ecuaciones básicas 558
10-5.2 La correlación de Manning para la velocidad 560
10-5.3 Sección transversal óptima del canal 566
10-5.4 Flujo normal crítico 568
10-6 Flujo con profundidad que varía gradualmente 571
10-6.1 Clasificación de perfiles superficiales 572
10-6.2 Cálculo de perfiles superficiales 576
10-7 El salto hidráulico 580
10-7.1 Ecuaciones básicas 580
10-7.2 Aumento de la profundidad a través de un salto hidráulico 582
10-7.3 Pérdida de carga a través de un salto hidráulico 583
10-8 Mediciones de flujo en canal abierto 586
10-8.1 Vertedores de cresta vertiente afilada 586
10-8.2 Vertedores de cresta vertiente amplia 590
10-8.3 Compuertas de esclusa 591
10-8.4 Canales críticos 592
10-9 Resumen de objetivos 593
Referencias 593
Problemas 594

CAPÍTULO 11 MAQUINARIA HIDRÁULICA 601

11-1 Introducción y clasificación de maquinaria hidráulica 601
11-2 Alcance del material del capítulo 605
11-3 Análisis de turbomaquinaria 605
11-3.1 El principio del momento angular 605
11-3.2 La ecuación de Euler para turbomáquinas 606
11-3.3 Análisis del polígono de velocidad 608
11-4 Características de funcionamiento 616
11-4.1 Parámetros de funcionamiento 616
11-4.2 Análisis dimensional y velocidad específica 627
11-4.3 Reglas de similitud 632
11-4.4 Cavitación y carga neta de succión positiva 636
11-5 Aplicación en sistemas de flujos 638
11-5.1 Máquinas que absorben trabajo 638
11-5.2 Máquinas que producen trabajo 671
11-6 Resumen de objetivos 681
Referencias 682
Problemas 684

CAPÍTULO 12 INTRODUCCIÓN AL FLUJO COMPRESIBLE 700

12-1 Repaso de termodinámica 700
12-2 Propagación de ondas sonoras 708
12-2.1 Velocidad del sonido 708
12-2.2 Tipos de flujo. El cono de Mach 712
12-3 Estado de referencia: propiedades locales de estancamiento isentrópico 714
12-3.1 Propiedades locales de estancamiento isentrópico local para el flujo de un gas ideal 715
12-4 Condiciones críticas 723
12-5 Resumen de objetivos 724
Referencias 724
Problemas 725

CAPÍTULO 13 FLUJO COMPRESIBLE, UNIDIMENSIONAL Y ESTABLE 732

13-1 Ecuaciones básicas para el flujo isentrópico 732
13-2 Efecto de la variación del área sobre las propiedades en flujo isentrópico 736
13-3 Flujo isentrópico de un gas ideal 739
13-3.1 Ecuaciones básicas 739
13-3.2 Condiciones de referencia para el flujo isentrópico de un gas ideal 740
13-3.3 Tablas para el cálculo del flujo isentrópico de un gas ideal 743
13-3.4 Flujo isentrópico en una tobera convergente 745
13-3.5 Flujo isentrópico en una tobera convergente-divergente 751
13-4 Flujo en un ducto de área constante con fricción 758
13-4.1 Ecuaciones básicas para flujo adiabático 758
13-4.2 Flujo adiabático: la línea de Fanno 761
13-4.3 Tablas para el cálculo del flujo de la línea de Fanno de un gas ideal 766
13-4.4 Flujo isotérmico 775
13-5 Flujo sin fricción en un ducto de área constante con intercambio de calor 777
13-5.1 Ecuaciones básicas 777
13-5.2 La línea de Rayleigh 780
13-5.3 Tablas para el cálculo del flujo de la línea de Rayleigh de un gas ideal 786
13-6 Ondas de choque normales 790
13-6.1 Ecuaciones básicas 791
13-6.2 Tablas para el cálculo de ondas de choque normales en un gas ideal 799
13-7 Flujo supersónico en un canal con ondas de choque 804
13-7.1 Flujo en una tobera convergente-divergente 805
13-7.2 Difusor supersónico 807
13-7.3 Operación de túnel de viento supersónico 808
13-7.4 Canal de área constante con fricción 809
13-7.5 Canal de área constante con adición de calor 810
13-8 Resumen de objetivos 813
Referencias 814
Problemas 814

Apéndice A DATOS DE PROPIEDADES DE FLUIDOS 837

Apéndice B ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS 849

Apéndice C CINTAS DE VIDEO Y PELÍCULAS DE MECÁNICA DE FLUIDOS 851

Apéndice D SELECCIÓN DE CURVAS DE FUNCIONAMIENTO PARA BOMBAS Y VENTILADORES 854

Apéndice E TABLAS PARA EL CÁLCULO DE FLUJO COMPRESIBLE 866

Apéndice F ANÁLISIS DE LA INCERTIDUMBRE EXPERIMENTAL 882

Apéndice G UNIDADES, PREFIJOS Y FACTORES DE CONVERSIÓN DEL SI 890

Respuestas a problemas seleccionados **892**

Índice **907**

Capítulo 1

Introducción

La meta de este libro de texto es brindar una introducción clara y concisa al tema de la mecánica de fluidos. Al empezar el estudio de cualquier materia, varias preguntas pueden venir a la mente. Los estudiantes del primer curso de mecánica de fluidos podrían preguntarse:

¿Qué es todo lo que encierra la mecánica de fluidos?
¿Por qué tengo que estudiarla?
¿Por qué debo querer estudiarla?
¿Cómo se relacionan las áreas temáticas con lo que ya estoy familiarizado?

En este capítulo trataremos de presentar al menos las respuestas cualitativas a éstas y otras preguntas similares. Esto debe servir para establecer una base y una perspectiva para nuestro estudio de mecánica de fluidos. Antes de proceder con la definición de un fluido, nos detendremos por un momento con algunos comentarios de interés para los estudiantes.

1-1 NOTA A LOS ESTUDIANTES

Al escribir este libro hemos tenido muy en cuenta al estudiante. Consideramos que el tiempo en clase no debe ser dedicado a una repetición del material contenido en el libro de texto. En lugar de eso, el tiempo debe utilizarse para ampliar el material del libro a través de la discusión sobre temas relacionados y la aplicación de los principios básicos en la solución de problemas. Las condiciones necesarias para cumplir esta meta son dos. La primera es una presentación clara y concisa de los fundamentos que usted, estudiante, sea capaz de leer y entender, y la segunda, su gusto por leer el material del texto antes de asistir a clase. Nosotros hemos asumido la responsabilidad para cumplir la primera condición, le toca a usted comprometerse para satisfacer la segunda. Es probable que en ocasiones no hayamos sido capaces de satisfacer por completo estos objetivos. En ese caso, apreciaríamos escuchar comentarios acerca de estas fallas, ya sea directamente o a través de su instructor.

Vale la pena señalar que un texto introductorio no puede abarcar todos los temas. Su instructor sin duda ampliará el material presentado, sugerirá enfoques alternativos a los temas y presentará nuevo material adicional. Lo invitamos a que consulte otros libros de texto y referencias de mecánica de fluidos disponibles en las bibliotecas. En caso de que algún otro texto presente una

buena discusión sobre un tema determinado, nos referiremos a él directamente. También lo invitamos a que aprenda de sus compañeros y del(os) asesor(es) asignado(s) al curso, así como, obviamente, de su instructor. Suponemos que usted ha tenido una introducción a la termodinámica, ya sea en un curso básico de física o en un curso introductorio de termodinámica, además de cursos previos en estática, dinámica y cálculo diferencial e integral. No se intentará repasar este material, sin embargo, los aspectos pertinentes de estos estudios previos se revisarán brevemente cuando resulte apropiado.

1-2 DI

Estamos totalmente convencidos de que se aprende mejor *durante la práctica*. Esto es cierto para cualquier tema de estudio, ya sea mecánica de fluidos, termodinámica o golf. Los fundamentos en cualquiera de estos casos son pocos, y el dominio viene por medio de la práctica. *En consecuencia, es en extremo importante, de hecho esencial, que usted resuelva los problemas.* Los numerosos problemas incluidos al final de cada capítulo, brindan la oportunidad de ganar habilidad en la aplicación de los fundamentos para la solución de los problemas. Usted debe evitar la tentación de adoptar un enfoque mecánico al resolver los problemas. De cualquier modo, las características de la mayor parte de ellos son tales, que dicho enfoque simplemente no funcionaría. Al resolver problemas recomendamos ampliamente que proceda siguiendo esta secuencia lógica:

1. Enuncie breve y concisamente (en sus propias palabras) la información proporcionada.
2. Enuncie la información que debe ser determinada.
3. Dibuje un esquema del sistema o volumen de control que será utilizado en el análisis. Asegúrese de marcar los límites del sistema o volumen de control y de indicar las direcciones apropiadas de las coordenadas.
4. Proporcione la formulación matemática conveniente de las leyes *básicas* que considere necesarias para resolver el problema.
5. Liste las suposiciones simplificadoras que usted piensa adecuadas en el problema.
6. Termine el análisis algebraico antes de sustituir los valores numéricos.
7. Sustituya los valores numéricos (empleando un conjunto consistente de unidades) para obtener una respuesta numérica.
   a. Dé la referencia del origen de los valores para cualquier propiedad física.
   b. Asegúrese de que las cifras significativas de la respuesta concuerden con los datos proporcionados.
8. Verifique la respuesta y revise las suposiciones consideradas en la solución para asegurar que sean razonables.
9. Marque la respuesta.

En principio este formato de problemas puede parecer innecesario. Sin embargo, un enfoque metódico como éste para la solución de problemas reducirá errores, ahorrará tiempo y permitirá una comprensión más clara de las limitaciones de alguna solución en particular. Este enfoque también lo preparará para comunicar su método de solución y resultados a otros, como a menudo será necesario en su carrera. Este formato se emplea en todos los problemas ejemplo presentados en este texto; en las respuestas a los problemas ejemplo aparecen tres cifras significativas como máximo.

La mayor parte de los cálculos de ingeniería involucran valores medidos o datos de propiedades físicas. Todo valor medido tiene asociada una incertidumbre experimental. Ésta, en una medición, puede reducirse con cuidado y aplicando técnicas de medición más precisas, pero el costo y el tiempo necesarios por obtener datos aumenta significativamente conforme se incrementa la precisión de la medición. En consecuencia, pocos datos de ingeniería son lo suficientemente precisos como para justificar el uso de más de tres cifras significativas.

Los principios de la especificación de la incertidumbre experimental de una medición y de la estimación de la incertidumbre de un resultado calculado son revisados en el Apéndice F. Estos aspectos debe comprenderlos completamente cualquiera que efectúe trabajo de laboratorio. Le sugerimos que se tome un tiempo para revisar el Apéndice F antes de ejecutar trabajo de laboratorio o de resolver los problemas de tarea al final de este capítulo.

1-2 DEFINICIÓN DE UN FLUIDO

La mecánica de fluidos trata acerca del comportamiento de fluidos en reposo y en movimiento. Es lógico empezar con una definición de un *fluido*: un fluido es una sustancia que se deforma continuamente bajo la aplicación de un esfuerzo de corte (tangencial), sin importar cuán pequeño pueda ser este esfuerzo.

De este modo, los fluidos abarcan las fases líquidas y gaseosas (o de vapor) de las formas físicas en las cuales existe la materia. La distinción entre el estado fluido y sólido de la materia es clara, si usted compara el comportamiento de ambos estados. Un sólido se deforma cuando se le aplica un esfuerzo de corte, pero esta deformación no es continua.

En la figura 1.1 se contrasta el comportamiento entre un sólido (Fig. 1.1*a*) y un fluido (Fig. 1.1*b*) ante la acción de una fuerza constante. En la figura 1.1*a*, la fuerza de corte es aplicada al sólido a través de una de las dos placas, la superior, a las cuales se ha unido el sólido. Cuando la fuerza de corte es aplicada a la placa, el bloque se deforma como se muestra en la figura. De nuestro trabajo previo en mecánica, sabemos que siempre que no se exceda el límite elástico del material sólido, la deformación es proporcional al esfuerzo de corte aplicado, es decir, $\tau = F/A$, en donde A es el área de la superficie en contacto con la placa.

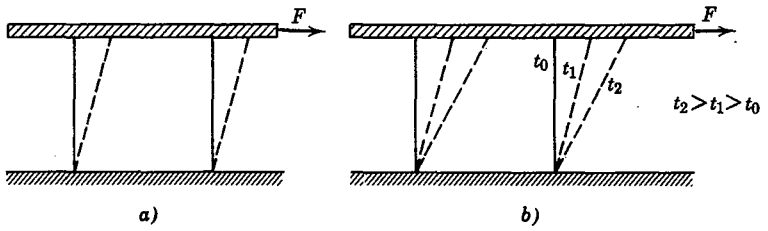


Fig. 1.1 Comportamiento de *a*) un sólido y *b*) un fluido, bajo la acción de una fuerza constante.

Para repetir el experimento con un fluido entre las placas, utilice un marcador de tinta para delinear un elemento fluido como indican las líneas continuas en la Fig. 1.1*b*. Cuando la fuerza, F, se aplica en la placa superior, el elemento fluido continúa su deformación mientras dure la aplicación de la fuerza. El fluido, en contacto directo con la frontera sólida, tiene la misma velocidad que la de la propia frontera; no hay deslizamiento en ésta. Éste es un hecho experimental basado en numerosas observaciones del comportamiento de los fluidos.[1] La forma del elemento fluido, en instantes sucesivos de tiempo $t_2 > t_1 > t_0$, se muestra (Fig. 1.1*b*) mediante líneas punteadas, las cuales representan las posiciones de las marcas en tiempos sucesivos. Puesto que el movimiento del fluido continúa ante la aplicación de un esfuerzo de corte, podemos definir alternativamente un fluido, como una sustancia que no puede soportar un esfuerzo de corte cuando está en reposo.

[1] La condición de no deslizamiento se demuestra en la película NCFMF, *Fundamentals of Boundary Layers*, F.H. Albernathy, director. Una lista completa de títulos de películas y fuentes de mecánica de fluidos se da en el Apéndice C.

1-3 OBJETIVO DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Habiendo definido un fluido y observado las características que lo distinguen de un sólido, nos podríamos preguntar el porqué del estudio de mecánica de fluidos.

El conocimiento y la comprensión de los principios y conceptos básicos de la mecánica de fluidos son esenciales para analizar cualquier sistema en el cual un fluido sea el medio de trabajo. El diseño de virtualmente todos los medios de transporte, requiere la aplicación de los principios de la mecánica de fluidos. Dentro de éstos, se incluyen las aeronaves tanto para vuelo subsónico como para supersónico, vehículos levitantes por reacción, aerodeslizadores, aeronaves de despegue y aterrizaje vertical que requieren un mínimo de longitud de pista, barcos, submarinos y automóviles. En los últimos años, los fabricantes de automóviles han prestado mayor atención al diseño aerodinámico. Esto mismo ha ocurrido desde hace algún tiempo en el caso de los diseñadores de autos y botes de carreras. El diseño de los sistemas de propulsión para los vuelos espaciales, así como para los cohetes de juguete está basado en los principios de la mecánica de fluidos. El colapso del puente de Tacoma en 1940 es una evidencia de las posibles consecuencias de olvidar los principios básicos de la mecánica de fluidos.[2] En la actualidad, es común efectuar estudios de modelos para determinar los campos de flujo circundantes y las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre edificios y estructuras, como por ejemplo, rascacielos, estadios de béisbol, chimeneas y centros comerciales.

El diseño de todos los tipos de maquinaria hidráulica, incluyendo bombas, ventiladores, sopladores, compresores y turbinas, requiere, indudablemente, del conocimiento de los principios básicos de la mecánica de fluidos. La lubricación es una aplicación de considerable importancia en la mecánica de fluidos. Los sistemas de calefacción y ventilación de casas habitación, los grandes edificios de oficinas y los túneles subterráneos, además del diseño de sistemas de tuberías, son ejemplos adicionales de las áreas que presentan problemas técnicos y que, por lo tanto, requieren del conocimiento de la mecánica de fluidos. El sistema circulatorio del cuerpo es, esencialmente, un sistema fluido. No es una sorpresa que el diseño de los sustitutos de la sangre, los corazones artificiales, las máquinas corazón-pulmón, las ayudas respiratorias y otros dispositivos similares, deban sustentarse en los principios básicos de la mecánica de fluidos.

Del mismo modo, algunos de nuestros empeños recreativos se relacionan directamente con la mecánica de fluidos. El efecto del golpe y el vuelo en curva de la pelota de golf, por ejemplo, puede explicarse mediante los principios de la mecánica de fluidos (¡aunque sólo puedan ser corregidos por un profesional del golf!).

La lista de aplicaciones de los principios de la mecánica de fluidos podría extenderse considerablemente. Nuestra posición al respecto, es que la mecánica de fluidos no es un tema que deba ser estudiado por un interés puramente académico dada su importancia tanto en nuestras experiencias cotidianas como en la tecnología moderna.

Desde luego, no podemos pretender abarcar en detalle ni un pequeño porcentaje de éstos y otros problemas específicos de la mecánica de fluidos. El propósito de este texto es, entonces, presentar las leyes básicas y los conceptos físicos relacionados con ellas que puedan proporcionar las bases o el punto de partida en el análisis de cualquier problema de la mecánica de fluidos.

1-4 E

[2] Como una evidencia dramática de fuerzas aerodinámicas en acción, véase la película *Collapse of the Tacoma Narrows Bridge*.

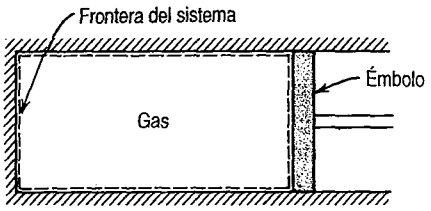


Fig. 1.2 Arreglo cilindro-émbolo.

1-4 ECUACIONES BÁSICAS

El análisis de cualquier problema de mecánica de fluidos empieza necesariamente, ya sea directa o indirectamente, con el enunciado de las leyes básicas que gobiernan el movimiento de los fluidos. Las leyes básicas, que son aplicables a cualquier fluido, son las siguientes:

1. La conservación de la masa.
2. La segunda ley del movimiento de Newton.
3. El principio del momento angular.
4. La primera ley de la termodinámica.
5. La segunda ley de la termodinámica.

Es claro que no todas las leyes básicas se requieren siempre para resolver algún problema. Por otra parte, en muchos problemas es necesario incluir dentro del análisis, relaciones adicionales en la forma de ecuaciones de estado o ecuaciones constitutivas, que describan el comportamiento de propiedades físicas de los fluidos en condiciones determinadas.

Es probable que usted recuerde haber estudiado las propiedades de los gases en física elemental o termodinámica. La ecuación de estado de *gas ideal*

$$p = \rho RT \tag{1.1}$$

es un modelo que relaciona la densidad con la presión y la temperatura, para muchos gases utilizados, bajo condiciones normales, en cálculos de precisión de ingeniería. En la ecuación 1.1, R es la constante de gas. Los valores de R, para varios gases comunes, se presentan en el Apéndice A; p y T en la ecuación 1.1 son la presión absoluta y la temperatura absoluta, respectivamente. El problema ejemplo 1.1 ilustra el uso de la ecuación de estado de gas ideal.

Es evidente que las leyes básicas con las cuales trataremos, son las mismas que las utilizadas en mecánica y termodinámica. Nuestra tarea será formular estas leyes en formas apropiadas para resolver problemas del flujo de fluidos y aplicarlas a una gran variedad de problemas.

Debemos destacar que existen, como observaremos, muchos problemas aparentemente simples en mecánica de fluidos, que no pueden resolverse analíticamente. En tales casos, debemos recurrir a soluciones numéricas más complicadas y/o a resultados de pruebas experimentales.

No todas las mediciones pueden hacerse con el mismo grado de precisión, ni tampoco todos los datos llegan a ser igualmente buenos; la validez de los datos debe documentarse antes de que los resultados de prueba sean utilizados en el diseño. Enunciar la incertidumbre probable de los datos es una parte importante del reporte completo y claro de los resultados experimentales. El análisis de la incertidumbre también es útil durante el diseño del experimento. Un estudio cuidadoso puede indicar fuentes potenciales de errores inaceptables, además de sugerir mejores métodos de medición.

1-5 MÉTODOS DE ANÁLISIS

El primer paso en la solución de un problema es definir el sistema que usted intenta analizar. En mecánica básica, se efectuó un uso extensivo del diagrama de cuerpo libre. En termodinámica, se consideraron sistemas cerrados o abiertos. En este texto, utilizamos los términos *sistema* y *volumen de control*. La importancia de definir el sistema o el volumen de control antes de aplicar las ecuaciones básicas en el análisis de un problema, no debe exagerarse. En este momento, revisaremos las definiciones de sistemas y volúmenes de control.

1-5.1 Sistema y volumen de control

Un sistema queda definido como una cantidad de masa fija e identificable, cuyas fronteras lo separan de sus alrededores, pudiendo ser éstas fijas o móviles; sin embargo, no hay transferencia de masa a través de ellas.

En el conocido dispositivo cilindro-émbolo de la termodinámica, figura 1.2, el gas dentro del cilindro es el sistema. Si una fuente de alta temperatura se pone en contacto con el extremo izquierdo del cilindro, el émbolo se moverá hacia la derecha; en consecuencia, la frontera del sistema experimentará movimiento. El calor y el trabajo pueden atravesar las fronteras del sistema, pero la cantidad de materia dentro de sus fronteras permanece fija, es decir, no hay transferencia de masa a través de ellas.

EJEMPLO 1.1 Aplicación de la primera ley a un sistema cerrado

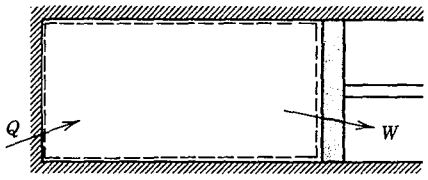
Un dispositivo de émbolo-cilindro contiene 0.95 kg de oxígeno inicialmente a una temperatura de 27 C y una presión de 150 kPa. Se añade calor al gas y éste se expande a presión constante hasta una temperatura de 627 C. Determine la cantidad de calor añadida durante el proceso.

PROBLEMA EJEMPLO 1.1

DATOS: Cilindro-émbolo que contiene O_2, $m = 0.95$ kg.

$T_1 = 27$ C $\quad T_2 = 627$ C

p = constante = 150 kPa (abs)



ENCUENTRE: $Q_{1 \to 2}$.

SOLUCIÓN:

Estamos tratando con un sistema, $m = 0.95$ kg.

Ecuación básica: Primera ley para el sistema, $Q_{12} - W_{12} = E_2 - E_1$

Suposiciones: 1) $E = U$, puesto que el sistema es estacionario

2) Gas ideal con calores específicos constantes

De acuerdo con las suposiciones anteriores,

$$E_2 - E_1 = U_2 - U_1 = m(u_2 - u_1) = mc_v(T_2 - T_1)$$

El trabajo efectuado durante el proceso es el trabajo de la frontera en movimiento

$$W_{12} = \int_{\forall_1}^{\forall_2} p\, d\forall = p(\forall_2 - \forall_1)$$

En un gas ideal, $p\forall = mRT$. En consecuencia, $W_{12} = mR(T_2 - T_1)$. Entonces, de la ecuación de la primera ley,

$$Q_{12} = E_2 - E_1 + W_{12} = mc_v(T_2 - T_1) + mR(T_2 - T_1)$$

$$Q_{12} = m(T_2 - T_1)(c_v + R)$$

$$Q_{12} = mc_p(T_2 - T_1) \qquad \{R = c_p - c_v\}$$

Del Apéndice, tabla A.6, para O_2, $c_p = 909.4$ J/kg · K. Resolviendo para Q_{12}, obtenemos

$$Q_{12} = 0.95 \text{ kg} \times 909.4 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 600 \text{ K}$$

$$Q_{12} = 518 \text{ kJ} \longleftarrow Q_{12}$$

{El propósito de este problema fue revisar el empleo de: *i*) la primera ley de la termodinámica para un sistema, y *ii*) la ecuación de estado para un gas ideal.}

En sus cursos de mecánica usted hizo un uso extensivo del diagrama de cuerpo libre (enfoque de sistema). Esto resultó lógico ya que usted estaba tratando con un cuerpo rígido fácilmente identificable. Sin embargo, en mecánica de fluidos por lo regular nos interesa el flujo de fluidos a través de dispositivos como compresores, turbinas, tuberías, toberas, etc. En estos casos, es difícil centrar la atención en una cantidad fija de masa identificable. Es mucho más conveniente, para el análisis, enfocar la atención sobre un volumen en el espacio a través del cual el fluido fluya. Por lo anterior, recurrimos al enfoque del volumen de control.

Un volumen de control es un volumen arbitrario, en el espacio, a través del cual circula fluido. La frontera geométrica del volumen de control se llama superficie de control. Ésta puede ser real o imaginaria, y puede encontrarse en reposo o en movimiento. La figura 1.3 muestra una posible superficie de control para el análisis de flujo a través de un tubo. Aquí, la superficie interior del tubo, una frontera física real, comprende parte de la superficie de control. Sin embargo, las partes verticales de la superficie de control son imaginarias, es decir, no hay una superficie física correspondiente; estas fronteras imaginarias se eligen arbitrariamente para propósitos de cálculo. Puesto que la localización de la superficie de control tiene un efecto directo en el procedimiento de cálculo al aplicar las leyes básicas, es de suma importancia que la superficie de control se elija con todo cuidado y se defina claramente antes de iniciar cualquier análisis.

1-5.2 Enfoque diferencial contra enfoque integral

Las leyes básicas que aplicamos en nuestro estudio de la mecánica de fluidos pueden formularse en términos de sistemas infinitesimales o finitos y volúmenes de control. Como usted puede

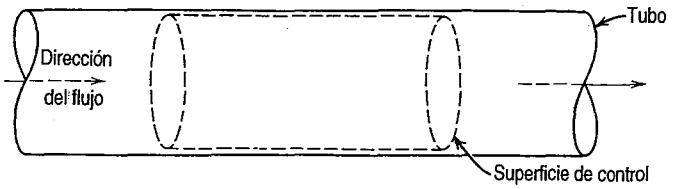


Fig. 1.3 Flujo de fluido a través de un tubo.

imaginar, las ecuaciones se verán diferentes en cada caso. Ambos enfoques son importantes en el estudio de la mecánica de fluidos y ambos serán desarrollados en el curso de nuestro trabajo.

En el primer caso, las ecuaciones resultantes son diferenciales. La solución de ecuaciones diferenciales de movimiento proporciona medios para determinar el comportamiento detallado (punto por punto) del flujo.

Con frecuencia, en los problemas bajo estudio, la información buscada no requiere un conocimiento detallado del flujo. A menudo nos interesa más el comportamiento global de un dispositivo; en tales casos resulta más apropiado emplear la formulación integral de las leyes básicas. La formulación integral, empleando sistemas finitos o volúmenes de control, suele ser más fácil de tratar analíticamente. Las leyes básicas de la mecánica y la termodinámica, formuladas en términos de sistemas finitos, constituyen las bases para derivar las ecuaciones de volumen de control en el capítulo 4.

1-5.3 Métodos de descripción

La mecánica trata casi exclusivamente con sistemas; usted ha hecho un empleo extensivo de las ecuaciones básicas aplicadas a una cantidad fija e identificable de masa. Al intentar analizar dispositivos termodinámicos, usted encontró a menudo necesario utilizar un análisis de volumen de control (sistema abierto). Es claro que el tipo de análisis depende del problema. Donde es fácil seguir la trayectoria de elementos de masa identificables (esto es, en la mecánica de partículas), utilizamos un método de descripción que siga a la partícula. Lo anterior se conoce como el método *lagrangiano* de descripción.

Considere, por ejemplo, la aplicación de la segunda ley de Newton a una partícula de masa fija, m. Matemáticamente, podemos escribir la segunda ley de Newton para un sistema de masa, m, como

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1.2}$$

En la ecuación 1.2, $\Sigma\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas externas que actúan en el sistema, $\vec{a}$ es la aceleración del centro de masa del sistema, $\vec{V}$ es la velocidad del centro de masa del sistema y $\vec{r}$ es el vector de posición del centro de masa del sistema, relacionado a un sistema de coordenadas fijo.

EJEMPLO 1.2 Caída libre de una pelota en el aire

La resistencia del aire sobre una pelota de 200 g en caída libre está dada por $f = 2 \times 10^{-4}v^2$, donde f está en newtons y v en metros por segundo. Si la pelota se deja caer desde el reposo a 500 m sobre

el suelo, determine la velocidad a la cual golpea al mismo. ¿A qué porcentaje de la velocidad terminal corresponde el resultado?

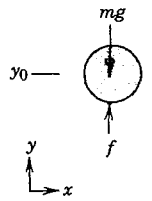
PROBLEMA EJEMPLO 1.2

DATOS: Una pelota, $m = 0.2$ kg, soltada desde el reposo en $y_0 = 500$ m
Resistencia del aire, $f = kv^2$, donde $k = 2 \times 10^{-4}$ N · seg^2/m^2

Unidades: f(N), v(m/s)

ENCUENTRE: *a*) La velocidad a la cual la pelota golpea el suelo.
b) La relación entre la velocidad y la velocidad terminal.

SOLUCIÓN:
La ecuación básica: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
El movimiento de la pelota está gobernado por la ecuación



$$\sum F_y = ma_y = m\frac{dv}{dt}$$

Puesto que $v = v(y)$, escribimos $\sum F_y = m\,\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = mv\frac{dv}{dy}$. Entonces,

$$\sum F_y = f - mg = kv^2 - mg = mv\frac{dv}{dy}$$

Separando variables e integrando,

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^v \frac{mv\,dv}{kv^2 - mg}$$

$$y - y_0 = \left[\frac{m}{2k}\ln(kv^2 - mg)\right]_0^v = \frac{m}{2k}\ln\frac{kv^2 - mg}{-mg}$$

Tomando antilogaritmos, obtenemos

$$kv^2 - mg = -mg\,e^{\left[\frac{2k}{m}(y-y_0)\right]}$$

Al resolver para v se obtiene

$$v = \left\{\frac{1}{k}mg\left(1 - e^{\left[\frac{2k}{m}(y-y_0)\right]}\right)\right\}^{1/2}$$

La sustitución de valores numéricos con $y = 0$ da como resultado

$$v = \left\{0.2\text{ kg} \times 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{m}^2}{2\times10^{-4}\text{ N}\cdot\text{s}^2} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\left(1 - e^{\left[\frac{2\times2\times10^{-4}}{0.2}(-500)\right]}\right)\right\}^{1/2}$$

$v = 78.7$ m/s ← v

A velocidad terminal, $a_y = 0$ y $\sum F_y = 0 = kv_t^2 - mg$

Entonces, $v_t = \left[\frac{mg}{k}\right]^{1/2} = \left[0.2\text{ kg} \times 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{m}^2}{2\times10^{-4}\text{ N}\cdot\text{s}^2} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\right]^{1/2}$

$$v_t = 99.0 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad \frac{v}{v_t} = \frac{78.7}{99.0} = 0.795, \text{ o } 79.5\% \qquad \frac{v}{v_t}$$

Este problema se incluye como un recordatorio del método de descripción utilizado en la mecánica de partículas.

Podemos considerar que un fluido está compuesto por un número muy grande de partículas cuyo movimiento debe ser descrito. Seguir la trayectoria de movimiento de cada partícula de fluido por separado se convertiría en un enorme problema de toma de datos, es decir, la descripción de partículas resultaría inmanejable. A menudo encontramos conveniente emplear un tipo diferente de descripción. Particularmente, con el análisis del volumen de control, es conveniente emplear el método de descripción de campo, o *euleriano*, el cual centra la atención en las propiedades de un flujo en un punto dado en el espacio, como una función del tiempo. En el método de descripción euleriano, las propiedades de un campo de flujo son descritas como funciones de coordenadas espaciales y de tiempo. Veremos en el Capítulo 2 que este método de descripción es una consecuencia lógica de una suposición, la de que los fluidos puedan ser tratados como un medio continuo.

1-6 DIMENSIONES Y UNIDADES

Los problemas de ingeniería son resueltos para responder preguntas específicas. Es por demás mencionar que la respuesta debe incluir unidades. (¡Hace una gran diferencia que el diámetro requerido de un tubo sea 1 m o 1 pie!) Por tanto, resulta apropiado presentar un breve repaso de dimensiones y unidades. Indicamos "repaso" porque el tema debe ser familiar para usted por su trabajo anterior en mecánica.

Nos referiremos a cantidades físicas tales como longitud, tiempo, masa y temperatura como *dimensiones*. En términos de un sistema particular de dimensiones, todas las cantidades medibles pueden subdividirse en dos grupos, es decir, cantidades primarias y cantidades secundarias.

Denominaremos a un pequeño grupo de dimensiones, a partir del cual todas las demás pueden formarse, como cantidades primarias. Para éstas establecemos escalas de medidas arbitrarias, mientras que las cantidades secundarias son aquellas cuyas dimensiones pueden expresarse en términos de las dimensiones de las cantidades primarias.

Las *unidades* son los nombres y magnitudes arbitrarios que son adoptadas como estándares de medición para las dimensiones primarias. Por ejemplo, la dimensión primaria de longitud puede medirse en unidades de metros, pies, yardas o millas. Estas unidades de longitud se relacionan entre sí por medio de factores de conversión de unidades (1 milla = 5280 pies = 1609 metros).

1-6.1 Sistemas de dimensiones

Toda ecuación válida que relacione cantidades físicas debe ser dimensionalmente homogénea, es decir, cada término en la ecuación debe tener las mismas dimensiones. Observamos que la segunda ley de Newton ($\vec{F} \propto m\vec{a}$) relaciona las cuatro dimensiones, F, M, L y t. De modo que la fuerza y la masa no pueden ser seleccionadas como dimensiones primarias, sin introducir una constante de proporcionalidad con dimensiones (y unidades).

1-6.2

a. ML

La longitud y el tiempo son dimensiones primarias en todos los sistemas dimensionales de uso común. En algunos sistemas, la masa se toma como la dimensión primaria, en otros, la fuerza es la que se elige como tal. Un tercer sistema elige tanto a la fuerza como a la masa como dimensiones primarias. Por consiguiente, tenemos tres sistemas de dimensiones básicas, que corresponden a maneras diferentes de especificación de las dimensiones primarias.

a. Masa [M], longitud [L], tiempo [t], temperatura [T].

b. Fuerza [F], longitud [L], tiempo [t], temperatura [T].

c. Fuerza [F], masa [M], longitud [L], tiempo [t], temperatura [T].

En el sistema *a*, la fuerza [F] es una dimensión secundaria y la constante de proporcionalidad en la segunda ley de Newton es adimensional. En el sistema *b*, la masa [M] es una dimensión secundaria y también aquí, la constante de proporcionalidad en la segunda ley de Newton, es adimensional. En el sistema *c*, tanto la fuerza [F] como la masa [M] se han elegido como dimensiones primarias. En este caso, la constante de proporcionalidad, g_c, en la segunda ley de Newton (escrita $\vec{F} = m\vec{a}\ /g_c$), no es adimensional. Las dimensiones de g_c deben ser, de hecho [ML/Ft^2] para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea. El valor numérico de la constante de proporcionalidad depende de las unidades de medida elegidas para cada una de las cantidades primarias.

1-6.2 Sistemas de unidades

Hay más de una manera de seleccionar la unidad de medida para cada dimensión primaria. Aquí presentaremos sólo los sistemas de unidades de ingeniería más comunes, para cada uno de los sistemas básicos de dimensiones.

a. MLtT

SI, que es la abreviatura oficial en todos los lenguajes para el Système International d'Unités,[3] es una extensión y refinamiento del sistema métrico tradicional. Más de 30 países lo han declarado como el único sistema legalmente aceptado.

En el sistema de unidades SI, la unidad de masa es el kilogramo (kg), la unidad de longitud es el metro (m), la unidad de tiempo es el segundo (s) y la unidad de temperatura es el kelvin (K). La fuerza es una dimensión secundaria, y su unidad, el newton (N), se define a partir de la segunda ley de Newton como

$$1\ \text{N} \equiv 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

En el sistema Métrico Absoluto de unidades, la unidad de masa es el gramo, la unidad de longitud es el centímetro, la unidad de tiempo es el segundo y la unidad de temperatura es el kelvin. Puesto que la fuerza es una dimensión secundaria, la unidad de fuerza, la dina, se define en términos de la segunda ley de Newton como

$$1\ \text{dina} \equiv 1\ \text{g} \cdot \text{cm/s}^2$$

[3] American Society for Testing and Materials, *ASTM Standard for Metric Practice*, E380-89, Filadelfia: ASTM, 1989.

b. FLtT

En el sistema de unidades inglés gravitacional, la unidad de fuerza es la libra (lbf), la unidad de longitud es el pie (pie), la unidad de tiempo es el segundo (s) y la unidad de temperatura es el rankine (R). Puesto que la masa es una dimensión secundaria, la unidad de masa, el slug, se define en términos de la segunda ley de Newton como

$$1 \text{ slug} \equiv 1 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$$

c. FMLtT

En el sistema de unidades de Ingeniería Inglés, la unidad de fuerza es la libra fuerza (lbf), la unidad de masa es la libra masa (lbm), la unidad de longitud es el pie (pie), la unidad de tiempo es el segundo (s) y la unidad de temperatura es el rankine (R). Puesto que tanto la fuerza como la masa se eligen como dimensiones primarias, la segunda ley de Newton se escribe como

$$\vec{F} = \frac{m\vec{a}}{g_c}$$

Una fuerza de una libra (1 lbf) es la fuerza que proporciona a una masa de una libra (1 lbm), una aceleración igual a la aceleración estándar de la gravedad sobre la Tierra, 32.17 pies/s^2. De la segunda ley de Newton vemos que (hasta tres cifras significativas)

$$1 \text{ lbf} \equiv \frac{1 \text{ lbm} \times 32.2 \text{ pies/s}^2}{g_c}$$

o

$$g_c \equiv 32.2 \text{ pies} \cdot \text{lbm/lbf} \cdot \text{s}^2$$

La constante de proporcionalidad, g_c, tiene tanto dimensiones como unidades. Las dimensiones surgieron porque elegimos a la fuerza y a la masa como dimensiones primarias. Las unidades (y el valor numérico) son una consecuencia de nuestras elecciones en cuanto a los patrones de medida.

Puesto que una fuerza de una 1 lbf acelera a 1 lbm a 32.2 pie/s^2, también aceleraría 32.2 lbm a 1 pie/s^2. Un slug también es acelerado a 1 pie/s^2 por una fuerza de 1 lbf. Por tanto,

$$1 \text{ slug} \equiv 32.2 \text{ lbm}$$

1-6.3 Sistema de unidades preferido

En este libro usaremos tanto el sistema de unidades SI como el inglés gravitacional. En cualquier caso, la constante de proporcionalidad en la segunda ley de Newton es adimensional y tiene un valor unitario. Por consiguiente, la segunda ley de Newton se escribe como $\vec{F} = m\vec{a}$. En estos sistemas resulta que la fuerza gravitacional (el "peso"[4]) sobre un objeto de masa, m, está dada por $W = mg$.

Las unidades y prefijos del SI, junto con otras unidades definidas y factores de conversión útiles, se resumen en el Apéndice G.

[4] Observe que en el sistema de Ingeniería Inglés, el peso de un objeto está dado por $W = mg/g_c$.

1-7 R

PROBI

1-7 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de haber completado el estudio del Capítulo 1, usted debe ser capaz de hacer lo siguiente:

1. Proporcionar las definiciones operacionales de:

fluido	método de descripción euleriano
condición de no deslizamiento	dimensiones
sistema	unidades
volumen de control	homogeneidad dimensional
método de descripción lagrangiano	peso

2. Dar ejemplos en los que la mecánica de fluidos sea importante para comprender un fenómeno de la experiencia cotidiana y la tecnología moderna.
3. Listar las cinco leyes básicas que gobiernan el movimiento de fluidos.
4. Establecer los tres sistemas básicos de dimensiones.
5. Dar las unidades típicas de cantidades físicas en los sistemas de unidades SI, inglés gravitacional e inglés de ingeniería.
6. Resolver los problemas a final de capítulo que se relacionen con el material estudiado.

PROBLEMAS

1.1 Varias sustancias comunes son

Brea	Arena
Mastique	Gelatina
Barro	Pasta de dientes
Cera	Crema de afeitar

Algunos de estos materiales presentan características de comportamiento tanto sólido como fluido bajo diferentes condiciones. Explique y dé ejemplos.

1.2 Un tanque de oxígeno comprimido para corte con soplete contiene 10 kg de oxígeno a una presión de 14 MPa (la temperatura es 35 C). ¿Qué tan grande debe ser el volumen del tanque que lo contiene? ¿Cuál es el diámetro de una esfera con este mismo volumen?

1.3 Aire a una presión de 40 psia y una temperatura de 70 F se está moviendo a una velocidad de 100 pies/s. Calcule: *a*) la energía cinética por unidad de masa del aire y *b*) la energía cinética por unidad de volumen del aire.

1.4 Aire a una presión absoluta de 300 kPa y una temperatura de 20 C se está moviendo a una velocidad de 30 m/s. Calcule: *a*) la energía cinética por unidad de masa del aire y *b*) la energía cinética por unidad de volumen del aire.

1.5 Enuncie, con palabras propias, cada una de las cinco leyes básicas de conservación indicadas en la sección 1-4, cuando se aplican a un sistema.

1.6 El aire húmedo es una mezcla de vapor de agua y aire. A una humedad relativa del 100 por ciento, el vapor de agua se encuentra en su presión de saturación. La presión atmosférica dada por un barómetro, es igual a la suma de presiones parciales del aire seco y del vapor de agua. De tal modo

$$p_{atm} = p_{aire} + p_{vapor}$$

La presión de saturación del agua a 15 C es 1.70 kPa. Emplee la ley de Dalton de presiones parciales para calcular la densidad de aire húmedo con humedad relativa del 100 por ciento, a temperatura y

presión estándares (las condiciones TPE son $T = 15$ C y $p = 101.3$ kPa absolutos). Compare con la densidad de aire seco en las mismas condiciones.

1.7 Una lata de comida para mascotas tiene las siguientes dimensiones internas: 102 mm de altura y 73 mm de diámetro (con variaciones de ± 1 mm en muestras de 20 a 1). La etiqueta indica la masa del contenido igual a 397 g. Evalúe la magnitud y estime la incertidumbre de la densidad de la comida para mascotas si el valor de la masa es preciso hasta ± 1 g en las mismas muestras.

1.8 La masa de la pelota de golf estándar en Estados Unidos es 1.62 ± 0.01 oz y su diámetro medio es 1.68 ± 0.01 pulg. Determine la densidad y la densidad relativa de la pelota de golf estadounidense. Estime las incertidumbres en los valores calculados.

1.9 La masa de la pelota de golf estándar inglesa es 1.62 ± 0.01 oz y su diámetro medio es 1.62 ± 0.01 pulg. Determine la densidad y la densidad relativa de la pelota de golf inglesa. Estime las incertidumbres en los valores calculados.

1.10 Las dimensiones estimadas de una lata de refresco son $D = 66.0 \pm 0.5$ mm y $H = 110 \pm 0.5$ mm. Mida la masa de una lata llena y de una vacía empleando una báscula de cocina o postal. Estime el volumen del refresco contenido en la lata. A partir de sus mediciones, calcule la profundidad a la cual se llena la lata y la incertidumbre en la estimación. Asuma el valor de DR = 1.055, según suministra el embotellador.

1.11 Calcule la densidad de aire estándar en un laboratorio a partir de la ecuación de estado de gas ideal. Estime la incertidumbre experimental en la densidad del aire calculada para condiciones estándar (29.9 pulg de mercurio y 59 F) si la incertidumbre en la medición de la altura del barómetro es ±0.1 pulg de mercurio y la incertidumbre en la medición de temperatura es ± 0.5 F. (Observe que 29.9 pulg de mercurio corresponden a 14.7 psia.)

1.12 Repita los cálculos de incertidumbre indicados en el problema 1.11 para aire en una congeladora. Suponga que la altura medida del barómetro es 759 ± 1 mm de mercurio y la temperatura es − 20 ± 0.5 C. [Observe que 759 mm de mercurio corresponden a 101 kPa (abs).]

1.13 La relación de flujo másico en un sistema de flujo de agua determinado para colectar la descarga durante un intervalo de tiempo es 0.3 kg/s. Las escalas empleadas pueden leerse hasta el 0.05 kg más cercano y el cronómetro tiene una precisión de 0.2 s. Estime la precisión con la cual la relación de flujo puede calcularse en intervalos de tiempo de *a*) 10 s y *b*) 1 min.

1.14 La relación de flujo másico para el agua en un tubo se mide empleando un vaso de precipitados que capte agua durante un intervalo de tiempo. La relación nominal de flujo másico es 100 g/s. Suponga que la masa se mide utilizando una balanza con una división mínima de 1 g y una capacidad máxima de 1 kg, y que el cronómetro tiene un división mínima de 0.1 s. Estime los intervalos de tiempo y las incertidumbres en la relación de flujo másico medida, que resultarían al emplear vasos de precipitados de 100, 500 y 1000 ml. ¿Habría alguna ventaja si se emplea el vaso más grande? Suponga que la masa del cristal del vaso de precipitados vacío de 1000 ml es 500 g.

1.15 Datos medidos para la caída de presión de flujo de aire en un tubo liso deben ser reducidos a factores de fricción. El factor de fricción se define como

$$f = \frac{\Delta p}{\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho \bar{V}^2}$$

donde Δp = caída de presión, L = longitud del tubo, D = diámetro del tubo, ρ = densidad del aire y $\bar{V}$ = velocidad promedio de flujo. Los datos medidos y sus incertidumbres experimentales estimadas son.

$$\Delta p = 8.5 \pm 0.1 \text{ mm } H_2O \qquad \rho = 1.23 \pm 0.01 \text{ kg/m}^3$$
$$L = 750 \pm 1 \text{ mm} \qquad \bar{V} = 25 \pm 0.5 \text{ m/s}$$
$$D = 62.5 \pm 0.1 \text{ mm}$$

(Note que 1 mm de H_2O corresponde a 9.80 N/m^2.)

Estime la incertidumbre en el factor de fricción calculado. ¿Qué variable brinda la mayor incertidumbre al factor de fricción?

1.16 Una revista publica datos de sus pruebas de rodaje sobre la capacidad de aceleración lateral de los automóviles. Las mediciones se realizan utilizando un cojinete de rodillo de 200 pies de diámetro. Suponga que la trayectoria del vehículo se desvía del círculo por ± 2 pies y que la velocidad del vehículo es leída desde un sistema de medición de velocidad de 5 ruedas hasta ± 0.5 mph. Estime la incertidumbre experimental en una aceleración lateral reportada de 0.823 g. ¿Cómo mejoraría usted el procedimiento experimental para reducir la incertidumbre?

1.17 Empleando las dimensiones nominales de la lata de refresco dadas en el problema 1.10, determine la precisión con la cual el diámetro y la altura deben ser medidos para estimar el volumen de la lata dentro de una incertidumbre de ± 0.5 por ciento.

1.18 En el problema 1.8 se describe una pelota de golf utilizada en Estados Unidos. Suponiendo dadas la masa medida y su incertidumbre, determine la precisión a la cual el diámetro de la pelota de golf debe ser medida de manera que su densidad pueda ser estimada dentro de una incertidumbre de ± 1 por ciento.

1.19 Hoy en día, muchas mediciones se efectúan empleando instrumentos digitales, los cuales convierten señales analógicas de transductores a la forma digital vía convertidores A-D (analógico a digital). La resolución de un convertidor A-D se especifica mediante el número máximo de bits de información que produce; la resolución es ± 0.5 en el último bit significativo. Estime la incertidumbre en la salida de un convertidor de 8 bits y uno de 12 bits como un porcentaje de las lecturas a máxima escala. (Asuma que la señal de entrada analógica representa exactamente el valor medido.) Comente acerca de las incertidumbres en las lecturas a 1/10 de la escala máxima.

‡**1.20** La altura de un edificio puede ser calculada midiendo la distancia horizontal a un punto sobre el suelo y el ángulo desde este punto hasta la parte superior del edificio. Suponiendo que estas mediciones son $L = 100 \pm 0.5$ pies y $\theta = 30 \pm 0.2°$, calcule la altura del edificio y su incertidumbre. Para la misma altura del edificio e incertidumbres de las mediciones, determine la distancia desde el edificio a la cual deben ser efectuadas las mediciones para minimizar la incertidumbre en la altura estimada. Evalúe y grafique el ángulo de medición óptimo como una función de la altura del edificio.

‡**1.21** Se considera el diseño de un instrumento médico, que debe administrar 1 milímetro cúbico de líquido empleando una jeringa de cilindro-émbolo elaborada a partir de un plástico moldeado. La operación de moldeo produce partes plásticas con incertidumbres dimensionales estimadas de ± 0.002 pulg. Calcule la incertidumbre en el volumen administrado que resulta de las incertidumbres en las dimensiones del dispositivo. Determine la relación de la longitud de carrera al diámetro del agujero, que brinda un diseño con incertidumbre mínima en el volumen administrado. ¿La magnitud de la incertidumbre dimensional afecta el resultado?

1.22 Un tanque de buceo es diseñado para contener 50 pies cúbicos estándar (PCE) de aire cuando se llena a una presión de 3000 libras por pulgada cuadrada (manométrica), a una temperatura ambiente de 80 F. Calcule el volumen interior del tanque y su longitud, si el diámetro interno es de 6 pulg. Un pie cúbico estándar de gas ocupa un pie cúbico a temperatura y presión estándares ($T = 15$ C y $p = 101.3$ kPa absolutos).

1.23 Un tanque de aire comprimido en una estación de servicio contiene 0.2 m^3 de aire comprimido a 800 kPa (manométricos). Determine la cantidad de energía requerida para comprimir, isotérmicamente, tal cantidad de aire desde la presión atmosférica, suponiendo un proceso sin fricción. (Note que la liberación de esta gran cantidad de energía sería catastrófica si el tanque se rompiera.)

1.24 El aire atrapado en una bomba para inflar llantas de bicicleta se comprime súbitamente hasta $\frac{1}{5}$ de su volumen original. Tanto la transferencia de calor como la fricción pueden depreciarse como una primera aproximación. Determine la temperatura final del aire en la bomba si la temperatura inicial es 20 C.

‡ Tal vez desee emplear programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obelisco.

1.25 La catapulta sobre un transportador de aviones tiene un diámetro de émbolo de 2 pies y una carrera de 100 pies. Inicialmente, el cilindro contiene vapor a 250 psia y 600 F en un volumen de 100 pies^3. Suponga que la transferencia de calor y la fricción son despreciables cuando el émbolo se mueve a través de su carrera. Determine *a*) la temperatura y presión del vapor al final de la carrera y *b*), el trabajo efectuado por el vapor durante el proceso de expansión.

1.26 Una pequeña partícula que se mueve en el agua, experimenta una fuerza de arrastre, $F_D = kV$, donde las dimensiones de k son fuerza por unidad de velocidad. Una partícula, de masa m, se pone en movimiento horizontal con velocidad inicial V_0. Demuestre que la distancia horizontal recorrida, antes de que la partícula se detenga, es igual a mV_0/k. Suponga que no hay movimiento vertical.HOLA

1.27 La fuerza de arrastre aerodinámica de un trailer que se mueve a través de aire sin corriente, está dada por $F_D = kV^2$, donde $k = 0.135$ lbf $\cdot$ s^2/pie^2. Calcule la fuerza requerida para superar el arrastre aerodinámico a una velocidad de 55 mph. Evalúe el ahorro de potencia si el arrastre aerodinámico se redujera 6 por ciento al instalar un fuselado en el techo de la cabina.

1.28 Un proyectil se lanza con velocidad $\vec{V}_0$ y ángulo de elevación θ, sobre la horizontal. La resistencia del aire puede despreciarse. Exprese el alcance del proyectil en términos de V_0 y θ. Determine el ángulo que produce el alcance máximo.

1.29 Partículas muy pequeñas que se mueven en fluidos, experimentan una fuerza de arrastre proporcional a la velocidad. Considere una partícula de peso neto, W, que se deja caer en un fluido. La partícula experimenta una fuerza de arrastre, kV, donde V es la velocidad de la partícula. Determine el tiempo requerido para que la partícula se acelere desde el reposo hasta 95 por ciento de su velocidad terminal, V_t, en términos de k, W y g.

1.30 Considere la partícula del problema 1.29. Exprese la distancia requerida para alcanzar 95 por ciento de su velocidad terminal en términos de g, k y W.

1.31 Un paracaidista con una masa de 75 kg salta de un avión. Se sabe que la fuerza de arrastre aerodinámica que actúa sobre el paracaidista es $F_D = kV^2$, donde $k = 0.228$ N $\cdot$ s^2/m^2. Determine la velocidad máxima de caída libre del paracaidista y la velocidad alcanzada después de 100 m de descenso.

1.32 Un arpón, de masa $m = 0.3$ kg, es lanzado horizontalmente desde un lanzador de arpones por un buzo. La velocidad inicial del arpón es $V_0 = 30$ m/s. La fuerza que se opone a su movimiento a través del agua está dada por $F_D = kV^2$, donde $k = 0.033$ N $\cdot$ s^2/m^2. El arpón es efectivo contra tiburones cuando su velocidad es superior a $V = 10$ m/s. Estime el alcance efectivo del arpón.

1.33 Un nadador en agua dulce en reposo puede moverse a una velocidad uniforme máxima de $V_s = 1.5$ m/s. Para hacer esto, el nadador debe producir suficiente potencia para superar la resistencia del agua. Se estima que la fuerza de arrastre que actúa sobre el nadador es $F_D = kV^2$, donde $k = 30$ N $\cdot$ s^2/m^2, y V es la velocidad del nadador *relativa* al agua. Evalúe la potencia producida por el nadador en agua en reposo. Si éste puede mantener la misma salida de potencia en una corriente de río que se mueve a 3 km/hr, estime las velocidades máximas que el nadador puede alcanzar *a*) nadando contra la corriente y *b*) a favor de la corriente.

1.34 Los ingleses perfeccionaron el arco largo como un arma después de la época medieval. En manos de un hábil arquero, se estimaba que el arco era preciso hasta en alcances de 100 m o más. Si la altitud máxima de una flecha es menor de 10 m mientras viaja hasta un blanco a 100 m de distancia del arquero, y se desprecia la resistencia del aire, estime la velocidad y el ángulo a los cuales la flecha debe abandonar el arco.

1.35 Un paracaidista con masa de $m = 80$ kg cae desde un avión que se mueve lentamente y desciende verticalmente. La fuerza de arrastre aerodinámica que actúa sobre el paracaidista es $F_D = kV^2$, donde $k = 0.27$ N $\cdot$ s^2/m^2, y V es la velocidad relativa al aire. Evalúe la velocidad terminal del paracaidista. Calcule la distancia vertical requerida para que el paracaidista alcance el 95 por ciento de la velocidad terminal. Compare con la distancia requerida para alcanzar la misma velocidad si se despreciara la resistencia del aire.

1.36 Una gota de aceite lubricante con $D = 0.7$ mm se pone en agua a 20 C. Como la gota es pequeña, su

resistencia al movimiento puede caracterizarse, aproximadamente, mediante $F_D = kV$, donde $k = 6.60 \times 10^{-6}$ N · s/m. Calcule la magnitud y dirección de la velocidad terminal de la gota.

1.37 Una bola se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial V_0. La resistencia del aire sobre la bola es proporcional al cuadrado de su velocidad, $F_D = kV^2$. Analice el movimiento para obtener las expresiones de la velocidad de la bola y su altura como una función del tiempo. Exprese el tiempo que tarda la bola en alcanzar la altura máxima en términos de V_0, m, k y g. Compare con el valor cuando no hay resistencia del aire.

1.38 Para cada cantidad listada, indique las dimensiones empleando el sistema de dimensiones *MLtT* y proporcione las unidades típicas del SI y del Sistema Inglés:

a) Potencia
b) Presión
c) Módulo de elasticidad
d) Velocidad angular
e) Energía
f) Momento
g) Esfuerzo de corte
h) Calor específico
i) Coeficiente de expansión térmica

1.39 Para cada cantidad listada, indique las dimensiones utilizando el sistema de dimensiones *FLtT* y exprese las unidades típicas del SI y del Sistema Inglés:

a) Potencia
b) Presión
c) Módulo de elasticidad
d) Velocidad angular
e) Energía
f) Momento de una fuerza
g) Momento
h) Esfuerzo de corte
i) Deformación

1.40 La unidad de presión en el sistema SI es el pascal (Pa). ¿Cuántas libras fuerza por pulgada cuadrada (psi) corresponden a 1 Pa?

1.41 Un galón estadounidense, por definición, contiene un volumen de 231 pulgadas cúbicas. Determine *a*) el número de galones en un pie cúbico y *b*) el número de litros en un galón.

1.42 Obtenga el factor de conversión para convertir la viscosidad, μ, a partir de unidades de newtons, segundos y metros en unidades de libras fuerza, segundos y pies. Verifique su respuesta empleando el Apéndice A.

1.43 En Michigan, las leyes de carga en los camiones permiten un peso combinado bruto de 130 000 lbf. Un carro tanque pesa 36 000 lbf vacío. Calcule el número de galones de gasolina que puede transportar legalmente. Emplee los datos para gasolina del Apéndice A.

1.44 Un gran buque petrolero transporta un cargamento de 400 000 toneladas largas (1 tonelada larga = 2240 lbm) de petróleo crudo. Suponga que la densidad relativa del petróleo es DR = 0.85. Calcule el número de barriles de petróleo en la carga del buque (la industria petrolera define 1 bp como 42 galones estadounidenses).

1.45 La densidad del mercurio está dada como 26.3 slug/pie^3. Calcule la densidad relativa y el volumen específico del mercurio en m^3/kg. Calcule el peso específico en lbf/pie^3 en la Tierra y en la luna. La aceleración de la gravedad en la luna es 5.47 pie/s^2.

1.46 Deduzca los siguientes factores de conversión:

a) Convierta un flujo volumétrico de metros cúbicos por segundo a pies cúbicos por segundo.
b) Convierta un flujo volumétrico de pies cúbicos por segundo a galones por minuto.
c) Convierta un flujo volumétrico de agua de galones por hora a kg por minuto.
d) Convierta un flujo volumétrico de aire de pies cúbicos estándar por minuto (PCEM) a libras por hora. Un pie cúbico estándar de gas ocupa un pie cúbico a temperatura y presión estándares (T = 15 C y p = 101.3 kPa absolutos).

1.47 En una institución conocida por su destreza en el básquetbol, se ha sugerido un nuevo conjunto de

unidades físicas. La unidad básica de longitud se conoce como "el punto de tres", el cual es igual a 21 pies; la unidad básica de tiempo es el "disparo del reloj", que equivale a 45 segundos; la unidad básica de fuerza es el "balón de básquetbol", el cual corresponde a 21 oz. Determine los factores de conversión entre estas unidades y sus equivalentes en el sistema SI. ¿Cómo se relacionan las unidades de masa en los dos sistemas?

1.48 En una institución conocida por su destreza en béisbol, se ha sugerido que la fuerza, la velocidad y la longitud se consideren como dimensiones básicas. La unidad básica de fuerza es la "bola de béisbol", la cual corresponde a 5.1 oz; la unidad básica de velocidad es la "bola rápida", que es igual a 90 mph y la unidad básica de longitud es el "jonrón", que equivale a 385 pies. Determine los factores de conversión entre estas unidades y sus equivalentes en el sistema SI. ¿Cuál es la unidad de masa en el nuevo sistema? ¿Cuál es el factor de conversión entre esta unidad de masa y la unidad del SI?

1.49 Un recipiente pesa 2.9 lbf cuando está vacío. Cuando se llena de agua a 90 F, la masa del recipiente y su contenido es 1.95 slug. Encuentre el peso del agua en el recipiente y su volumen en pies cúbicos, empleando los datos del Apéndice A.

1.50 Evalúe el cambio en el peso específico del mercurio, en lbf/pie^3, cuando su temperatura varía de 70 a 90 F. Utilice los datos del Apéndice A.

2-1 FLU

Capítulo 2

Conceptos fundamentales

En el capítulo 1, señalamos que nuestro estudio de mecánica de fluidos se fundamentará en estudios previos de mecánica y termodinámica. Para desarrollar un enfoque unificado, repasaremos algunos temas familiares e introduciremos algunos conceptos y definiciones nuevos. El propósito de este capítulo es desarrollar estos conceptos fundamentales.

2-1 FLUIDO COMO UN MEDIO CONTINUO

En nuestra definición de un fluido no se mencionó la estructura molecular de la materia. Todos los fluidos están compuestos de moléculas en constante movimiento. Sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones de ingeniería lo que nos interesa son los efectos promedio o macroscópicos de muchas moléculas. Estos efectos macroscópicos son los que ordinariamente percibimos y medimos. De tal modo, trataremos al fluido como una sustancia infinitamente divisible, es decir, un medio *continuo*, dejando de lado el comportamiento de las moléculas individuales.

El concepto de medio continuo es la base de la mecánica de fluidos clásica. La suposición del medio continuo es válida al tratar el comportamiento de fluidos bajo condiciones normales. No obstante, falla siempre que la trayectoria libre media de las moléculas (aproximadamente 10^{-7} m para moléculas de gas que muestran un comportamiento ideal en condiciones TPE)[1] se vuelve del mismo orden de magnitud que la dimensión característica significativa más pequeña del problema. En problemas tales como los de flujo de un gas rarificado que se encuentra, por ejemplo, en los vuelos que llegan a las partes más altas de la atmósfera, debemos abandonar el concepto de medio continuo en favor de los puntos de vista microscópico y estadístico.

Como una consecuencia de la suposición del medio continuo, se considera que cada propiedad del fluido tiene un valor definido en cada punto en el espacio. Por ello, propiedades del fluido como la densidad, temperatura, velocidad, etc., se consideran como funciones continuas de la posición y el tiempo.

Para ilustrar el concepto de una propiedad en un punto, considere la manera en la cual determinamos la densidad en un punto. En la figura 2.1, se presenta una región de fluido. Nos interesa determinar la densidad en el punto C, cuyas coordenadas son x_0, y_0 y z_0. La densidad se

[1] La TPE (temperatura y presión estándares) para el aire son 15 C (59 F) y 101.3 kPa absolutos (14.696 psia), respectivamente.

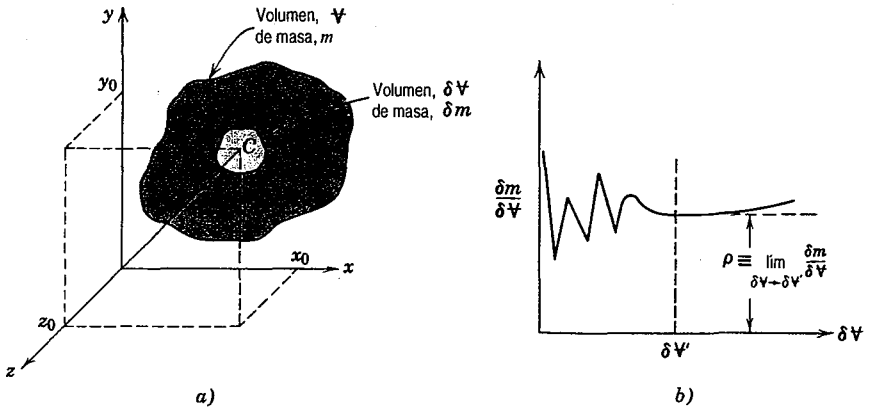


Fig. 2.1 Definición de densidad en un punto.

define como masa por unidad de volumen. De modo que la densidad media dentro del volumen, ∀, estaría dada por $\rho = m/\forall$. Generalmente, ésta no será igual al valor de la densidad en el punto C. Para determinar la densidad en el punto C, debemos elegir un pequeño volumen, $\delta\forall$, alrededor del punto C y determinar el cociente $\delta m/\delta\forall$. La pregunta es, ¿qué tanto podemos reducir el volumen $\delta\forall$? La responderemos graficando el cociente, $\delta m/\delta\forall$, y dejando que el volumen contraiga su tamaño continuamente. Suponiendo que en un principio el volumen, $\delta\forall$, fuera relativamente grande (pero aún pequeño comparado con el volumen, ∀), una gráfica típica de $\delta m/\delta\forall$ aparecería como lo muestra la figura 2.1*b*. En otras palabras, $\delta\forall$ debe ser suficientemente grande como para generar un valor reproducible y significativo para la densidad en una posición, y lo suficientemente pequeño como para poder resolver variaciones espaciales en la densidad. La densidad promedio tiende a aproximarse a un valor asintótico, conforme el volumen es reducido para encerrar sólo fluido homogéneo en la vecindad inmediata del punto C. Cuando $\delta\forall$ se vuelve tan pequeño que contiene sólo un número pequeño de moléculas, resulta imposible fijar un valor definido para $\delta m/\delta\forall$; el valor variará irregularmente conforme las moléculas crucen hacia y fuera del volumen. De tal modo, hay un valor límite inferior de $\delta\forall$, denominado $\delta\forall'$ en la figura 2.1*b*, el cual puede usarse al definir la densidad de fluido en un punto.[2] La densidad en un "punto" se define entonces como

$$\rho \equiv \lim_{\delta\forall \to \delta\forall'} \frac{\delta m}{\delta\forall} \tag{2.1}$$

Como el punto C fue arbitrario, la densidad en cualquier punto en el fluido podría determinarse de manera similar. Si las determinaciones de densidad se hubieran efectuado simultáneamente en un número infinito de puntos en el fluido, obtendríamos una expresión para la distribución de densidad como una función de las coordenadas espaciales, $\rho = \rho(x, y, z)$, en un instante dado en el tiempo. Obviamente, la densidad en un punto puede variar con el tiempo como consecuencia

[2] El tamaño de $\delta\forall'$ es extremadamente pequeño. Por ejemplo, 1 mm^3 a TPE contiene aproximadamente 2.5×10^{25} moléculas. Así, el número de moléculas en un volumen de 10^{-12} m^3 (aproximadamente el tamaño de un grano de arena) sería 2.5×10^{13}. Este número es en realidad lo suficientemente grande para asegurar que la masa promedio dentro de $\delta\forall'$ sea constante.

2-2 CAI

del trabajo efectuado en o por el fluido y/o la transferencia de calor al fluido. De modo que la representación completa de la densidad (la representación de *campo*) está dada por

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \tag{2.2}$$

Puesto que la densidad es una cantidad escalar, que requiere sólo la especificación de una magnitud para una descripción completa, el campo representado por la ecuación 2.2 es un campo escalar.

2-2 CAMPO DE VELOCIDADES

En la sección anterior, vimos que la suposición del medio continuo condujo de manera directa a la noción del campo de densidad. Otras propiedades del fluido también pueden describirse mediante campos.

Al tratar con fluidos en movimiento, necesariamente nos concierne la descripción de un campo de velocidad. Refiérase otra vez a la figura 2.1*a* y defina la velocidad del fluido en el punto *C* como la velocidad instantánea del centro de gravedad del volumen, $\delta\forall'$, que rodea en ese mismo instante al punto *C*. Si definimos una *partícula de fluido* como una masa pequeña de fluido de identidad fija de volumen $\delta\forall'$, entonces la velocidad en el punto *C* queda definida como la velocidad instantánea de la partícula de fluido que, en un instante dado, está pasando a través del punto *C*. La velocidad en cualquier punto en el campo de flujo se define de manera similar. En un instante determinado, el campo de velocidad, $\vec{V}$, es una función de las coordenadas espaciales *x, y, z*. La velocidad en cualquier punto en el campo de flujo, podría variar de un instante a otro. De modo que la representación completa de velocidad (el campo de velocidad) está dada por

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \tag{2.3}$$

El vector de velocidad, $\vec{V}$, puede escribirse en términos de sus tres componentes escalares. Al denotar las componentes en las direcciones *x, y* y *z* por *u, v* y *w*, entonces

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \tag{2.4}$$

En general, cada una de las componentes, *u, v* y *w*, serán una función de *x, y, z* y *t*.

Si las propiedades en cualquier punto en el campo de flujo no cambian con el tiempo, el flujo se denomina *estacionario*. En términos matemáticos, la definición de flujo estacionario es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

donde η representa cualquier propiedad de fluido. Para flujo fijo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{o} \qquad \rho = \rho(x, y, z)$$

y

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \qquad \text{o} \qquad \vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$$

En consecuencia, en flujo estacionario, cualquier propiedad puede variar de un punto a otro en el campo, pero todas las propiedades permanecen constantes con el tiempo en todo punto.

2-2.1 Flujos unidimensional, bidimensional y tridimensional

Un flujo se clasifica como unidimensional, bidimensional o tridimensional dependiendo del número de coordenadas espaciales requerido para especificar el campo de velocidad.[3] La ecuación 2.3 indica que el campo de velocidad puede ser una función de tres coordenadas espaciales y del tiempo. Tal campo de flujo se denomina *tridimensional* (también es *no estacionario*) porque la velocidad en cualquier punto en el campo de flujo, depende de las tres coordenadas requeridas para localizar el punto en el espacio.

Aunque la mayor parte de los campos de flujo son inherentemente tridimensionales, el análisis basado en un número menor de dimensiones es, con frecuencia, significativo. Considere, por ejemplo, el flujo estacionario a través de un largo tubo recto de sección transversal constante. Lejos de la entrada del tubo, la distribución de velocidad puede describirse mediante

$$u = u_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

Este perfil se muestra en la figura 2.2, donde se emplean las coordenadas cilíndricas r, θ y x para localizar cualquier punto en el campo de flujo. El campo de velocidad es función de r solamente; es independiente de las coordenadas x y θ, es decir, se trata de un flujo unidimensional.

Un ejemplo de flujo bidimensional se ilustra en la figura 2.3. La distribución de velocidades se describe mediante un flujo entre paredes rectas divergentes imaginarias de tamaño infinito (en la dirección z). Puesto que se considera que el canal es infinito en la dirección z, el campo de velocidades será idéntico en todos los planos perpendiculares al eje z. En consecuencia, el campo de velocidad es sólo función de las coordenadas espaciales x y y, por lo tanto, el campo de flujo se clasifica como bidimensional.

2-2.2 L

Como usted podría imaginar, la complejidad del análisis aumenta considerablemente con el número de dimensiones del campo de flujo. En muchos problemas encontrados en ingeniería, un análisis unidimensional es adecuado para brindar soluciones aproximadas con la precisión que exige dicha disciplina.

Puesto que todos los fluidos que satisfacen la suposición del medio continuo deben tener una

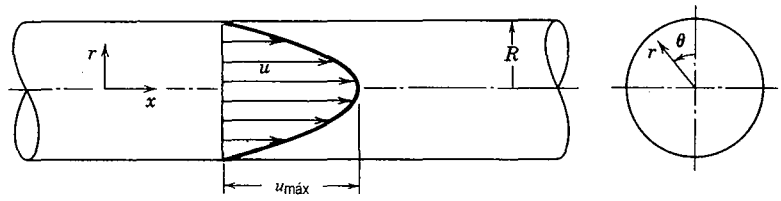


Fig. 2.2 Ejemplo de flujo unidimensional.

[3] Algunos autores prefieren clasificar un flujo como uni, bi o tridimensional con base en el número de coordenadas espaciales requerido para especificar todas las propiedades del fluido. En este texto, la clasificación de los campos de flujo se basará en el número de coordenadas espaciales requerido para especificar sólo el campo de velocidad.

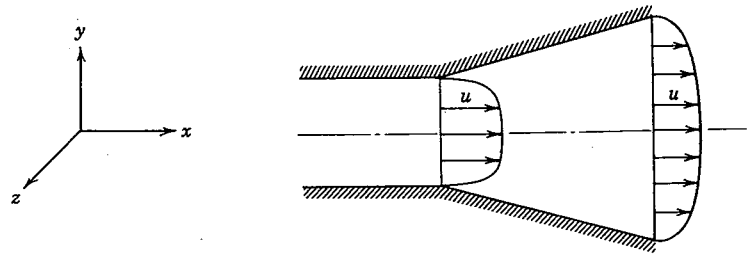


Fig. 2.3 Ejemplo de flujo bidimensional.

velocidad relativa de cero en una superficie sólida (para satisfacer la condición sin deslizamiento), la mayor parte de los flujos son inherentemente bi o tridimensionales. Con fines de análisis, a menudo resulta conveniente incluir la noción de *flujo uniforme* en una sección transversal determinada. En un flujo que es uniforme en una sección transversal dada, la velocidad es constante a través de cualquier sección normal al flujo. Bajo esta consideración[4], el flujo bidimensional de la figura 2.3 se modela como el mostrado en la figura 2.4. En el flujo de la figura 2.4, el campo de velocidad es una función sólo de x y por ello, el modelo de flujo es unidimensional. (Otras propiedades, tales como la densidad o la presión, también pueden considerarse, si es conveniente, uniformes en una sección.)

El término *campo de flujo uniforme*, el cual se opone al de flujo uniforme en una sección transversal, se emplea para describir un flujo en el cual la magnitud y la dirección del vector de velocidad son constantes, esto es, independientes de todas las coordenadas espaciales, a través de todo el campo de flujo.

2-2.2 Líneas en el tiempo, líneas de trayectoria, líneas de traza y líneas de corriente

En el análisis de problemas en mecánica de fluidos, con frecuencia es ventajoso obtener una representación visual del campo de flujo. Tal representación está dada por las líneas en el tiempo, las de trayectoria, las de traza y las de corriente.[5]

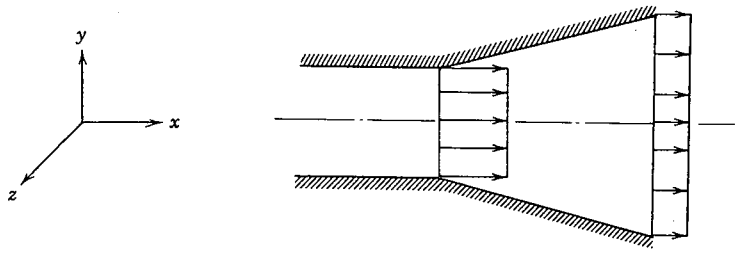


Fig. 2.4 Ejemplo de flujo uniforme en una sección.

[4] Sólo la conveniencia no justifica esta suposición; a menudo, se obtienen resultados de precisión aceptable. Las suposiciones generales, tales como el flujo uniforme en una sección transversal, siempre deben revisarse con cuidado para asegurar que proporcionen un modelo analítico razonable del flujo real.

[5] Las líneas en el tiempo, trayectoria, traza y corriente se muestran en la película de NCFMF, *Flow Visualization*, S.J. Kline, director.

Si varias partículas adyacentes de fluido que se encuentran, en un campo de flujo se marcan en un instante determinado, forman una línea en el fluido en ese mismo instante; esta línea recibe el nombre de *línea en el tiempo*. Las observaciones subsecuentes de la línea proporcionan información acerca del campo de flujo. Por ejemplo, al discutir el comportamiento de un fluido bajo la acción de una fuerza de corte constante (sección 1-2), se presentaron las líneas en el tiempo para demostrar la deformación de un fluido en instantes sucesivos.

Una *línea de trayectoria* es la trayectoria o trazo delineado por una partícula de fluido en movimiento. Para hacer visible una línea de trayectoria, podríamos identificar una partícula de fluido en un instante dado con el uso de una tinta, por ejemplo, y después hacer una fotografía de larga exposición de su movimiento subsecuente. La línea trazada por la partícula es una línea de trayectoria.

Por otra parte, podríamos elegir centrar nuestra atención en una posición fija en el espacio e identificar, también mediante el uso de una tinta, todas las partículas de fluido que pasan a través de ese punto. Después de un breve periodo, tendríamos varias partículas de fluido identificadas en el flujo, la totalidad de las cuales habrían, en cierto tiempo, pasado a través de una posición fija en el espacio. La línea que une estas partículas de fluido se denomina *línea de traza*.

Las *líneas de corriente* son trazos dibujados en el campo de flujo de manera que en un instante determinado, sean tangenciales a la dirección del flujo en cualquier punto en el campo del mismo. Puesto que las líneas de corriente son tangenciales al vector de velocidad en cada punto en el campo de flujo, no puede haber flujo a través de una línea de corriente. El procedimiento utilizado para obtener la ecuación para una línea de corriente en un flujo bidimensional se ilustra en el problema ejemplo 2.1.

En flujo estacionario, la velocidad en cada punto en el campo de flujo permanece constante en el tiempo y, consecuentemente, las líneas de corriente no varían de un instante a otro. Esto implica que una partícula localizada en una línea de corriente determinada permanecerá en esta misma. Además, las partículas consecutivas que pasan a través de un punto fijo en el espacio estarán en la misma línea de corriente y, subsecuentemente, permanecerán en ella. Por lo tanto, en un flujo estacionario, las líneas de trayectoria, las línea de traza y las líneas de corriente son idénticas en el campo de flujo.

Es posible que la forma de las líneas de corriente pueda variar de un instante a otro si el flujo es inestable. Por tanto, en este tipo de flujo, no coincidirán las líneas de trayectoria, de traza y de corriente.

EJEMPLO 2.1 Líneas de corriente y de trayectoria en flujo bidimensional

Un campo de velocidad está dado por $\vec{V} = ax\hat{i} - ay\hat{j}$; las unidades de velocidad son m/s; x y y se dan en metros; $a = 0.1\ s^{-1}$.

a) Obtenga una ecuación para las líneas de corriente en el plano xy.

b) Dibuje una línea de corriente que pase por el punto $(x_0, y_0, 0) = (2, 8, 0)$.

c) Determine la velocidad de una partícula en el punto (2, 8, 0).

d) Si la partícula que pasa por el punto $(x_0, y_0, 0)$ se marca en el tiempo $t_0 = 0$, determine la posición de la partícula en el tiempo $t = 20$ s.

e) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 20$ s?

f) Demuestre que la ecuación de la trayectoria de la partícula (la línea de trayectoria) es la misma que la ecuación de la línea de corriente.

PROBLEMA EJEMPLO 2.1

DATOS: Campo de velocidad, $\vec{V} = ax\hat{i} - ay\hat{j}$; x y y en metros; $a = 0.1\ s^{-1}$

ENCUENTRE:
a) La ecuación de las líneas de corriente en el plano xy.
b) Dibuje la línea de corriente por el punto (2, 8, 0).
c) La velocidad de la partícula en el punto (2, 8, 0).
d) La posición en $t = 20$ s de la partícula localizada en (2, 8, 0) en $t = 0$.
e) La velocidad de la partícula en la posición encontrada en *d*).
f) La ecuación de la línea de trayectoria de la partícula localizada en (2, 8, 0) en $t = 0$.

SOLUCIÓN:

a) Las líneas de corriente dibujadas en el campo de flujo son aquellas que, en un instante determinado, son tangenciales a la dirección del flujo en cualquier punto.

En consecuencia,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{línea de corriente}} = \frac{v}{u} = \frac{-ay}{ax} = \frac{-y}{x}$$

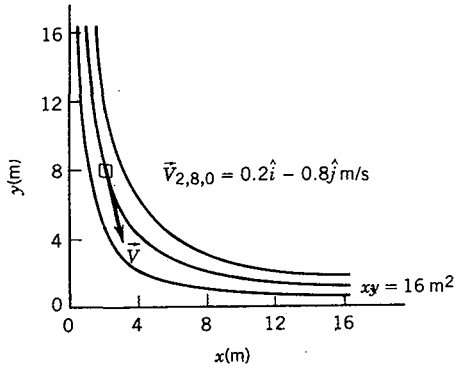
Separando variables e integrando, obtenemos

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

o

$$\ln y = -\ln x + c_1$$

Ésta puede escribirse como $xy = c$.



b) Para la línea de corriente que pasa por el punto $(x_0, y_0, 0) = (2, 8, 0)$ la constante c, tiene un valor de 16 y la ecuación de la línea de corriente por el punto (2, 8, 0) es

$$xy = x_0 y_0 = 16\ m^2$$

c) El campo de velocidad es $\vec{V} = ax\hat{i} - ay\hat{j}$. En el punto (2, 8, 0)

$$\vec{V} = a(x\hat{i} - y\hat{j}) = 0.1\ s^{-1}(2\hat{i} - 8\hat{j})\ m = 0.2\hat{i} - 0.8\hat{j}\ m/s$$

d) Una partícula que se mueve en el campo de flujo tendrá una velocidad dada por

$$\vec{V} = ax\hat{i} - ay\hat{j}$$

Por consiguiente,

$$u_p = \frac{dx}{dt} = ax \qquad \text{y} \qquad v_p = \frac{dy}{dt} = -ay$$

Al separar variables e integrar (en cada ecuación) se obtiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t a\,dt \qquad \text{y} \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_0^t -a\,dt$$

Por tanto

$$\ln \frac{x}{x_0} = at \qquad \text{y} \qquad \ln \frac{y}{y_0} = -at$$

o

$$x = x_0\, e^{at} \qquad \text{y} \qquad y = y_0\, e^{-at}$$

En $t = 20$ s,

$$x = 2\text{ m}\, e^{(0.1)20} = 14.8\text{ m} \quad \text{y} \quad y = 8\text{ m}\, e^{-(0.1)20} = 1.08\text{ m}$$

En $t = 20$ s, la partícula está en (14.8, 1.08, 0) m ←

e) En el punto (14.8, 1.08, 0) m,

$$\vec{V} = a(x\hat{i} - y\hat{j}) = 0.1\text{ s}^{-1}\,(14.8\hat{i} - 1.08\hat{j})\text{ m} = 1.48\hat{i} - 0.108\hat{j}\text{ m/s} \leftarrow$$

f) Para determinar la ecuación de la línea de trayectoria, utilizamos las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 e^{at} \qquad \text{y} \qquad y = y_0 e^{-at}$$

y eliminamos t. Resolviendo para e^{at} en ambas ecuaciones

$$e^{at} = \frac{y_0}{y} = \frac{x}{x_0} \qquad \text{entonces} \qquad xy = x_0 y_0 = 16\text{ m}^2 \leftarrow$$

Nota: *i*) La ecuación de la línea de corriente que pasa por $(x_0, y_0, 0)$ y la ecuación de la línea de la trayectoria trazada por la partícula que pasa por $(x_0, y_0, 0)$ son las mismas para este flujo estacionario.

ii) En el seguimiento de una partícula (método de descripción lagrangiano), tanto las coordenadas de la partícula (x, y) como las componentes de la velocidad de la partícula ($u_p = dx/dt$ y $v_p = dy/dt$) son funciones del tiempo.

2-3 CAMPO DE ESFUERZOS

Las fuerzas de superficie y las másicas se encuentran en el estudio de la mecánica de fluidos del medio continuo. Las *fuerzas de superficie* actúan sobre las fronteras de un medio mediante contacto directo. Las fuerzas desarrolladas sin contacto físico, y distribuidas por el volumen del fluido, se denominan *fuerzas másicas*. Las fuerzas gravitacional y electromagnética son ejemplos de fuerzas másicas.

La fuerza másica gravitacional que actúa sobre un elemento de volumen, $d\forall$ está dada por $\rho\vec{g}\ d\forall$, donde ρ es la densidad (masa por unidad de volumen) y $\vec{g}$ es la aceleración gravitacional local. Así, la fuerza másica gravitacional por unidad de volumen es $\rho\vec{g}$ y la fuerza másica gravitacional por unidad de masa es $\vec{g}$.

Los esfuerzos en un medio son producto de las fuerzas que actúan en alguna parte del mismo. El concepto de esfuerzo proporciona una forma conveniente para describir la manera en la cual las fuerzas que actúan sobre las fronteras del medio se trasmiten a través de él. Puesto que la fuerza y el área son ambas cantidades vectoriales, es de esperarse que el campo de esfuerzos no sea un

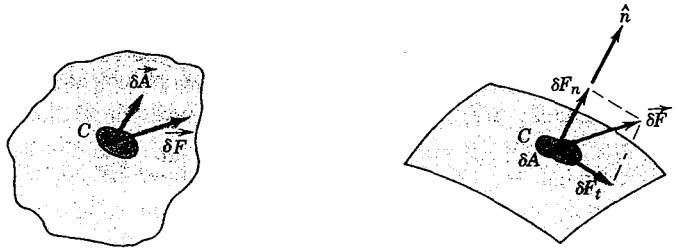


Fig. 2.5 El concepto de esfuerzo en un medio continuo.

campo vectorial. Mostraremos que, en general, se requieren nueve cantidades para especificar el estado de esfuerzos en un fluido. (El esfuerzo es una cantidad tensorial de segundo orden.)

En un fluido que fluye, considere una porción, $\delta\vec{A}$, de la superficie pasando por el punto C. La orientación de $\delta\vec{A}$ está dada por el vector unitario, $\hat{n}$, mostrado en la figura 2.5. La dirección de $\hat{n}$ es normal a la superficie.

La fuerza, $\delta\vec{F}$, actuando sobre $\delta\vec{A}$ puede descomponerse en dos componentes, una normal y la otra tangencial al área. Un esfuerzo normal σ_n y un esfuerzo de corte τ_n se definen entonces como

$$\sigma_n = \lim_{\delta A_n \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A_n} \tag{2.6}$$

y

$$\tau_n = \lim_{\delta A_n \to 0} \frac{\delta F_t}{\delta A_n} \tag{2.7}$$

El subíndice n en el esfuerzo se incluye para recordar que los esfuerzos se asocian con la superficie $\delta\vec{A}$ a través de C, teniendo una normal exterior en la dirección $\hat{n}$. Para cualquier otra superficie a través de C los valores de los esfuerzos podrían ser diferentes.

Al tratar con cantidades vectoriales tales como la fuerza, se acostumbra considerar las componentes en un sistema ortogonal de coordenadas. En coordenadas rectangulares, podríamos considerar los esfuerzos actuando sobre planos cuyas normales trazadas hacia afuera se encuentran en las direcciones x, y o z. En la figura 2.6 consideramos el esfuerzo sobre el elemento δA_x, cuya normal trazada hacia afuera se encuentra en la dirección x. La fuerza, $\delta\vec{F}$, se ha descompuesto en

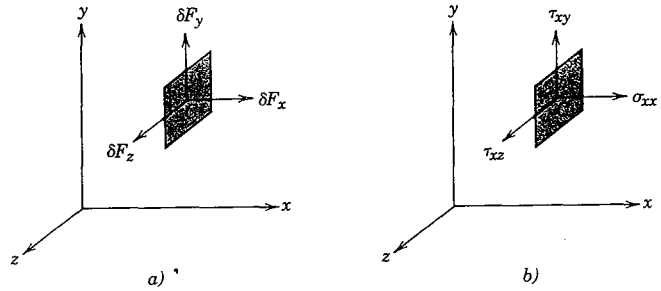


Fig. 2.6 *a*) Componentes de fuerza y *b*) componentes de esfuerzo, sobre el elemento de área δA_x.

componentes a lo largo de cada una de las direcciones de las coordenadas. Dividiendo la magnitud de cada una de las componentes de fuerza entre el área, δA_x, y tomando el límite cuando δA_x se aproxima a cero, definimos las tres componentes de esfuerzo mostradas en la figura 2.6*b*:

$$\sigma_{xx} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_x} \tag{2.8}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_y}{\delta A_x} \qquad \tau_{xz} = \lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta F_z}{\delta A_x}$$

Hemos utilizado una notación de doble subíndice para marcar los esfuerzos. El primer subíndice (en este caso, x) indica el plano sobre el cual actúa el esfuerzo (en este caso, una superficie perpendicular al eje x) mientras que el segundo subíndice, indica la dirección en la cual actúa el esfuerzo.

La consideración del elemento de área δA_y llevaría a las definiciones de los esfuerzos σ_{yy}, τ_{yx} y τ_{yz}. Similarmente, el uso del elemento de área δA_z conduciría a las definiciones de σ_{zz}, τ_{zx}, τ_{zy}.

Un número infinito de planos puede hacerse pasar a través del punto C, originando un número infinito de esfuerzos asociados con ese punto. Por fortuna, el estado de esfuerzos en un punto puede describirse completamente mediante la especificación de los esfuerzos que actúan sobre tres planos mutuamente perpendiculares y que pasan por el punto. El esfuerzo en un punto se especifica mediante las nueve componentes

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

donde σ ha sido empleada para denotar un esfuerzo normal mientras que los esfuerzos de corte se denotan mediante τ. La notación para designar esfuerzo se muestra en la figura 2.7.

Al referirnos al elemento infinitesimal indicado en la figura 2.7, podemos observar que ahí hay seis planos (dos planos x, dos planos y y dos planos z) sobre los cuales pueden actuar los esfuerzos. Para designar el plano de interés, podríamos utilizar términos como frente y posterior,

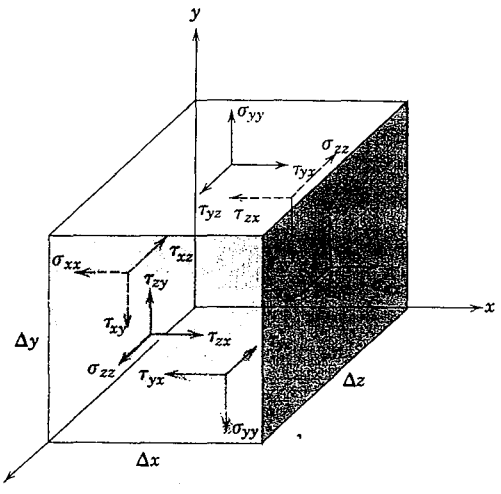


Fig. 2.7 Notación para esfuerzos.

superior e inferior o izquierdo y derecho. Sin embargo, resulta más lógico nombrar los planos en términos de los ejes de coordenadas. Los planos se nombran y denotan como positivo o negativo de acuerdo con la dirección de la normal trazada hacia afuera del plano. De tal modo, el plano superior, por ejemplo, es un plano y positivo y el posterior, es un plano z negativo.

También es necesario adoptar una convención de signos para el esfuerzo. Una componente de esfuerzo es positiva cuando su dirección y la del plano sobre el cual actúa son ambas positivas o negativas. Así $\tau_{yx} = 5$ lbf/pulg^2 representa un esfuerzo de corte ya sea sobre un plano y positivo en la dirección x positiva o bien, sobre un plano y negativo en la dirección x negativa. En la figura 2.7 todos los esfuerzos han sido dibujados como positivos. Las componentes de esfuerzo son negativas cuando su dirección y la del plano sobre el cual actúan son de signo opuesto.

2-4 VISCOSIDAD

Hemos definido un fluido como una sustancia que se deforma continuamente bajo la acción de un esfuerzo de corte, por tanto, en ausencia de éste, no habrá deformación. Los fluidos pueden clasificarse de manera general de acuerdo con la relación entre el esfuerzo de corte aplicado y la relación de deformación.

Considere el comportamiento de un elemento de fluido entre las dos placas infinitas mostradas en la figura 2.8. La placa superior se mueve a una velocidad constante, δu, bajo la influencia de una fuerza aplicada constante, δF_x. El esfuerzo de corte, τ_{yx}, aplicado al elemento de fluido está dado por

$$\tau_{yx} = \lim_{\delta A_y \to 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_y} = \frac{dF_x}{dA_y}$$

donde δA_y es el área del elemento de fluido en contacto con la placa. Durante el intervalo de tiempo δt, el elemento de fluido se deforma de la posición $MNOP$ a la posición $M'NOP'$. La relación de deformación del fluido está dada por

$$\textit{relación de deformación} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Para calcular el esfuerzo de corte, τ_{yx}, es deseable expresar $d\alpha/dt$ en términos de cantidades

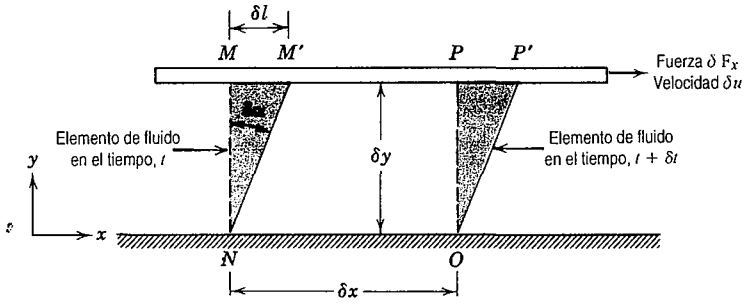


Fig. 2.8 Deformación de un elemento de fluido.

medibles fácilmente. Esto puede hacerse sin dificultades. La distancia, δl, entre los puntos M y M' es

$$\delta l = \delta u \, \delta t$$

o de manera alternativa, para ángulos pequeños,

$$\delta l = \delta y \, \delta \alpha$$

Igualando estas dos expresiones para δl, se obtiene

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{\delta u}{\delta y}$$

Tomando el límite de ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$$

Por tanto, el elemento de fluido de la figura 2.8, cuando se somete a un esfuerzo de corte, τ_{yx}, experimenta una relación de deformación (*relación de corte*) dada por du/dy. Los fluidos en los que el esfuerzo de corte es directamente proporcional a la tasa de deformación son *fluidos newtonianos*. El término *no newtoniano* se utiliza para clasificar todos los fluidos en los cuales el esfuerzo de corte no es directamente proporcional a la relación de corte.

2-4.1 Fluido newtoniano

Los fluidos más comunes tales como el agua, el aire y la gasolina son newtonianos en condiciones normales. Si el fluido de la figura 2.8 es newtoniano, entonces

$$\tau_{yx} \propto \frac{du}{dy} \tag{2.9}$$

Si consideramos la deformación de dos fluidos newtonianos diferentes, digamos glicerina y agua, podemos darnos cuenta de que se deformarán a diferentes proporciones ante la acción del mismo esfuerzo de corte aplicado. La glicerina presenta una resistencia mucho mayor a la deformación que el agua y por ello decimos que es mucho más viscosa. La constante de proporcionalidad en la ecuación 2.9 es la *viscosidad absoluta* (o *dinámica*), μ. Así, en términos de las coordenadas de la figura 2.8, la ley de viscosidad de Newton está dada para un flujo unidimensional por

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.10}$$

Note que en vista de que las dimensiones de τ son $[F/L^2]$ y las dimensiones de du/dy son $[1/t]$, entonces μ tiene dimensiones $[Ft/L^2]$. Puesto que las dimensiones de fuerza, F, masa, M, longitud, L y tiempo, t, se relacionan mediante la segunda ley de movimiento de Newton, las dimensiones

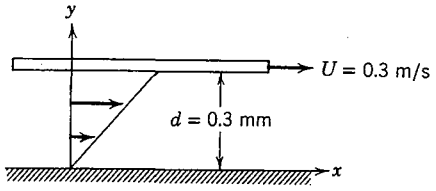
de μ pueden también expresarse como $[M/Lt]$. En el sistema inglés gravitacional, las unidades de viscosidad son lbf · s/pie^2 o slug/pie · s. En el sistema métrico absoluto, la unidad básica de viscosidad se denomina poise (poise ≡ g/cm · s); en el sistema SI las unidades de viscosidad son kg/m · s o Pa · s(=N · s/m^2). El cálculo del esfuerzo de corte viscoso se ilustra en el problema ejemplo 2.2.

En la mecánica de fluidos a menudo surge la relación entre la viscosidad absoluta, μ, y la densidad, ρ. Esta relación recibe el nombre de *viscosidad cinemática* y se representa mediante el símbolo ν. Puesto que la densidad tiene dimensiones $[M/L^3]$, las dimensiones de ν son $[L^2/t]$. En el sistema de unidades métrico absoluto, la unidad para ν es un stoke (stoke ≡ cm^2/s).

Los datos de viscosidad para varios fluidos newtonianos comunes se proporcionan en el Apéndice A. Observe que para los gases, la viscosidad aumenta con la temperatura, mientras que para los líquidos, disminuye con el incremento de temperatura.

EJEMPLO 2.2 Viscosidad y esfuerzo de corte en un fluido newtoniano

Una placa infinita se mueve por encima de una segunda placa sobre una capa de líquido como se indica en la figura. Para un pequeño ancho de separación, d, suponemos una distribución de velocidad lineal en el líquido. La viscosidad del líquido es 0.65 centipoise y su densidad relativa, 0.88. Calcule:



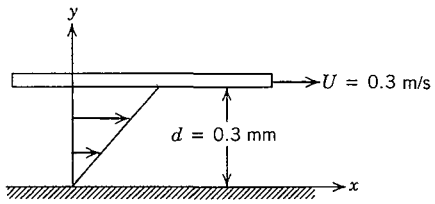
a) La viscosidad absoluta del líquido, en lbf · s/pie^2.
b) La viscosidad cinemática del líquido, en m^2/s.
c) El esfuerzo de corte sobre la placa superior, en lbf/pie^2.
d) El esfuerzo de corte sobre la placa inferior, en Pa.
e) Indique la dirección de cada esfuerzo de corte calculado en los incisos *c*) y *d*).

PROBLEMA EJEMPLO 2.2

DATOS: Perfil de velocidad lineal en el líquido entre placas paralelas infinitas como se indica

$\mu = 0.65$ cp

DR $= 0.88$



ENCUENTRE: *a*) μ en unidades de lbf · s/pie^2.
b) ν en unidades de m^2/s.
c) τ en la placa superior en unidades de lbf/pie^2.
d) τ en la placa inferior en unidades de Pa.
e) Dirección de los esfuerzos en los incisos *c*) y *d*).

SOLUCIÓN:

Ecuación básica $\tau_{xy} = \mu \dfrac{du}{dy}$ Definición: $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$

Suposiciones: 1) Distribución de velocidad lineal
2) Flujo estacionario
3) μ = constante

a) $$\mu = 0.65 \text{ cp} \times \frac{\text{poise}}{100 \text{ cp}} \times \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot \text{poise}} \times \frac{\text{lbm}}{453.6 \text{ g}} \times \frac{\text{slug}}{32.2 \text{ lbm}}$$

$$\times 30.48 \frac{\text{cm}}{\text{pie}} \times \frac{\text{lbp} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$\mu = 1.36 \times 10^{-5}$ lbf • s/pie^2 μ

b) $$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{\text{SG}\rho_{\text{H}_2\text{O}}}$$

$$= 1.36 \times 10^{-5} \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{pie}^3}{(0.88)1.94 \text{ slug}} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{pie}}{\text{lbp} \cdot \text{s}^2} \times (0.3048)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{pie}^2}$$

$\nu = 7.40 \times 10^{-7}$ m^2/s ν

c) $$\tau_{\text{superior}} = \tau_{yx,\text{superior}} = \mu \left.\frac{du}{dy}\right)_{y=d}$$

Puesto que u varía linealmente con y,

$$\frac{du}{dy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{U - 0}{d - 0} = \frac{U}{d} = 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0.3 \text{ mm}} \times 1000 \frac{\text{mm}}{\text{m}} = 1000 \text{ s}^{-1}$$

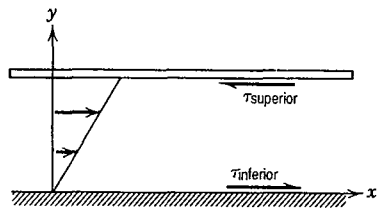
$$\tau_{\text{superior}} = \mu \frac{U}{d} = 1.36 \times 10^{-5} \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}}{\text{pie}^2} \times \frac{1000}{\text{s}} = 0.0136 \text{ lbf/pie}^2$$

τ_{superior}

d) $$\tau_{\text{inferior}} = \mu \frac{U}{d} = 0.0136 \frac{\text{lbf}}{\text{pie}^2} \times 4.448 \frac{\text{N}}{\text{lbf}} \times \frac{\text{pie}^2}{(0.3048)^2 \text{ m}^2} \times \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^2}{\text{N}} = 0.651 \text{ Pa}$$

τ_{inferior}

e) Dirección del esfuerzo de corte sobre las placas inferior y superior.



La placa superior es una superficie y negativa, de modo que τ_{yx} positivo actúa en la dirección x negativa.

La placa inferior es una superficie y positiva, de modo que τ_{yx} positivo actúa en la dirección x positiva.

e)

2-4.2 F

2-4.2 Fluidos no newtonianos

Los fluidos en los cuales el esfuerzo de corte no es directamente proporcional a la relación de deformación son no newtonianos. Muchos fluidos comunes presentan un comportamiento no newtoniano. Dos ejemplos familiares son la pasta de dientes y la pintura de lucite.[6] La última es muy "espesa" dentro de la lata, pero se "adelgaza" cuando se aplica con la brocha. La pasta de dientes se comporta como un "fluido" cuando se expulsa del tubo, sin embargo, no corre por sí sola cuando se quita la tapa. Hay un esfuerzo umbral o de deformación, por debajo del cual la pasta de dientes se comporta como un sólido. Estrictamente hablando, nuestra definición de un fluido es válida sólo para materiales que tienen esfuerzo de deformación cero. Por lo común, los fluidos no newtonianos se clasifican con respecto a su comportamiento en el tiempo, es decir, pueden ser independientes del tiempo o dependientes del mismo. Ejemplos del primer caso se muestran en el diagrama reológico de la figura 2.9.

Un gran número de ecuaciones empíricas se ha propuesto para modelar las relaciones observadas entre τ_{yx} y du/dy para fluidos independientes del tiempo. Pueden representarse de manera adecuada para muchas aplicaciones de la ingeniería mediante el modelo de la ley de potencia, el cual se convierte para un flujo unidimensional en

$$\tau_{yx} = k\left(\frac{du}{dy}\right)^n \tag{2.11}$$

donde el exponente, n, se llama el índice de comportamiento del flujo y k, el índice de consistencia. Esta ecuación se reduce a la ley de viscosidad de Newton para $n = 1$ con $k = \mu$.

Si la ecuación 2.11 se reescribe en la forma

$$\tau_{yx} = k\left|\frac{du}{dy}\right|^{n-1}\frac{du}{dy} = \eta\frac{du}{dy} \tag{2.12}$$

entonces $\eta = k|du/dy|^{n-1}$ se denomina *viscosidad aparente*. La mayor parte de los fluidos no newtonianos tienen viscosidades aparentes que son relativamente altas comparadas con la viscosidad del agua.

Los fluidos en los cuales la viscosidad aparente disminuye con el aumento de la relación de deformación ($n < 1$) se llaman *seudoplásticos*. Casi todos los fluidos no newtonianos entran en este grupo; los ejemplos incluyen soluciones poliméricas, suspensiones coloidales y pulpa de papel en agua. Si la viscosidad aparente aumenta con el incremento de la relación de deformación ($n > 1$) el fluido se nombra *dilatante*. Las suspensiones de almidón y de arena son ejemplos de fluidos dilatantes.

Un "fluido" que se comporta como un sólido hasta que se excede un esfuerzo de deformación mínimo, τ_y, y exhibe subsecuentemente una relación lineal entre el esfuerzo y la relación de deformación, se conoce como *plástico de Bingham* o ideal. El modelo de esfuerzo de corte apropiado es

$$\tau_{yx} = \tau_y + \mu_p\frac{du}{dy} \tag{2.13}$$

Las suspensiones de arcilla, los lodos de perforación y la pasta de dientes son ejemplos de sustancias que presentan este comportamiento.

[6] Marca registrada, E. I. du Pont de Nemours & Company.

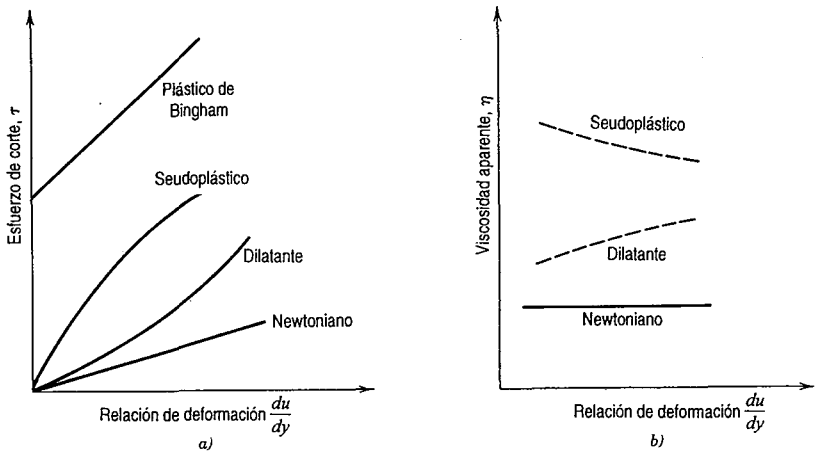


Fig. 2.9 *a*) Esfuerzo de corte, τ, y *b*) viscosidad aparente, η, como función de la relación de deformación en un flujo unidimensional de diversos fluidos no newtonianos.

El estudio de fluidos no newtonianos es aún más complicado por el hecho de que la viscosidad aparente puede depender del tiempo. Los fluidos *tixotrópicos* muestran una reducción de η con el tiempo ante la aplicación de un esfuerzo de corte constante; muchas pinturas son tixotrópicas. Los fluidos *reopécticos* muestran un aumento en η con el tiempo. Después de la deformación, algunos regresan parcialmente a su forma original cuando se libera el esfuerzo aplicado. A tales fluidos se les llama *viscoelásticos*.[7]

2-5 DESCRIPCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS DE FLUIDOS

En el capítulo 1 listamos una amplia variedad de problemas típicos encontrados en mecánica de fluidos y esbozamos nuestro método de enfoque para el tema. Antes de proceder con nuestro estudio detallado, intentaremos una clasificación amplia de la mecánica de fluidos con base en las características físicas observables de los campos de flujo. Puesto que hay un gran traslape en los tipos de campos de flujo encontrados, no hay un esquema de clasificación aceptado universalmente. Una clasificación posible se muestra en la figura 2.10.

2-5.1 Flujos viscosos y no viscosos

La principal subdivisión indicada se da entre los flujos no viscosos y viscosos. Los flujos en donde los efectos de la viscosidad se desprecian se denominan *no viscosos*. En un flujo no viscoso, la viscosidad del fluido, μ, se supone igual a cero. Los fluidos con viscosidad cero no existen; sin embargo, hay muchos problemas donde el desprecio de las fuerzas viscosas simplificará el análisis y, al mismo tiempo, conducirá a resultados significativos. (Siempre es conveniente la simplificación del análisis, pero los resultados deben ser razonablemente precisos si la solución va a tener algún valor.)

[7] Ejemplos de fluidos dependientes del tiempo y viscoelásticos se ilustran en la película de NCFMF, *Rheological Behavior of Fluids*, H. Markowitz, director.

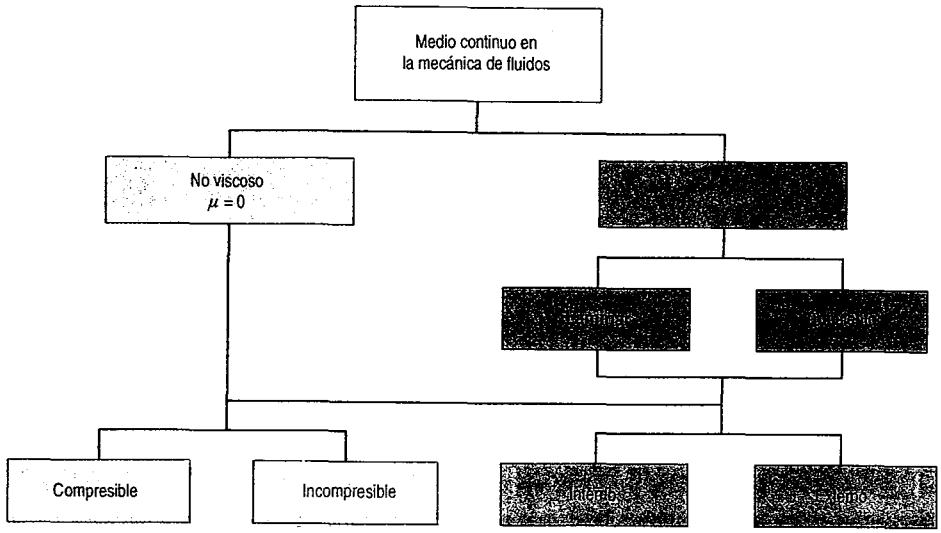


Fig. 2.10 Clasificación de medios continuos en la mecánica de fluidos.

Todos los fluidos poseen viscosidad y, en consecuencia, los flujos viscosos son de capital importancia en el estudio de la mecánica de fluidos de medios continuos. Después estudiaremos en detalle los flujos viscosos; mientras tanto, consideraremos unos cuantos ejemplos de fenómenos de flujo viscoso.

En nuestra discusión que siguió a la definición de un fluido (sección 1-2), señalamos que en cualquier flujo viscoso, el fluido en contacto directo con una frontera sólida tiene la misma velocidad que la de la propia frontera; no hay deslizamiento en ella. Para el flujo viscoso unidimensional de la figura 2.8, el esfuerzo de corte[8] fue dado por la ecuación 2.10,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.10}$$

La velocidad del fluido en una superficie sólida estacionaria en un fluido en movimiento, es cero. Puesto que la mayor parte del fluido se encuentra en movimiento, los gradientes de velocidad y por consiguiente, los esfuerzos de corte, deben estar presentes en el flujo. Estos esfuerzos, a su vez, afectan el movimiento del fluido.

Como un caso práctico, considere el movimiento de fluido alrededor de una ala delgada o de un casco de barco. Tal flujo podría representarse mediante una burda aproximación de flujo sobre una placa plana, como se muestra en la figura 2.11. El flujo que se acerca a la placa es de velocidad uniforme, U_∞. Lo que nos interesa es brindar una imagen cualitativa de la distribución de velocidad en diversas posiciones a lo largo de la placa. Dos de las mismas se denotan mediante x_1 y x_2. Considere la primera posición, x_1. Para llegar a una imagen cualitativa de la distribución de velocidad, empezamos marcando las coordenadas y en las cuales se conoce la velocidad. (Por claridad, las distancias en la dirección y se han exagerado de manera considerable en la figura 2.11.)

De acuerdo con la condición de no deslizamiento, sabemos que la velocidad en el punto A debe ser cero; tenemos un punto en el perfil de velocidad. ¿Podemos localizar cualesquiera otros puntos en el perfil? Detengámonos por un minuto y preguntémonos a nosotros mismos, "¿cuál es

[8] En general, $\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ para flujos que no son unidimensionales; véase el capítulo 5.

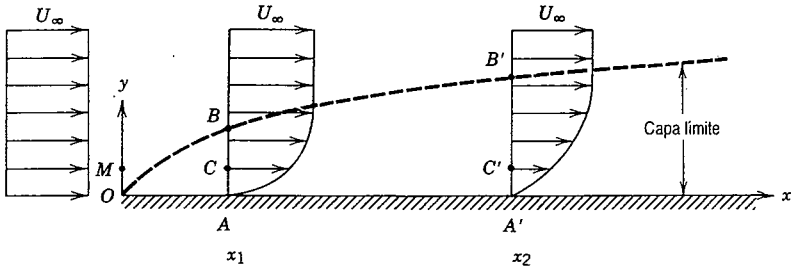


Fig. 2.11 Flujo viscoso laminar incompresible sobre una placa plana semiinfinita.

el efecto de la placa sobre el flujo?" La placa es estacionaria y, por tanto, ejerce una fuerza retardadora sobre el flujo, que retrasa al fluido en la vecindad de la superficie. En una posición y suficientemente lejana de la placa, por ejemplo el punto B, el flujo no será afectado por la presencia de la placa. Si la presión no varía en la dirección x (como en el caso para flujo sobre una placa plana semiinfinita), la velocidad en el punto B será U_∞. Parece razonable esperar que la velocidad aumente continua y monótonamente desde el valor $u = 0$ en $y = 0$ hasta $u = U_\infty$ en $y = y_B$. El perfil ha sido dibujado de este modo; así que en algún punto, C, intermedio entre los puntos A y B, la velocidad se encuentra entre cero y U_∞. Para $0 \leq y \leq y_B$, entonces $0 \leq u \leq U_\infty$. De estas características del perfil de velocidad y de nuestra definición del esfuerzo de corte,[9] observamos que los esfuerzos de corte están presentes dentro de la región $0 \leq y \leq y_B$; para $y > y_B$, el gradiente de velocidad es cero y por tanto, no se presentan esfuerzos de corte.

¿Qué sucede con el perfil de velocidad en la posición x_2? ¿Es exactamente igual que el perfil en x_1? Una mirada a la figura 2.11 indica que no es así. ¡Al menos no ha sido dibujado de esa manera! Aun cuando es cualitativamente el mismo, ¿por qué no es exactamente el mismo? Podríamos suponer que la placa debiera afectar a una región mayor del campo de flujo en la medida en que nos vamos moviendo hacia abajo de la placa. Observando otra vez el perfil en la posición x_1, vemos que el fluido de movimiento más lento adyacente a la placa ejerce una fuerza retardadora sobre el fluido de movimiento más rápido sobre ella. Podemos ver esto considerando el esfuerzo de corte sobre el plano y a través del punto C. Puesto que estamos interesados en el esfuerzo ejercido sobre el fluido de movimiento más rápido sobre el plano, buscamos la dirección del esfuerzo de corte sobre un plano y negativo a través del punto C. Puesto que $\partial u/\partial y > 0$, τ_{yx} sobre el plano a través del punto C tiene un valor numérico positivo; en consecuencia, el esfuerzo de corte debe encontrarse en la dirección x negativa.

Para establecer la imagen cualitativa del perfil de velocidad en x_2, reconocemos que la condición de no deslizamiento requiere que la velocidad sea cero en la pared; esto fija la velocidad en A' como cero. Puesto que en la posición x_1, el fluido de movimiento más lento ejerce una fuerza retardadora sobre el fluido que se encuentra encima de él, esperaríamos que la distancia hacia el punto donde la velocidad es U_∞ se incremente en la posición, x_2; esto es, $y_{B'} > y_B$. Además, es razonable esperar que $u_{C'} > u_C$.

De nuestra imagen cualitativa del campo de flujo, vemos que podemos dividir el flujo en dos regiones generales. En la adyacente a la frontera, se presentan esfuerzos de corte; esta región recibe el nombre de capa límite.[10] Fuera de ésta, el gradiente de velocidad es cero y por tanto, los esfuerzos

[9] Para el flujo de capa límite bidimensional de la figura 2.11, el esfuerzo de corte está dado de manera bastante aproximada por $\tau_{yx} = \mu \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

[10] La formación de una capa límite se ilustra en la película de NCFMF, *Fundamentals of Boundary Layers*, F. H. Abernathy, director.

de corte son cero. En esta región es posible utilizar la teoría de flujo no viscoso para analizar al flujo.

Antes de dejar nuestra discusión del flujo viscoso sobre una placa plana semiinfinita, debemos detenernos y reflexionar en torno a dos puntos. En nuestra descripción cualitativa del campo de flujo, sólo nos interesaba el comportamiento de la componente x de la velocidad, es decir, la componente u. ¿Qué ocurre con la componente y de la velocidad, la componente v? ¿Es cero en todo el campo de flujo? También podríamos preguntarnos si el borde de la capa límite es una línea de corriente.

Para responder estas preguntas, considere las líneas de corriente del flujo. En lugar de tomar en cuenta todas las posibles líneas de corriente, consideremos la que pasa por el punto M. Recordando que una línea de corriente se define como la tangente al vector de velocidad en cualquier punto en el flujo, nuestra primera inclinación podría ser describir la línea de corriente a través de M como una recta paralela al eje x. Sin embargo, esto violaría el requerimiento de que no puede haber flujo a través de una línea de corriente. Por esto mismo, el flujo de masa entre líneas de corriente adyacentes (o entre una línea de corriente y una frontera sólida) debe ser constante. Para el flujo viscoso incompresible de la figura 2.11, admitimos que la línea de corriente que pasa por el punto M no puede ser una línea recta paralela al eje x. Para mantener un flujo de masa constante entre la línea de corriente que pasa por el punto M y el eje x, el espacio entre ambos debe aumentar continuamente conforme nos movemos a lo largo de la placa. Por tanto, aunque pequeña, la componente de velocidad y no es cero.

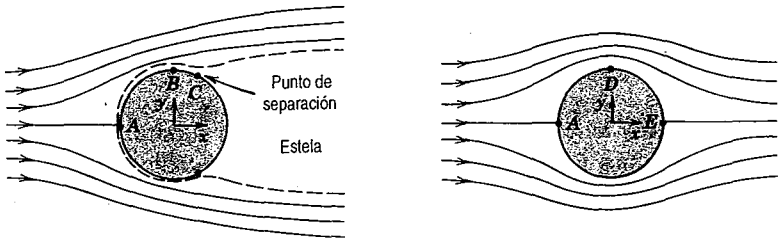
La línea de corriente que pasa por M cruza la línea punteada que hemos utilizado para denotar el espesor de la capa límite. En consecuencia, concluimos que el espesor de la capa límite no es una línea de corriente y que hay flujo hacia dicha capa a medida que nos movemos hacia abajo de la placa. Desde luego, si la capa límite va a crecer, debe haber flujo a través del espesor de la misma.

Para una velocidad de corriente libre dada, U_∞, el tamaño de la capa límite dependerá de las propiedades del fluido. Puesto que el esfuerzo de corte es directamente proporcional a la viscosidad, esperamos que el espesor de la capa límite dependa de la viscosidad del fluido. En el capítulo 9, desarrollaremos expresiones para determinar la relación de crecimiento de la capa límite.

Hemos empleado flujo incompresible sobre una placa plana semiinfinita para establecer una imagen cualitativa del flujo viscoso sobre una frontera sólida. En ese ejemplo, sólo tuvimos que considerar el efecto de las fuerzas de corte; la presión fue constante en todo el campo de flujo. Ahora consideremos un campo de flujo estacionario (el flujo incompresible sobre un cilindro) donde son importantes tanto las fuerzas de presión como las viscosas. En un flujo estacionario, las líneas de trayectoria, las líneas de traza y las líneas de corriente no son todas idénticas. Si tuviéramos que emplear algunos medios para la visualización del flujo, encontraríamos al campo de flujo como el de carácter general que se muestra en la figura 2.12*a*.[11]

Vemos que las líneas de corriente son simétricas alrededor del eje x. El fluido a lo largo de la línea de corriente central choca sobre el cilindro en el punto A, se divide y fluye alrededor del cilindro. El punto A sobre el cilindro se denomina *punto de estancamiento*. Al igual que en un flujo sobre una placa plana, se genera una capa límite en la vecindad de la superficie sólida. La distribución de velocidad fuera de la capa límite puede determinarse cualitativamente a partir del espaciamiento de las líneas de corriente. En vista de que no puede haber flujo a través de una línea de corriente, esperaríamos que la velocidad de flujo aumentara en regiones donde disminuye el

[11] Los detalles del flujo dependerán de varias de sus propiedades. Para todos, excepto los flujos de muy baja velocidad, la imagen cualitativa será como se muestra.



a) Flujo viscoso *b*) Flujo no viscoso

Fig. 2.12 Imagen cualitativa de un flujo incompresible sobre un cilindro.

espaciamiento entre las líneas de corriente. Inversamente, un aumento en el espaciamiento entre las líneas de corriente implica una reducción en la velocidad de flujo.

Considere por un momento el campo de flujo incompresible en torno a un cilindro. El campo es calculado suponiendo la presencia de un flujo no viscoso, como se indica en la figura 2.12*b*; este flujo es simétrico alrededor tanto del eje x como del y. La velocidad en torno al cilindro aumenta a un máximo en el punto D y luego disminuye conforme nos alejamos del cilindro. Para flujo no viscoso, un aumento en la velocidad se acompaña de una reducción en la presión; inversamente, una disminución en la velocidad se acompaña de un aumento en la presión. De modo que en el caso de un flujo viscoso incompresible, la presión a lo largo de la superficie del cilindro disminuye a medida que nos movemos del punto A al punto D y después aumenta, otra vez, del punto D al punto E. Puesto que el flujo es simétrico con respecto a los ejes x y y, también esperaríamos que la distribución de presión fuera simétrica con respecto a estos ejes. Éste es, desde luego, el caso para un flujo no viscoso.

Puesto que los esfuerzos de corte no están presentes en un flujo no viscoso, las fuerzas de presión son las únicas que necesitamos considerar para determinar la fuerza neta sobre el cilindro. La simetría de la distribución de presión lleva a la conclusión de que para un flujo no viscoso, no hay fuerza neta sobre el cilindro en cualesquiera de las direcciones x o y. La fuerza neta en la dirección x se denomina el *arrastre*. De modo que para un flujo no viscoso sobre un cilindro, concluimos que el arrastre es cero; esta conclusión es contraria a la experiencia, ya que sabemos que todos los cuerpos experimentan algún arrastre cuando se sitúan en un flujo real. Al tratar el flujo no viscoso sobre un cuerpo, por la definición de flujo no viscoso, hemos despreciado la presencia de la capa límite. Regresemos y observemos de nuevo la situación de flujo real.

En el flujo real, figura 2.12*a*, los experimentos muestran que la capa límite será delgada entre los puntos A y C. Puesto que la capa límite es delgada, es razonable suponer que el campo de presión es cualitativamente el mismo que en el caso del flujo no viscoso. Como la presión disminuye de manera continua entre los puntos A y B, un elemento de fluido dentro de la capa límite experimenta una fuerza de presión neta en la dirección de flujo. En la región entre A y B, esta fuerza de presión neta es suficiente para superar la fuerza de corte de resistencia y el movimiento del elemento en la dirección de flujo se mantiene.

Consideremos a continuación un elemento de fluido dentro de la capa límite localizada sobre la parte posterior del cilindro, más allá del punto B. En vista de que la presión aumenta en la dirección del flujo, el elemento de fluido experimenta una fuerza de presión neta opuesta a su dirección de movimiento. En algún punto, el momento del fluido en la capa límite es insuficiente como para llevar al elemento aún más adentro de la región de presión creciente. Las capas de fluido adyacentes a la superficie sólida se llevan al reposo y el flujo *se separa* de la superficie.[12] La

2-5.2 Fl

[12] El flujo sobre una diversidad de modelos, que ilustra la separación de flujo, se presenta en la película de la Universidad de Iowa, *Form Drag, Lift, and Propulsion*, H. Rouse, director.

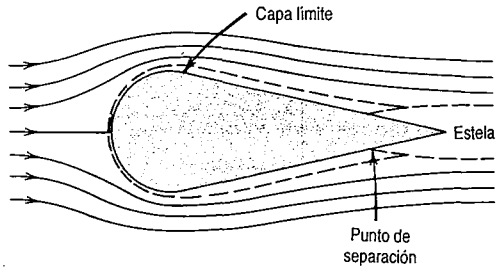


Fig. 2.13 Flujo sobre un objeto aerodinámico.

separación de la capa límite da origen a la formación de una región de relativamente baja presión detrás de un cuerpo; esta región, que es deficiente en momento, recibe el nombre de *estela*. Por consiguiente, para flujo separado sobre un cuerpo, hay un desbalance neto de fuerzas de presión en la dirección de flujo, lo que produce una fuerza de arrastre sobre el cuerpo. Cuanto mayor es el tamaño de la estela detrás de un cuerpo, tanto mayor resulta la fuerza de arrastre.

Es lógico preguntar cómo podría reducirse el tamaño de la estela y así, disminuir la fuerza de arrastre. Puesto que una estela grande es producto de una separación de capa límite, la cual a su vez se relaciona con la presencia de un gradiente de presión adverso (aumento de la presión en la dirección de flujo), la reducción del gradiente de presión adverso debe retrasar el principio de la separación y, por tanto, reducir la fuerza de arrastre.

Mediante una *forma aerodinámica*, un cuerpo reduce el gradiente de presión adverso dispersando un aumento de presión determinado a una gran distancia. Por ejemplo, si una sección posterior gradualmente afilada se añadiera al cilindro de la figura 2.12, el campo de flujo aparecería cualitativamente como se muestra en la figura 2.13. La forma aerodinámica en el cuerpo retarda el principio de la separación; aunque el área superficial incrementada del cuerpo ocasiona el aumento de la fuerza de corte total que actúa sobre el mismo, el arrastre se reduce de manera significativa.[13]

La separación del flujo también puede ocurrir en flujos internos (flujos a través de ductos) como consecuencia de cambios rápidos o abruptos en la geometría del ducto.

2-5.2 Flujos laminar y turbulento

Los regímenes de flujo viscoso se clasifican en laminar o turbulento con base en la estructura del flujo. En el régimen laminar, la estructura de flujo se caracteriza por un movimiento continuo en láminas, o capas. En cambio, la estructura de flujo en el régimen turbulento se caracteriza por movimientos tridimensionales, al azar, de partículas de fluido que se suman al movimiento promedio.

En el flujo laminar no hay mezcla macroscópica de capas de fluido adyacentes. Un delgado filamento de tinta inyectado en un flujo laminar aparece como una sola línea; no hay dispersión de la tinta por todo el flujo, excepto la dispersión lenta debida al movimiento molecular. Por otra parte, un filamento de tinta inyectado en un flujo turbulento se dispersa con rapidez por todo el campo de flujo, esto es, la línea de tinta se descompone en innumerables hilos enmarañados. Este

[13] El efecto de hacer aerodinámico un cuerpo se presenta en la película de NCFMF, *Fluid Dynamics of Drag*, A. H. Shapiro, director.

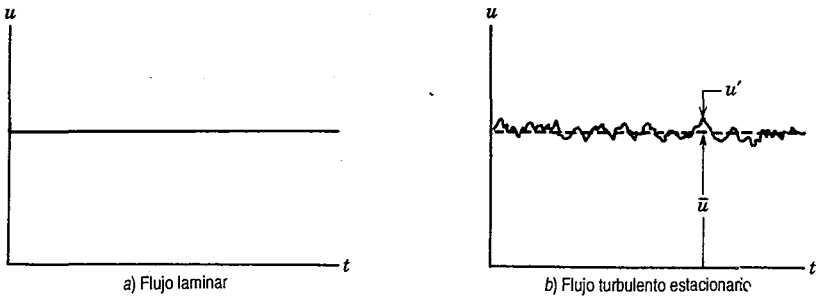


Fig. 2.14 Variación de la velocidad axial con el tiempo.

comportamiento de flujo turbulento se debe a las fluctuaciones de velocidad presentes; la mezcla macroscópica de partículas de fluido de capas adyacentes del mismo da como resultado la rápida dispersión de la tinta. El delgado filamento del humo que se eleva de un cigarrillo en un lugar sin corrientes brinda una clara imagen de flujo laminar. A medida que el humo va ascendiendo, se descompone en movimientos aleatorios y caprichosos; éste es un ejemplo de flujo turbulento.[14]

Es posible obtener una imagen más cuantitativa de la diferencia entre los flujos laminar y turbulento al examinar la salida desde un dispositivo sensible de medición de velocidad inmerso en el flujo. Si se mide la componente x de velocidad en una posición fija en un tubo, tanto para flujo estacionario laminar como para turbulento, los trazos de velocidad contra tiempo aparecerán como se muestra en la figura 2.14. En flujo laminar estacionario, la velocidad en un punto permanece constante con el tiempo. En flujo turbulento, el trazo de la velocidad indica fluctuaciones aleatorias de la velocidad instantánea, u, en torno a la velocidad media en el tiempo, $\bar{u}$. Podemos considerar la velocidad instantánea, u, como la suma de la velocidad media en el tiempo, $\bar{u}$, y la componente fluctuante, u',

$$u = \bar{u} + u'$$

Debido a que el flujo es estacionario, la velocidad media, $\bar{u}$, no varía con el tiempo.

Aunque muchos flujos turbulentos que nos interesan son estacionarios en la media ($\bar{u}$ no es una función del tiempo), la presencia de fluctuaciones de velocidad aleatorias de alta frecuencia hace que el análisis de flujos turbulentos sea en extremo difícil. En un flujo laminar unidimensional, el esfuerzo de corte se relaciona con el gradiente de velocidad mediante la relación simple

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.10}$$

Para un flujo turbulento en el que el campo de velocidad media es unidimensional, una relación tan simple no es válida. Las fluctuaciones de velocidad tridimensionales aleatorias (u', v' y w') transportan momento a través de las líneas de corriente de flujo medio, aumentando el esfuerzo de corte efectivo. Por consiguiente, en un flujo turbulento no hay una relación universal entre el campo de esfuerzos y el campo de velocidad media. De tal modo, en flujos turbulentos debemos confiar ampliamente en teorías semiempíricas y en datos experimentales.

[14] Varios ejemplos que ilustran la naturaleza de flujos laminar y turbulento se presentan en la película de NCFMF, *Turbulence*, R. W. Stewart, director, y en la película de la Universidad de Iowa, *Characteristics of Laminar and Turbulent Flow*, H. Rouse, director.

2-5.3 Flujos compresible e incompresible

Los flujos en los cuales las variaciones en la densidad son despreciables se denominan *incompresibles*; cuando las variaciones de densidad dentro de un flujo no son despreciables, el flujo se llama *compresible*. Los ejemplos más comunes de flujo compresible conciernen al flujo de gases, en tanto que el flujo de líquidos puede tratarse con frecuencia como incompresible. Sin embargo, el golpe de ariete y la cavitación[15] son ejemplos de la importancia de los efectos de compresibilidad en flujos líquidos. Los flujos de gas con transferencia de calor despreciable también pueden considerarse incompresibles, siempre que las velocidades de flujo sean pequeñas en relación con la velocidad del sonido; la relación de la velocidad de flujo, V, con la velocidad local del sonido, c, en el gas, se define como el número de Mach,

$$M \equiv \frac{V}{c}$$

Para $M < 0.3$, la variación de densidad máxima es menor que 5 por ciento. De modo que los flujos de gas con $M < 0.3$ pueden tratarse como incompresibles; un valor de $M = 0.3$ en aire en condiciones estándar, corresponde a una velocidad de aproximadamente 100 m/s.

Los flujos compresibles se presentan con frecuencia en las aplicaciones de ingeniería. Ejemplos comunes incluyen sistemas de aire comprimido empleados para accionar herramientas de taller y taladros dentales, trasmisión de gases en tuberías a alta presión y control neumático o hidráulico, así como en los sistemas de sensado. Los efectos de la compresibilidad son muy importantes en el diseño de las modernas aeronaves y misiles de alta velocidad, centrales eléctricas, ventiladores y compresores.

2-5.4 Flujos internos y externos

Los flujos delimitados completamente por superficies sólidas se llaman internos o de ducto. Los flujos sobre cuerpos sumergidos en un fluido sin fronteras reciben el nombre de flujos externos. Tanto los flujos internos como los externos pueden ser laminares o turbulentos, compresibles o incompresibles.

En el caso de flujo incompresible a través de un tubo, la naturaleza del flujo (laminar o turbulento) se determina mediante el valor de un parámetro adimensional, el número de Reynolds, $Re = \rho \overline{V} D/\mu$, donde ρ es la densidad del fluido, $\overline{V}$ es la velocidad promedio de flujo, D es el diámetro del tubo y μ la viscosidad del fluido. El flujo en el tubo es laminar cuando $Re \leq 2300$, y es turbulento para valores mayores. (El número de Reynolds y otros importantes parámetros adimensionales encontrados en la mecánica de fluidos se estudiarán en el capítulo 7.) El capítulo 8 se dedicará a un estudio de flujo incompresible interno.

Los flujos externos ocurren sobre cuerpos sumergidos en un fluido sin fronteras. El flujo sobre una placa plana semiinfinita (figura 2.11) y el flujo sobre un cilindro (figura 2.12) son ejemplos de flujos externos. Los flujos de capa límite pueden ser también laminares o turbulentos; las definiciones de flujos laminar y turbulento dadas anteriormente, se aplican también a los flujos de capa límite; es posible que los detalles de un campo de flujo sean muy diferentes dependiendo de

[15] Ejemplos de cavitación se ilustran en la película de NCFMF, *Cavitation*, P. Eisenberg, director.

la naturaleza de la capa límite, es decir, si es laminar o turbulenta. Para el flujo de la placa plana de la figura 2.11, la naturaleza de la capa límite (laminar o turbulenta) está determinada por el número de Reynolds, $Re_x = \rho U_\infty x/\mu$ donde x es la distancia corriente abajo desde el borde delantero de la placa. El flujo es por lo general laminar para $Re_x \leq 5 \times 10^5$, y es turbulento para valores más grandes. En el capítulo 9, se estudiarán en detalle los flujos de capa límite y el flujo sobre cuerpos sumergidos.

El flujo interno de líquidos en los que el ducto no está lleno —donde hay una superficie libre sometida a una presión constante— se denomina flujo *en canal abierto*. Ejemplos comunes del mismo abarcan los flujos en ríos, canales de irrigación y acueductos. El flujo en canal abierto se tratará en el capítulo 10.

El flujo interno a través de máquinas hidráulicas se considera en el capítulo 11. El principio del momento angular se aplica para desarrollar las ecuaciones fundamentales de las máquinas hidráulicas. Entre éstas, se consideran bombas, ventiladores, sopladores compresores y propulsores que añaden energía a las corrientes de fluido, así como turbinas y molinos de viento que extraen energía. El capítulo presenta una discusión detallada de la operación de sistemas de fluidos.

En el caso de flujos compresibles internos, es necesario el diseño adecuado del ducto para alcanzar flujo supersónico. La variación de las propiedades del fluido dentro de un ducto de flujo de área variable, no son las mismas para el flujo supersónico ($M > 1$) que para el flujo subsónico ($M < 1$). De igual modo, las condiciones de frontera en el flujo a la salida de un flujo interno (esto es la descarga de una tobera) son diferentes en los dos casos. Para la descarga de flujo subsónico, la presión en el plano de salida de la tobera es la presión atmosférica. En el flujo sónico, la presión de salida de la tobera puede ser mayor que la ambiente. En una tobera supersónica, la presión en el plano de salida de la misma puede ser mayor, igual o menor que la presión atmosférica. En los capítulos 12 y 13 se analizará el flujo compresible estacionario unidimensional.

PROBLEM

2-6 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 2, usted debe ser capaz de efectuar lo siguiente:

1. Proporcionar definiciones operacionales de:

medio continuo	fluido seudoplástico
propiedad en un punto	fluido tixotrópico
campo escalar	fluido reopéctico
campo vectorial	plástico de Bingham
flujo estacionario	flujo viscoso
flujo uniforme en una sección	flujo no viscoso
línea en el tiempo	capa límite
línea de trayectoria	punto de estancamiento
línea de traza	arrastre
línea de corriente	separación
fuerza másica	estela
fuerza de superficie	flujo laminar
esfuerzo de corte	flujo turbulento
esfuerzo normal	número de Reynolds

fluido newtoniano	flujo compresible
fluido no newtoniano	flujo incompresible
viscosidad	número de Mach
viscosidad cinemática	flujo interno
viscosidad aparente	flujo externo
fluido dilatante	flujo en canal abierto

2. Brindar ejemplos de flujos unidimensional, bidimensional y tridimensional.
3. Calcular y graficar líneas de corriente, líneas de trayectoria y líneas de traza para campos de velocidad especificados.
4. Establecer la convención para designar las nueve componentes del campo de esfuerzos.
5. Escribir la ley de viscosidad de Newton y determinar el esfuerzo de corte y la fuerza de corte que corresponden a un perfil de velocidad unidimensional determinado.
6. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionan con el material estudiado.

PROBLEMAS

2.1 Para los campos de velocidad que se dan a continuación, determine:

a) si el campo de flujo es uni, bi o tridimensional y por qué.

b) si el flujo es estacionario o no estacionario y por qué.

(Las cantidades a y b son constantes.)

1) $\vec{V} = [ae^{-bx}]\hat{i}$
2) $\vec{V} = ax^2\hat{i} + bx\hat{j}$
3) $\vec{V} = [ax^2e^{-bt}]\hat{i}$
4) $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j}$
5) $\vec{V} = (ax + t)\hat{i} - by^2\hat{j}$
6) $\vec{V} = ax^2\hat{i} + bxz\hat{j}$
7) $\vec{V} = a(x^2 + y^2)^{1/2}(1/z^3)\hat{k}$
8) $\vec{V} = axy\hat{i} - byzt\hat{j}$

2.2 Para los campos de velocidad que se dan a continuación, determine:

a) si el campo de flujo es uni, bi o tridimensional, y por qué.

b) si el flujo es estacionario o no estacionario, y por qué.

(Las cantidades a, b y c son constantes.)

1) $\vec{V} = [ae^{-by}]\hat{i}$
2) $\vec{V} = by^2\hat{j} + cy\hat{k}$
3) $\vec{V} = [ay^2e^{-bt}]\hat{j}$
4) $\vec{V} = by\hat{i} - ax\hat{j}$
5) $\vec{V} = ax\hat{i} + (t - by)\hat{j}$
6) $\vec{V} = ax^2\hat{i} + bxy\hat{k}$
7) $\vec{V} = ax^2\hat{i} + by\hat{j} + cxz\hat{k}$
8) $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j} + (t - cz)\hat{k}$

2.3 Para los campos de velocidad dados a continuación, determine:

a) si el campo de flujo es uni, bi o tridimensional, y por qué.

b) si el flujo es estacionario o no estacionario, y por qué.

(Las cantidades a, b y c son constantes.)

1) $\vec{V} = [ae^{-bz}]\hat{k}$
2) $\vec{V} = az^2\hat{i} + bz\hat{k}$
3) $\vec{V} = ax\hat{i} + bx^2e^{-ct}\hat{j}$
4) $\vec{V} = ax\hat{i} + by\hat{j} + cx^2\hat{k}$
5) $\vec{V} = ax\hat{i} + by^2\hat{j} + cyt\hat{k}$
6) $\vec{V} = ax\hat{i} + bx^2\hat{j} - cx^2\hat{k}$
7) $\vec{V} = ay^2\hat{i} + bx\hat{j} + cxy\hat{k}$
8) $\vec{V} = ax\hat{i} + by^2\hat{j} + czt\hat{k}$

2.4 Hay un líquido viscoso entre dos discos paralelos; el disco superior gira y el inferior está fijo. El campo de velocidad entre los discos está dado por $\vec{V} = \hat{e}_\theta r\omega z/h$. (El origen de coordenadas se localiza en el centro del disco inferior; el disco superior se localiza en $z = h$.) ¿Cuáles son las dimensiones de este

campo de velocidad? ¿Este campo de velocidad satisface las condiciones de frontera física apropiadas? ¿Cuáles son?

2.5 Un campo de velocidad está determinado por la expresión

$$\vec{V} = U\cos\theta\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\hat{e}_r - U\,\text{sen}\,\theta\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\hat{e}_\theta$$

Encuentre todos los puntos en el plano $r\theta$ donde: *a*) $V_r = 0$, *b*) $V_\theta = 0$ y *c*) $V_r = V_\theta = 0$.

2.6 Una línea de corriente es una línea dibujada en el campo de flujo de tal modo que en cada instante es tangente al vector de velocidad en cada punto. Considere un flujo estacionario bidimensional en el plano xy con campo de velocidad dado por $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$. Emplee el producto vectorial cruzado, $\vec{V} \times d\vec{s}$, donde $d\vec{s}$ es un elemento de distancia a lo largo de una línea de corriente, para mostrar que $dx/u = dy/v$ para la línea de corriente.

2.7 El flujo estacionario bidimensional descrito por el campo de velocidad $\vec{V} = ax\hat{i} - ay\hat{j}$ se analizó en el problema ejemplo 2.1, con x y y dadas en metros y $a = 0.1\ \text{s}^{-1}$. Considere otra vez este campo de flujo. Suponga que una línea en el tiempo se marca en el flujo en $t = 0$, conectando puntos a lo largo de la línea y = constante, de $(x, y) = (1, 8)$ a $(3, 8)$. Calcule la posición de la línea en el tiempo en $t =$ 10 s. ¿Qué conclusión general podría usted obtener acerca del movimiento de cualquier línea en el tiempo que al principio es horizontal en este flujo?

2.8 El campo de velocidad $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j}$, donde $a = b = 1\ \text{s}^{-1}$, puede interpretarse para representar flujo en una esquina. Encuentre una ecuación para las líneas de corriente de flujo. Dibuje varias líneas de corriente en el primer cuadrante, incluyendo la que pasa por el punto $(x, y) = (0, 0)$.

2.9 El campo de velocidad $\vec{V} = -ax\hat{i} + by\hat{j}$ puede interpretarse para representar flujo en una esquina. Obtenga una ecuación para las líneas de corriente de flujo. Dibuje varias líneas de corriente en el primer cuadrante para $a = b = 2\ \text{s}^{-1}$, incluyendo la que pasa por el punto $(x, y) = (1, 1)$.

2.10 Un flujo se describe mediante el campo de velocidad $\vec{V} = (Ax + B)\hat{i} + (-Ay)\hat{j}$, donde $A = 10$ pies/s/pie y $B = 3$ pies/s. Dibuje unas cuantas líneas de corriente en el plano xy, incluyendo la que pasa por el punto $(x, y) = (1, 2)$.

2.11 Un campo de velocidad se especifica como $\vec{V} = ax^2\hat{i} + bxy\hat{j}$, donde $a = 2/\text{m}\cdot\text{s}$, $b = -4/\text{m}\cdot\text{s}$ y las coordenadas se miden en metros. ¿El campo de flujo es uni, bi o tridimensional? ¿Por qué? Calcule las componentes de velocidad en el punto $(2, \frac{1}{2}, 0)$. Encuentre una ecuación para la línea de corriente que pasa por este punto.

2.12 Para el campo de velocidad $\vec{V} = Axy\hat{i} + By^2\hat{j}$, donde $A = 1\ \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$, $B = -\frac{1}{2}\,\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros, dibuje líneas de corrientes para y positiva.

2.13 Un campo de velocidad se representa mediante $\vec{V} = (Ax - B)\hat{i} + Cy\hat{j} + Dt\hat{k}$, donde $A = 2\ \text{s}^{-1}$, $B =$ 4 m/s, $C = -2\ \text{s}^{-1}$, $D = 5\ \text{m/s}^2$ y las coordenadas se miden en metros. ¿Esta expresión describe un campo de flujo unidimensional, bidimensional o tridimensional? ¿Por qué? Obtenga la ecuación para las líneas de corriente en el plano xy. Trace unas cuantas líneas de corriente en el plano medio superior.

2.14 La velocidad para un flujo estacionario incompresible en el plano xy está dada por $\vec{V} = \hat{i}A/x + \hat{j}Ay/x^2$, donde $A = 2\ \text{m}^2/\text{s}$ y las coordenadas se miden en metros. Obtenga una ecuación para la línea de corriente que pasa por el punto $(x, y) = (1, 3)$. Calcule el tiempo requerido para que una partícula de fluido se mueva de $x = 1$ m a $x = 3$ m en este campo de flujo.

2.15 Empezando con el campo de velocidad del problema 2.8, verifique las ecuaciones paramétricas para el movimiento de partícula dado en el problema 2.18. Obtenga la ecuación para la línea de la trayectoria de la partícula localizada en el punto $(x, y) = (1, 2)$ en el instante $t = 0$. Compare esta línea de trayectoria con la línea de corriente que pasa por el mismo punto.

2.16 Considere otra vez el campo de velocidad del problema 2.9. Obtenga las ecuaciones paramétricas para el movimiento de partícula y la ecuación para la línea de trayectoria de la partícula localizada en el

punto $(x, y) = (2, 1)$ en el instante $t = 0$. Compare esta línea de trayectoria con la línea de corriente que pasa por el mismo punto.

2.17 Considere el campo de flujo dado en la descripción euleriana mediante la expresión $\vec{V} = A\hat{i} + Bt\hat{j}$, donde $A = 2$ m/s, $B = 0.3$ m/s^2 y las coordenadas se miden en metros. Deduzca las funciones de posición lagrangianas para la partícula de fluido que se localizaba en el punto $(x, y) = (1, 1)$ en el instante $t = 0$. Obtenga una expresión algebraica para la línea de trayectoria seguida por esta partícula. Dibújela y compárela con las líneas de corriente que pasan por el mismo punto en los instantes $t = 0$, 1 y 2 s.

2.18 Las ecuaciones paramétricas para la posición de una partícula en un campo de flujo están dadas como $x_p = c_1e^{at}$ y $y_p = c_2e^{-bt}$. Encuentre la ecuación de la línea de trayectoria para una partícula localizada en $(x, y) = (1, 2)$ en $t = 0$. Muestre que para este campo de flujo, $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j}$. Compare la línea de trayectoria con la línea de corriente que pasa por el mismo punto.

2.19 Considere el flujo descrito por el campo de velocidad $\vec{V} = x(1 + At)\hat{i} + y\hat{j}$, con $A = 0.5$ s^{-1}. Para el punto (1, 1, 0), calcule y grafique *a*) la línea de corriente a través del punto en $t = 0$ y *b*) la línea de trayectoria trazada por la partícula que pasa por el punto en ese instante.

2.20 Considere el flujo descrito por el campo de velocidad $\vec{V} = x(1 + At)\hat{i} + y\hat{j}$, con $A = 0.5$ s^{-1}. Para el punto (1, 1, 0), calcule y grafique *a*) la línea de corriente que pasa por el punto en $t = 0$ y *b*) la línea de traza formada por las partículas que pasaron por el punto anteriormente.

2.21 Considere el campo de flujo $\vec{V} = ax(1 + bt)\hat{i} + cy\hat{j}$, donde $a = c = 1$ s^{-1} y $b = 0.2$ s^{-1}. Para la partícula que pasa por el punto $(x, y) = (1, 1)$ en el instante $t = 0$, grafique la línea de la trayectoria durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 3$ s. Compare con la línea de corriente que pasa por el mismo punto en el instante $t = 0$.

2.22 Las líneas de traza se marcan mediante fluido marcador neutralmente flotante, inyectado en un campo de flujo desde un punto fijo en el espacio. Una partícula del fluido marcador que está en el punto (x, y) en el tiempo t, debe haber pasado por el punto de inyección (x_0, y_0) en algún instante anterior, $t = \tau$. La historia de tiempo de una partícula marcadora puede encontrarse resolviendo las ecuaciones de la línea de trayectoria para las condiciones iniciales $x = x_0, y = y_0$ cuando $t = \tau$. Las posiciones presentes de partículas sobre la línea de traza se obtienen dejando τ igual a valores en el intervalo $0 \leq \tau \leq t$. Considere el campo de flujo $\vec{V} = ax(1 + bt)\hat{i} + cy\hat{j}$, donde $a = c = 1$ s^{-1} y $b = 0.2$ s^{-1}. Evalúe la línea de traza que pasa por el punto inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$, durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 3$ s. Compare con la línea de corriente que pasa por el mismo punto en el instante $t = 0$.

‡**2.23** Considere el campo de flujo $\vec{V} = axt\hat{i} + b\hat{j}$, donde $a = 2$ s^{-2} y $b = 3$ m/s. Para la partícula que pasa por el punto $(x, y) = (3, 1)$ en el instante $t = 0$, grafique la línea de trayectoria durante el intervalo de $t = 0$ a 3 s. Compare esta línea de trayectoria con las líneas de corriente que pasan por el mismo punto en los instantes $t = 1$, 2 y 3 s.

2.24 Diminutas burbujas de hidrógeno se están utilizando como trazadores para visualizar un flujo. Todas las burbujas se generan en el origen $(x = 0, y = 0)$. El campo de velocidad es no estacionario y obedece a las ecuaciones:

$u = 1$ m/s	$v = 1$ m/s	$0 \leq t < 2$ s
$u = 0$	$v = 1.5$ m/s	$2 \leq t \leq 4$ s

Dibuje las líneas de trayectoria de las burbujas que abandonan el origen en $t = 0$, 1, 2, 3 y 4 s. Marque las posiciones de estas cinco burbujas en $t = 4$ s. Utilice una línea interrumpida para indicar la posición de una línea de traza en $t = 4$ s.

‡**2.25** Considere otra vez el campo de velocidad del problema 2.21. Ubique las posiciones, en $t = 3$ s, de partículas que pasaron por el punto $(x, y) = (1, 1)$ en los tiempos $t = 0$, 1 y 2 s. Una las posiciones de

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos que le ayuden a resolver los problemas marcados con obeliscos.

partícula con una línea interrumpida. Compare la línea de traza resultante con la línea de corriente que pasa por el mismo punto en el instante $t = 0$.

‡**2.26** Considere el campo de velocidad $\vec{V} = ax\hat{i} + by(1 + ct)\hat{j}$, donde $a = b = 2\ s^{-1}$ y $c = 0.4\ s^{-1}$. Para la partícula que pasa por el punto $(x, y) = (1, 1)$ en el instante $t = 0$, dibuje la línea de trayectoria durante el intervalo de $t = 0$ a 1.5 s. Compare esta línea de trayectoria con la línea de traza que pasa por el mismo punto en el instante $t = 0$.

‡**2.27** Considere el campo de flujo $\vec{V} = ax\hat{t}\hat{i} + b\hat{j}$, donde $a = 3\ s^{-2}$ y $b = 2$ m/s. Para la partícula que pasa por el punto $(x, y) = (1, 2)$ en el instante $t = 0$, dibuje la línea de trayectoria durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a 3 s. Compare esta línea de trayectoria con la línea de traza que pasa por el mismo punto en el instante $t = 3$ s.

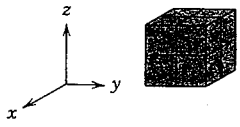
2.28 Un tornado puede ser representado en coordenadas polares por el campo de velocidad

$$\vec{V} = -\frac{a}{r}\hat{e}_r + \frac{b}{r}\hat{e}_\theta$$

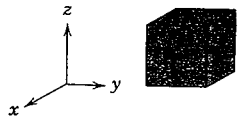
donde $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ son vectores unitarios en las direcciones r y θ, respectivamente. Use el producto vectorial, $\vec{V} \times d\vec{s}$, donde $d\vec{s}$ es un elemento de distancia a lo largo de una línea de corriente, para mostrar que las líneas de corriente forman espirales logarítmicas,

$$r = ce^{-(a/b)\theta}$$

2.29 Utilice notación de doble índice para marcar los seis esfuerzos de corte indicados.



P2.29

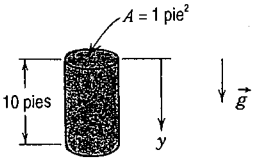


P2.30

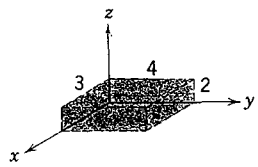
2.30 Sobre el elemento mostrado, indique todos los esfuerzos posibles representados por

$$\tau_{zx} = -10\ \text{lbf/pie}^2 \quad \text{y} \quad \sigma_{yy} = 15\ \text{lbf/pie}^2$$

2.31 La distribución de densidad en la columna de solución salina mostrada, está dada por $\rho = \rho_0\ (1 + ky)$ donde $\rho_0 = 1.94\ \text{slug/pie}^3$ y $k = 0.10\ \text{pie}^{-1}$. Calcule la fuerza másica que actúa sobre el volumen.



P2.31



P2.32

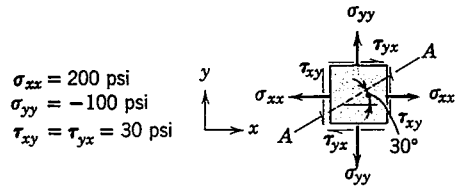
2.32 Una distribución de fuerza másica está dada como $\vec{B} = ax\hat{i} + b\hat{j} + czk\hat{}$ por unidad de masa del material sobre el que se actúa. La densidad del material se expresa como $\rho = lx^2 + ry + nz$. Todas las coordenadas se miden en metros. Determine la fuerza másica resultante en la región mostrada cuando:
$a = 0$, $b = 0.1$ N/kg, $c = 0.5$ N/kg · m, $l = 2.0\ \text{kg/m}^5$, $r = 0$ y $n = 1.0\ \text{kg/m}^4$.

2.33 Para la región que se muestra en el problema 2.32, determine la fuerza másica resultante cuando:
$a = 5.0$ N/kg · m, $b = 0$, $c = 10.0$ N/kg · m, $l = 0.1\ \text{kg/m}^5$, $r = 0.5\ \text{kg/m}^4$ y $n = 0$.

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos que le ayuden a resolver los problemas marcados con obeliscos.

2.34 Para la región que se muestra en el problema 2.32, determine la fuerza másica resultante cuando: $a = 1.0$ N/kg · m, $b = 2.0$ N/kg, $c = 0$, $l = 0$, $r = 1.0$ kg/m^4, and $n = 2.0$ kg/m^4.

2.35 Se presentan los siguientes niveles de esfuerzo existentes, en un punto en un medio continuo:



P2.35

Encuentre las magnitudes de los esfuerzos normal y de corte que actúan sobre el plano AA.

2.36 La dependencia de la temperatura de la viscosidad del agua se representa de manera adecuada mediante la ecuación empírica

$$\mu = Ae^{B/T}$$

donde T es la temperatura absoluta. Los siguientes datos se midieron en un viscosímetro de laboratorio: a 10 C, $\mu = 0.0013$ kg/m · s y a 20 C, $\mu = 0.0010$ kg/m · s. Emplee el método sugerido en el Apéndice A para evaluar las constantes A y B en la ecuación de correlación. Verifique contra los datos de la figura A.2.

2.37 La variación con la temperatura de la viscosidad del aire se correlaciona adecuadamente por medio de la ecuación empírica de Sutherland

$$\mu = \frac{bT^{1/2}}{1 + S/T}$$

Los valores de b y S que mejor corresponden se dan en el Apéndice A con unidades del SI. Emplee estos valores para desarrollar una ecuación que calcule la viscosidad del aire en unidades del sistema inglés gravitacional como función de la temperatura absoluta en Rankine. Verifique su resultado empleando los datos del Apéndice A.

2.38 La variación con la temperatura de la viscosidad del aire se representa de manera adecuada por medio de la correlación empírica de Sutherland

$$\mu = \frac{bT^{1/2}}{1 + S/T}$$

Los valores de b y S que mejor se ajustan se dan en el Apéndice A. Obtenga una ecuación en unidades del SI para la viscosidad cinemática contra la temperatura para aire a presión atmosférica. Suponga un comportamiento de gas ideal. Verifique utilizando los datos del Apéndice A.

2.39 Los datos para determinar la variación de la viscosidad del agua en función de la temperatura, se correlacionan en forma apropiada mediante la ecuación

$$\mu = 2.414 \times 10^{-5} \exp\left(\frac{570.6}{T - 140}\right)$$

donde μ es la viscosidad dinámica en N · s/m^2 y T es la temperatura absoluta en kelvins (referencia 9 del Apéndice A). Calcule la viscosidad del agua a 0, 20 y 40 C. Compare con los valores obtenidos de las gráficas en el Apéndice A.

2.40 Los viscosímetros de tubo capilar se emplean ampliamente con fines industriales, particularmente para productos petroleros y lubricantes. La American Society for Testing and Materials (ASTM) tiene dimensiones y procedimientos de prueba estandarizados para los viscosímetros capilares Saybolt

Universal y Saybolt Furol (contracción de "fuel and motor oils"). Estos instrumentos son fáciles de usar: el líquido que se va a probar se coloca en un cilindro que tiene un tubo corto de orificio pequeño y un tapón en su extremo inferior. El cilindro está rodeado por un baño a temperatura constante. Después de que la temperatura de la muestra se estabiliza, se quita el tapón. Posteriormente, se mide el tiempo en que fluyen hacia afuera 60 centímetros cúbicos de líquido. La lectura del Saybolt es el tiempo de flujo en segundos. Estas lecturas de "viscosidad" pueden convertirse en unidades de ingeniería empleando las ecuaciones empíricas (Streeter, V. L., *Handbook of Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1961, Sección 1.11):

Viscosímetro	Rango de tiempo* (s)	Viscosidad cinemática ν(St)
Saybolt Universal:	$32 \leq t \leq 100$	$0.00226t - \dfrac{1.95}{t}$
	$100 < t < 1000$	$0.00220t - \dfrac{1.35}{t}$
Saybolt Furol:	$25 \leq t \leq 40$	$0.0224t - \dfrac{1.84}{t}$
	$40 < t$	$0.0216t - \dfrac{0.60}{t}$

Calcule los rangos de la viscosidad cinemática (en unidades del SI) para los cuales puede emplearse cada instrumento.

2.41 La distribución de velocidad para flujo laminar entre placas paralelas está dada por

$$\frac{u}{u_{máx}} = 1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2$$

donde h es la distancia que separa las placas y el origen se ubica en el punto medio entre las mismas. Considere un flujo de agua a 15 C, con $u_{máx} = 0.30$ m/s y $h = 0.50$ mm. Calcule el esfuerzo de corte en la placa superior y proporcione su dirección.

2.42 La distribución de velocidad para flujo laminar entre placas paralelas está dada por

$$\frac{u}{u_{máx}} = 1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2$$

donde h es la distancia de separación de las placas y el origen se ubica en el punto medio entre las mismas. Considere el flujo de agua a 15 C con velocidad máxima de 0.05 m/s y $h = 5$ mm. Calcule la fuerza sobre una sección de 0.3 m^2 de la placa inferior y proporcione su dirección.

2.43 Dos superficies horizontales, paralelas e infinitas están separadas por una película de aceite SAE 10W a $T = 10$ C y espesor $d = 0.0144$ pulg. La superficie superior se mueve con velocidad V. La superficie inferior es estacionaria y contiene una placa montada sobre un resorte de área $A = 0.725$ $pies^2$. La fuerza horizontal sobre la placa es $F = 0.155$ lbf. Calcule la velocidad de la placa superior.

2.44 Un pequeño trineo de fondo plano empleado para demostraciones se sostiene sobre una película de aire; la película de aire tiene un espesor de $h = 0.00135$ pulg y el área de contacto es $A = 12.5$ $pulg^2$. En un instante, la velocidad del trineo es $V = 6.25$ pies/s. Determine la fuerza que se opone al movimiento del trineo en ese instante.

2.45 Una patinadora de figura, que pesa 112 lbf, se desliza sobre un patín a una velocidad de $V = 20.5$ pies/s. Su peso es soportado por una delgada película de agua líquida fundida por medio de la presión de la hoja del patín sobre el hielo. Suponga que la hoja tiene una longitud de $L = 11.5$ pulg y un ancho de $w = 0.125$ pulg y que el espesor de la película de agua es $h = 0.0000575$ pulg. Estime la desaceleración de la patinadora que resulta del corte viscoso en la película de agua, si se desprecian los efectos en los extremos.

2.46 Petróleo crudo, con densidad relativa DR = 0.85 y viscosidad $\mu = 2.15 \times 10^{-3}$ lbf · s/pie^2, fluye en forma estacionaria descendiendo sobre una superficie con inclinación $\theta = 30$ grados debajo de la horizontal, en una película de espesor $h = 0.125$ pulg. El perfil de velocidad está dado por

$$u = \frac{\rho g}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\text{sen}\,\theta$$

(La coordenada x corre a lo largo de la superficie y y es normal a la superficie.) Dibuje el perfil de velocidad. Determine la magnitud y dirección del esfuerzo de corte que actúa sobre la superficie.

2.47 Un bloque que pesa 10 lbf y que tiene dimensiones de 10 pulg de lado se jala hacia arriba en una superficie inclinada sobre la cual hay una película de aceite SAE 10W a 100 F. Si la velocidad del bloque es 5 pies/s y el espesor de la película de aceite es 0.001 pulg, encuentre la fuerza requerida para jalar el bloque. Suponga que la distribución de velocidad en la película de aceite es lineal. La superficie está inclinada a un ángulo de 15° respecto a la horizontal.

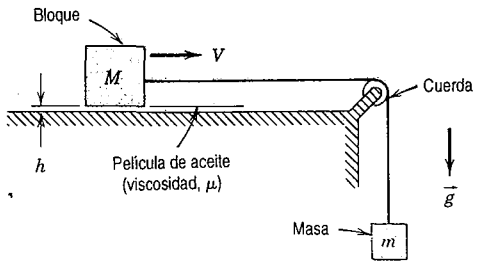
2.48 Un bloque tiene una masa de 2 kg y 0.2 m de lado. Se desliza hacia abajo en una pendiente sobre una película delgada de aceite. La pendiente es de 30° respecto a la horizontal. El aceite es SAE 30 a 20 C, la película es de 0.02 mm de espesor y el perfil de velocidad puede considerarse lineal. Calcule la velocidad terminal del bloque.

2.49 Un losa de masa $M = 125$ kg se desliza hacia abajo en una superficie plana lisa larga, inclinada a $\theta = 2.15°$ respecto a la horizontal y cubierta con una película de agua de espesor $h = 0.0250$ mm. Estime la velocidad terminal de la losa si sus dimensiones son $L = 515$ mm por $W = 525$ mm.

2.50 Ambos lados de una cinta de grabadora van a recubrirse con lubricante haciéndola pasar a través de una hendidura estrecha. La cinta tiene 0.015 pulg de espesor y 1.00 pulg de ancho. Se centra en la hendidura con un espacio libre de 0.012 pulg a cada lado para que el lubricante, de viscosidad $\mu = 0.021$ slug/pie · s, llene completamente el espacio entre la cinta y la hendidura para una longitud de 0.75 pulg a lo largo de la cinta. Si ésta puede soportar una fuerza de fricción máxima de 7.5 lbf, determine la velocidad máxima con la cual puede ser jalada a través de la hendidura.

2.51 El juego de hockey de mesa, en cierto salón, usa discos de goma de 30 g de masa, con un diámetro de 100 mm. La película de aire bajo el disco es de 0.1 mm de espesor. Calcule el tiempo requerido después del impacto para que un disco pierda 10% de su velocidad inicial.

2.52 Un bloque de masa M se desliza sobre una película delgada de aceite. El espesor de la película es h y el área del bloque es A. Cuando se suelta, la masa m ejerce una tensión sobre la cuerda, provocando la aceleración del bloque. Desprecie la fricción en la polea y la resistencia del aire. Desarrolle una expresión algebraica para la fuerza viscosa que actúa sobre el bloque cuando éste se mueve a velocidad



P2.52

V. Deduzca una ecuación diferencial para la velocidad del bloque como una función del tiempo. Obtenga una expresión algebraica para la velocidad máxima del bloque.

2.53 Un bloque rectangular de acero con longitud $L = 101$ mm, ancho $W = 50.5$ mm y altura $H = 20.2$ mm se desliza a lo largo de una superficie horizontal lisa sobre una película de aceite SAE 30 a $T = 20$ C, con profundidad $d = 0.505$ mm. Al tiempo $t = 0$, la velocidad inicial del bloque es $U_0 = 0.525$ m/s. Calcule la magnitud y establezca la dirección de la fuerza de corte viscosa que actúa sobre el bloque en el tiempo $t = 0$. Desarrolle una ecuación diferencial para la velocidad del bloque y encuentre el valor de la misma para $t = 5$ s. ¿Nunca llegará a cero la velocidad del bloque? Determine el desplazamiento máximo del bloque.

2.54 La mesa de hockey del problema 2.51 se ha instalado de manera inadecuada; su superficie tiene una inclinación de 2° respecto a la horizontal. Un jugador lanza un disco directamente hacia arriba de la pendiente a una velocidad inicial de 10 m/s. Determine su velocidad en el instante en el que pasa a través de la portería, a 2 m de distancia.

2.55 Alambre magnético se va a revestir con barniz para aislamiento jalándolo a través de un dado circular de 0.9 mm de diámetro. El diámetro del alambre es 0.8 mm y está centrado en el dado. El barniz ($\mu = 20$ centipoise) llena completamente el espacio entre el alambre y el dado en una longitud de 20 mm. El alambre se jala a través del dado a una velocidad de 50 m/s. Determine la fuerza que se requiere para jalar el alambre.

2.56 Un viscosímetro de cilindros concéntricos puede formarse rotando el miembro interior de un par de cilindros amoldados estrechamente (véase la Fig. P2.60). El claro anular debe hacerse tan pequeño como para que exista un perfil de velocidad lineal en el fluido que llena este espacio. Considere un viscosímetro con un cilindro interior de 3 pulg de diámetro y 6 pulg de altura y un claro de 0.001 pulg de ancho, lleno con aceite de ricino a 90 F. Determine el momento de torsión necesario para hacer girar al cilindro interior a 250 rpm.

2.57 Un viscosímetro de cilindros concéntricos puede formarse rotando el miembro interior de un par de cilindros amoldados estrechamente (véase la Fig. P2.60). Para claros pequeños, puede suponerse un perfil de velocidad lineal en el líquido que llena el claro anular. El cilindro interior del viscosímetro tiene 75 mm de diámetro y 150 mm de altura, con un claro de 0.02 mm de ancho. Se necesita un momento de torsión de 0.021 N · m para hacer girar al cilindro interior a 100 rpm. Determine la viscosidad del líquido en el claro del viscosímetro.

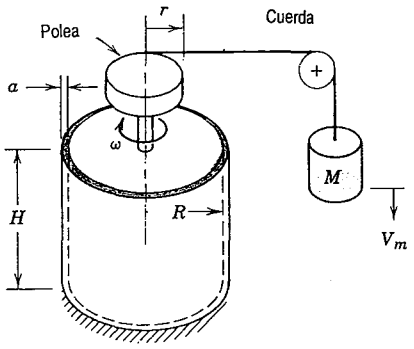
2.58 Un eje con diámetro exterior de 18 mm gira a 20 revoluciones por segundo dentro de una chumacera estacionaria de 60 mm de longitud. Una delgada película de aceite de 0.2 mm de espesor llena el anillo concéntrico entre el eje y la chumacera. El momento de torsión necesario para hacer girar el eje es 0.0036 N · m. Estime la viscosidad del aceite que llena el claro.

2.59 Un cilindro con masa $M = 0.225$ kg se desliza hacia abajo en un tubo vertical largo. El tubo se lubrica con una delgada capa de glicerina a $T = 30$ C en el claro entre el cilindro y el tubo. El diámetro del tubo es $D = 30.1$ mm, el cilindro tiene una altura de $H = 20.5$ mm y el ancho del claro se estima en $h = 0.00125$ mm. En cierto instante, el cilindro viaja descendiendo a $V = 12.5$ mm/s. Suponga que la presión del aire en ambos lados del cilindro es la misma. Calcule la aceleración del cilindro en ese instante. Estime la velocidad terminal que el cilindro alcanzaría después de haber recorrido una gran distancia hacia abajo dentro del tubo.

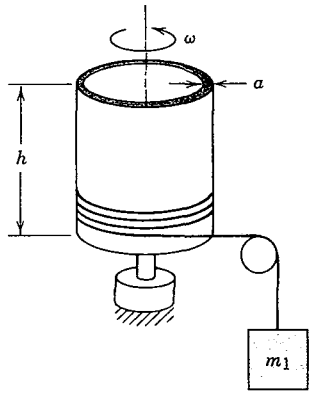
2.60 Un viscosímetro de cilindros concéntricos es accionado por una masa M que cae y que está conectada mediante una cuerda y una polea al cilindro interior, como se muestra en la figura de la página siguiente. El líquido que se va a probar llena el claro anular de ancho a y altura H. Después de una etapa transitoria inicial, la masa cae a velocidad constante V_m. Desarrolle una expresión algebraica para la viscosidad del líquido en el dispositivo, en términos de M, g, V_m, r, R, a y H. Evalúe la viscosidad del líquido empleando los valores de la figura de la página siguiente.

2.61 El delgado cilindro exterior (masa m_2 y radio R) de un pequeño viscosímetro portátil de cilindros concéntricos se acciona por medio de una masa que cae, m_1, unida a una cuerda. El cilindro interior

$M = 0.10$ kg $\quad r = 25$ mm
$R = 50$ mm $\quad a = 0.20$ mm
$H = 50$ mm $\quad V_m = 40$ mm/s



P2.60

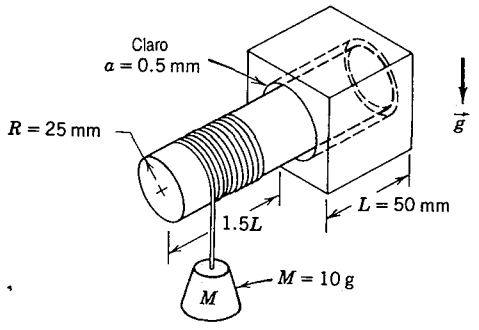


P2.61

es fijo. El claro entre los cilindros es a. Desprecie la fricción de cojinete, la resistencia del aire y la masa del líquido en el viscosímetro. Obtenga una expresión algebraica para el momento de torsión, producto del corte viscoso que actúa en el cilindro a una velocidad angular ω. Deduzca y resuelva una ecuación diferencial para la velocidad angular del cilindro exterior como función del tiempo. Obtenga una expresión para la velocidad angular máxima del cilindro.

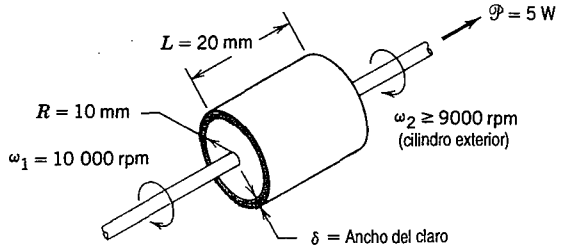
2.62 Las estimaciones ubican el rango de las relaciones de corte, encontradas en el aceite lubricante durante el arranque de un motor frío en invierno, entre 10^4 y 10^5 s^{-1} (*SAE Handbook*, 1976). Se va a diseñar un viscosímetro de cilindros concéntricos para obtener relaciones de corte en el rango requerido. Las restricciones en el viscosímetro incluyen una velocidad máxima para el cilindro exterior de 12 000 rpm y un número de Reynolds máximo, para el lubricante en el claro, de 1200, con base en la velocidad lineal del cilindro exterior y el ancho del claro. Empleando los datos de viscosidad para el aceite de motores SAE 10W-30 a -20 C (del Apéndice A), calcule el ancho del claro requerido. Valore la factibilidad del diseño.

2.63 Se muestra un eje de aluminio circular montado en una chumacera. El claro simétrico entre el eje y la chumacera se llena con aceite SAE 10W-30 a $T = 30$ C. Se provoca el giro del eje por medio de la masa unida y de la cuerda. Genere y resuelva una ecuación diferencial para la velocidad angular del eje como una función del tiempo. Calcule la velocidad angular máxima del eje y el tiempo requerido para alcanzar 95 por ciento de esta velocidad.



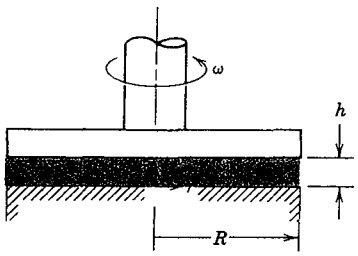
P2.63

2.64 Un acoplamiento libre de choques para una transmisión mecánica de baja potencia, se va a integrar a partir de un par de cilindros concéntricos. El espacio anular entre los cilindros va a ser llenado con aceite. La transmisión debe transmitir una potencia, $P = 5$ W. Otras dimensiones y propiedades son indicadas en la figura. Desprecie la fricción de cojinete y los efectos en los extremos. Suponga un claro práctico mínimo δ para el dispositivo, igual a 0.5 mm. Dow elabora fluidos de silicón con viscosidades tan altas como 10^6 centipoise. Determine la viscosidad que debe especificarse para satisfacer el requerimiento para este dispositivo.

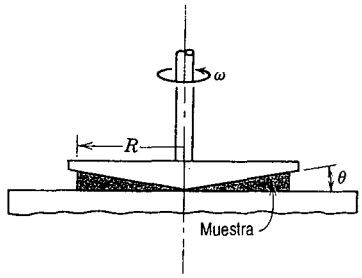


P2.64

2.65 Se ha hecho una propuesta para usar un par de discos paralelos en la medición de la viscosidad de una muestra líquida. El disco superior gira a una altura h sobre el disco inferior. La viscosidad del líquido en el claro se va a calcular a partir de mediciones del momento de torsión necesario para hacer girar el disco superior de manera estable. Obtenga una expresión algebraica del momento de torsión necesario para rotar el disco.



P2.65

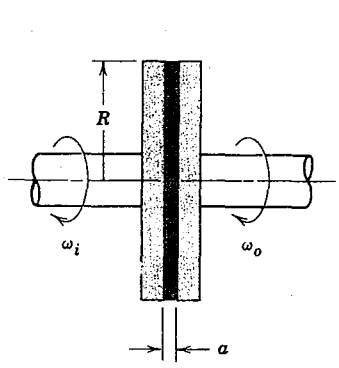


P2.66

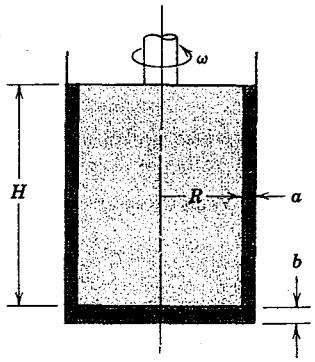
2.66 El viscosímetro de cono y placa mostrado es un instrumento que se usa con frecuencia para caracterizar fluidos no newtonianos. Está compuesto por un placa plana y un cono rotatorio con un ángulo muy obtuso (por lo regular θ es menor que 0.5 grados). El ápice del cono toca apenas la superficie de la placa y el líquido que se va a probar llena el claro estrecho formado por el cono y la placa. Deduzca una expresión para la tasa de corte en el líquido que llena el claro, en términos de la geometría del sistema. Evalúe el momento de torsión sobre el cono transmisor en términos del esfuerzo de corte y de la geometría del sistema.

2.67 Se va a construir un embrague viscoso a partir de un par de discos paralelos, con una separación muy pequeña, que encerrará una delgada capa de líquido viscoso. Obtenga las expresiones algebraicas para el momento de torsión y la potencia transmitida por el par de discos, en términos de la viscosidad del líquido, μ, el radio del disco, R, la separación entre los discos, a, y las velocidades angulares: ω_i del disco de entrada y ω_0 del disco de salida. Desarrolle también las expresiones para la relación de deslizamiento, $s = \Delta\omega/\omega_i$, en términos de ω_i y el momento de torsión transmitido. Determine la eficiencia, η, en términos de la proporción de deslizamiento. Observe la figura de la página siguiente.

2.68 Se muestra un viscosímetro de cilindros concéntricos. El momento de torsión viscoso se produce por medio del claro anular en torno al cilindro interior. El fondo plano del cilindro interior genera un momento de torsión viscoso adicional, conforme gira sobre el fondo plano del cilindro exterior fijo.



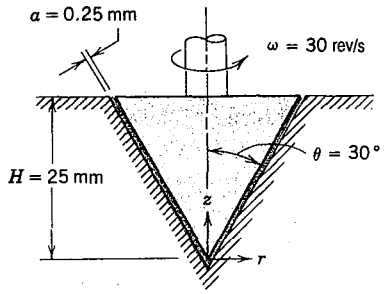
P2.67



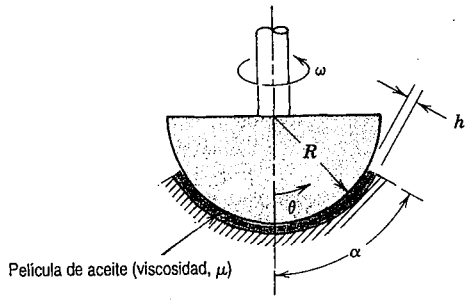
P2.68

Obtenga una expresión algebraica para el momento de torsión viscoso que resulta del flujo en el claro anular de ancho a. Obtenga una expresión algebraica para el momento de torsión viscoso, producto del flujo en el claro de la base de altura b. Elabore una gráfica que muestre la proporción, b/a, requerida para mantener el momento de torsión de la base en 1 por ciento o menos del momento de torsión anular, contra las otras variables geométricas. ¿Cuáles son las implicaciones de diseño? ¿Qué modificaciones al diseño puede recomendar?

2.69 Un eje de punta cónica gira en un cojinete cónico. El claro entre el eje y el cojinete se llena con aceite pesado que tiene la viscosidad del SAE 30 a 30 C. Obtenga una expresión algebraica para el esfuerzo de corte que actúa sobre la superficie del eje cónico. Calcule el momento de torsión viscoso que actúa sobre el eje.



P2.69

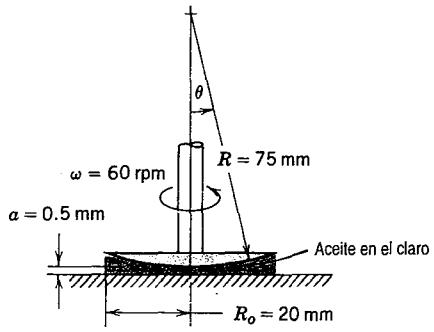


P2.70

‡**2.70** Se muestra un cojinete de empuje esférico. El claro entre el miembro esférico y el alojamiento es de ancho constante h. Obtenga y grafique una expresión algebraica para el momento de torsión del miembro esférico, como una función del ángulo α.

‡**2.71** Se muestra la sección transversal de un cojinete rotatorio. El miembro esférico gira con velocidad angular ω, a una pequeña distancia, a, sobre la superficie del plano. El claro estrecho se llena con aceite viscoso, teniendo $\mu = 1250$ cp. Obtenga una expresión algebraica para el esfuerzo de corte que actúa sobre el miembro esférico. Evalúe el esfuerzo de corte máximo que actúa sobre el miembro esférico en las condiciones mostradas. (¿El máximo se localiza necesariamente en el radio máximo?) Desarrolle una expresión algebraica (en la forma de una integral) para el momento de torsión de corte viscoso total que actúa sobre el miembro esférico. Calcule el momento de torsión empleando las dimensiones indicadas.

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos que le ayuden a resolver los problemas marcados con obeliscos.



P2.71

2.72 A menudo se transporta, por largos ductos, carbón pulverizado mezclado con agua para formar pasta. Cuando el porcentaje en peso de sólidos excede aproximadamente el 45 por ciento, la pasta se comporta como un plástico de Bingham. Los datos de una pasta de carbón con 50 por ciento de sólidos en peso indican un valor de esfuerzo de deformación de 3.1 N/m^2 y una viscosidad plástica de 0.003 $N \cdot s/m^2$. Emplee el modelo de plástico de Bingham para evaluar el esfuerzo de corte que se esperaría en esa suspensión, a una relación de corte de 500 s^{-1}. Compare con el esfuerzo de corte de agua pura a la misma relación de corte.

‡**2.73** El análisis desarrollado en el capítulo 8 para el esfuerzo de corte y el perfil de velocidad, correspondiente a flujo laminar en un tubo circular, se puede ampliar y los resultados para la ley de potencia de fluido no newtoniano pueden escribirse en la forma

$$\frac{u}{u_{\text{media}}} = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

Grafique los perfiles de velocidad, u/u_{media} contra r/R, para un fluido newtoniano con $n = 1$, un fluido dilatante con $n = 3$ y un fluido seudoplástico con $n = 1/3$. Compare las características de las curvas.

‡**2.74** Considere otra vez el perfil de velocidad para flujo laminar de un fluido no newtoniano de la ley de potencia, en el tubo circular largo del problema 2.73. Investigue los casos límite de dilatación infinita y seudoplasticidad infinita, representadas por $n = \infty$ y $n = 0$, respectivamente. Grafique u/u_{media} contra r/R para estos casos y compare con el caso newtoniano para el cual $n = 1$.

2.75 Los datos medidos de la viscosidad de una crema espesa muestran que se comporta como un fluido seudoplástico, que puede modelarse de manera adecuada mediante la relación de la ley de potencia entre el esfuerzo de corte y la relación de deformación de corte, a relaciones de corte bajas. Suponga los siguientes datos:

Esfuerzo de corte, τ_{yx} ($dina/cm^2$)	0.1	1.0
Relación de corte, $\frac{du}{dy}$ (s^{-1})	0.023	0.75

Emplee estos datos para ajustar un modelo de ley de potencia. Evalúe el comportamiento y los índices de consistencia del flujo empleando unidades del SI. Estime el esfuerzo de corte que se esperaría a una relación de corte de 0.1 s^{-1}. Compare la viscosidad aparente de la crema con esta relación de corte, con la del agua.

2.76 El comportamiento dilatante aparece en ocasiones, cuando se prueban suspensiones diluidas a relaciones de corte elevadas. Los siguientes datos se midieron en una prueba de suspensión que contenía 12 por ciento de sólidos en volumen:

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos que le ayuden a resolver los problemas marcados con obeliscos.

Esfuerzo de corte, τ (N/m^2)	6.5	4.8	2.7	1.7
Relación de corte, $\frac{du}{dy}$ (s^{-1})	600	470	300	200

Evalúe el índice de consistencia y el índice de comportamiento de flujo para esta suspensión, ajustando los datos al modelo de la ley de potencia.

2.77 El número de Reynolds, que es un importante parámetro en el fenómeno de flujo viscoso, se define mediante la ecuación

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

donde ρ y μ son la densidad y la viscosidad del fluido, mientras que, V y L son la velocidad y la longitud características, respectivamente. Exprese cada variable en términos de sus dimensiones básicas. Muestre que el número de Reynolds es adimensional.

2.78 Aire a condiciones estándar fluye a través de una tubería de 1 pulg de diámetro. La velocidad promedio es 1 pie/s. ¿El flujo es laminar o turbulento?

2.79 Agua a 15 C fluye en un tubo con un diámetro interior de 50 mm. Determine el valor máximo de la velocidad promedio, para la cual el flujo sería laminar.

2.80 La mecánica de fluidos del sistema arterial humano es de vital importancia para nuestra salud y seguridad. La densidad relativa y la viscosidad de la sangre son de aproximadamente 1.06 y 3.3 centipoise (cp), respectivamente. La velocidad de flujo media en la aorta (30 mm de diámetro interno) de un humano adulto, es aproximadamente 0.15 m/s. Calcule el número de Reynolds de flujo empleando estas propiedades. ¿Esperaría usted que este flujo fuera laminar o turbulento?

2.81 Considere el flujo viscoso laminar incompresible sobre la placa plana semiinfinita mostrada en la figura 2.11. Dibuje la variación en el esfuerzo de corte, τ_{yx}, como una función de y en las posiciones x_1 y x_2. Dibuje también la variación en el esfuerzo de corte a lo largo de la superficie de la placa ($y = 0$) como una función de x.

Capítulo 3

Estática de fluidos

Por definición, un fluido debe deformarse continuamente cuando se le aplica un esfuerzo de corte de cualquier magnitud. La ausencia de movimiento relativo (y, en consecuencia, de deformación angular) implica la ausencia de esfuerzos de corte. Por tanto, los fluidos ya sea en reposo o en movimiento de un "cuerpo rígido", sólo son capaces de soportar esfuerzos normales. El análisis de los casos hidrostáticos es, por tanto, mucho más simple que el de fluidos sujetos a deformación angular (véase sección 5-3.3).

La mera simplicidad no justifica nuestro estudio de un tema. Las fuerzas normales transmitidas por fluidos son importantes en muchas situaciones prácticas. Empleando los principios de la hidrostática, podemos calcular las fuerzas sobre objetos sumergidos, desarrollar instrumentos para medir presiones y deducir propiedades de la atmósfera y de los océanos. Es posible también, usar los principios de la hidrostática para determinar fuerzas generadas por sistemas hidráulicos en aplicaciones tales como las prensas industriales o los frenos de automóvil.

En un fluido estático y homogéneo, o en un fluido sometido al movimiento de un cuerpo rígido, una partícula de fluido mantiene su identidad todo el tiempo. Puesto que no hay movimiento relativo dentro del fluido, un elemento de fluido no se deforma. Podemos aplicar la segunda ley de movimiento de Newton para evaluar la reacción de la partícula ante las fuerzas aplicadas.

3-1 LA ECUACIÓN BÁSICA DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS

Nuestro objetivo primario es obtener una ecuación que permitirá determinar el campo de presión dentro de un fluido estático. Para hacer esto, aplicamos la segunda ley de Newton a un elemento de fluido diferencial de masa $dm = \rho d\forall$, con lados dx, dy y dz, como se muestra en la figura 3.1. El elemento de fluido es fijo respecto al sistema de coordenadas rectangulares fijo que se muestra. (Los fluidos en el movimiento de un cuerpo rígido se tratarán en la sección 3-7.)

De nuestra discusión anterior, recuerde que pueden aplicarse a un fluido dos tipos generales de fuerza: másicas y de superficie. La única fuerza másica que debe considerarse en la mayor parte de los problemas de ingeniería, se debe a la gravedad. En algunas situaciones pueden estar presentes las fuerzas másicas que son producto de campos eléctricos o magnéticos, éstas no se considerarán en el texto.

En un elemento de fluido diferencial, la fuerza másica, $d\vec{F}_B$, es

$$d\vec{F}_B = \vec{g}\ dm = \vec{g}\rho\ d\forall$$

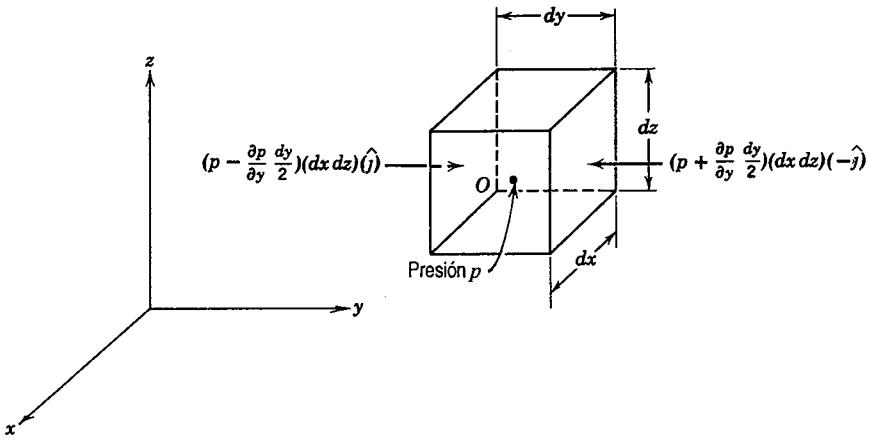


Fig. 3.1 Elemento diferencial de fluido y fuerzas de presión en la dirección *y*.

donde $\vec{g}$ es el vector de gravedad local, ρ es la densidad y $d\forall$ es el volumen del elemento. En coordenadas cartesianas $d\forall = dx\,dy\,dz$, así que

$$d\vec{F}_B = \rho\vec{g}\,dx\,dy\,dz$$

En un fluido estático no pueden presentarse esfuerzos de corte. Por consiguiente, la única fuerza de superficie es la de la presión, siendo ésta, una cantidad de campo, $p = p(x, y, z)$; la presión varía con la posición dentro del fluido. La fuerza de presión neta que resulta de esta variación, puede evaluarse mediante la suma de las fuerzas que actúan sobre las seis caras del elemento de fluido.

Sea p la presión en el centro, O, del elemento. Para determinar la presión en cada una de las seis caras del elemento, utilizaremos una expansión, de la serie de Taylor, de la presión en torno al punto O. La presión en la cara izquierda del elemento diferencial es

$$p_L = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_L - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\left(-\frac{dy}{2}\right) = p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

(Los términos de orden mayor se omiten porque se vuelven cero en el proceso de límite subsecuente.) La presión sobre la cara derecha del elemento diferencial es

$$p_R = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_R - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

Las *fuerzas* que actúan en las dos superficies y del elemento diferencial se muestran en la figura 3.1. Cada fuerza de presión es un producto de tres términos. La magnitud de la presión es el primero. La magnitud se multiplica por el área de la cara para obtener la fuerza de presión, mientras que un vector unitario se introduce para indicar la dirección. Observe también, en la figura 3.1, que la fuerza de presión en cada cara actúa en *contra* de la misma. Una presión positiva corresponde a un esfuerzo normal *compresivo*.

Las fuerzas de la presión sobre las otras caras del elemento se obtienen de la misma manera. La combinación de todas estas fuerzas produce la fuerza superficial neta que actúa sobre el elemento. Por tanto

$$d\vec{F}_S = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dy\ dz)(\hat{i}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dy\ dz)(-\hat{i})$$
$$+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dx\ dz)(\hat{j}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dx\ dz)(-\hat{j})$$
$$+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dx\ dy)(\hat{k}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dx\ dy)(-\hat{k})$$

Agrupando y cancelando términos, obtenemos

$$d\vec{F}_S = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right) dx\ dy\ dz$$

o

$$d\vec{F}_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right) dx\ dy\ dz \tag{3.1a}$$

El término entre paréntesis se llama gradiente de la presión o simplemente, gradiente de presión, y puede escribirse como grad p o ∇p. En coordenadas rectangulares

$$\text{grad}\ p \equiv \nabla p \equiv \left(\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right) \equiv \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) p$$

El gradiente puede considerarse como un operador vectorial; al tomar el gradiente de un campo escalar se obtiene un campo vectorial. Empleando la designación de gradiente, la ecuación 3 puede escribirse como

$$d\vec{F}_S = -\text{grad}\ p(dx\ dy\ dz) = -\nabla p\ dx\ dy\ dz \tag{3.1b}$$

Físicamente, el gradiente de presión es el negativo de la fuerza de superficie por unidad de volumen, debido a la presión. Notamos que el nivel de presión no es importante al evaluar la fuerza neta de presión. En vez de ello, lo que importa es la relación a la cual los cambios de presión ocurren con la distancia, es decir, el *gradiente de presión.* Encontraremos que este término será muy útil en todo nuestro estudio de la mecánica de fluidos.

A continuación, combinaremos las formulaciones para las fuerzas de superficie y másicas que hemos desarrollado para obtener la fuerza total actuante sobre un elemento de fluido. De tal modo

$$d\vec{F} = d\vec{F}_S + d\vec{F}_B = (-\text{grad}\ p + \rho\vec{g})\, dx\ dy\ dz = (-\text{grad}\ p + \rho\vec{g})\, d\forall$$

o sobre la base de un volumen unitario

$$\frac{d\vec{F}}{d\forall} = -\text{grad}\ p + \rho\vec{g} \tag{3.2}$$

Para una partícula de fluido, la segunda ley de Newton produce $d\vec{F} = \vec{a}\ dm = \vec{a}\ \rho\ d\forall$. En el caso de un fluido estático, $\vec{a} = 0$. De tal modo

$$\frac{d\vec{F}}{d\forall} = \rho\vec{a} = 0$$

Sustituyendo para $d\vec{F}/d\forall$ de la ecuación 3.2, obtenemos

$$-\text{grad } p + \rho\vec{g} = 0 \tag{3.3}$$

Vamos a revisar brevemente nuestra deducción de esta ecuación. El significado físico de cada término es

$$\begin{array}{ccccc} -\text{grad}\, p & + & \rho\,\vec{g} & = & 0 \\ \left\{\begin{array}{c}\text{fuerza de presión neta}\\ \text{por unidad de volumen}\\ \text{en un punto}\end{array}\right\} & + & \left\{\begin{array}{c}\text{fuerza másica por}\\ \text{unidad de volumen}\\ \text{en un punto}\end{array}\right\} & = & 0 \end{array}$$

Esta es una ecuación vectorial, lo que significa que consta de tres ecuaciones componentes que deben satisfacerse individualmente. Las componentes son

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{-\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0 & \text{dirección } x \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 & \text{dirección } y \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0 & \text{dirección } z \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

Las ecuaciones 3.4 describen la variación de presión en cada una de las tres direcciones de coordenadas en un fluido estático. Para simplificar aún más, es lógico elegir un sistema de coordenadas tal que el vector de la gravedad se alinee con uno de los ejes coordenados. Si el sistema de coordenadas se elige tal que el eje z esté dirigido verticalmente, entonces $g_x = 0$, $g_y = 0$ y $g_z = -g$. Bajo estas condiciones, las ecuaciones componentes se convierten en

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{3.5}$$

Las ecuaciones 3.5 indican que de acuerdo con las suposiciones hechas, la presión es independiente

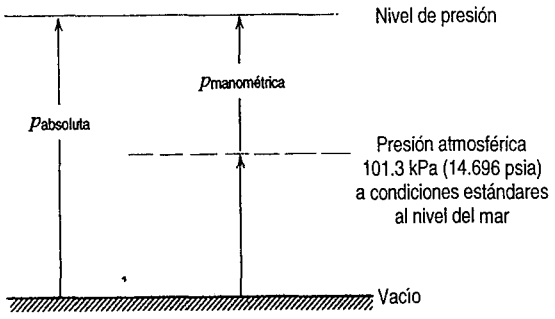


Fig. 3.2 Presiones absoluta y manométrica; se indican los niveles de referencia.

de las coordenas x y y, es decir, depende sólo de z. Puesto que p es una función de una sola variable, es posible usar una derivada total en lugar de una derivada parcial. Con estas simplificaciones, las ecuaciones 3.5 finalmente se reducen a

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \equiv -\gamma \tag{3.6}$$

Restricciones:
1) Fluido estático
2) La gravedad es la única fuerza de cuerpo
3) El eje z es vertical

Esta ecuación es la relación básica de presión-altura de la estática de fluidos, sujeta a las restricciones indicadas. Por ello, debe aplicarse sólo donde estas restricciones sean razonables para la situación física. Para determinar la distribución de presión en un fluido estático, la ecuación 3.6 puede integrarse y las condiciones de frontera apropiadas ser aplicadas.

Antes de considerar los casos específicos que se tratan con facilidad analíticamente, es importante notar que los valores de presión deben establecerse respecto a un nivel de referencia. Si dicho nivel es el vacío, la presiones se denominan *absolutas*, como se indica en la figura 3.2.

La mayor parte de los medidores de presión leen una *diferencia* de presión —la diferencia entre la presión medida y el nivel del medio ambiente (usualmente la presión atmosférica). Los niveles de presión medidos con respecto a la presión atmosférica se llaman presiones *manométricas*. De tal modo,

$$p_{\text{absoluta}} = p_{\text{manométrica}} + p_{\text{atmosférica}}$$

La presiones absolutas deben utilizarse en todos los cálculos con gas ideal u otras ecuaciones de estado.

3-2 VARIACIONES DE PRESIÓN EN UN FLUIDO ESTÁTICO

Hemos visto que la variación de presión en un fluido estático se describe mediante la relación básica de presión-altura

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{3.6}$$

A pesar de que ρg puede definirse como el *peso específico*, γ, se ha escrito como ρg en la ecuación 3.6 para subrayar que *ambas*, ρ y g, deben considerarse variables. Con el fin de integrar la ecuación 3.6 para encontrar la distribución de presión, deben hacerse suposiciones acerca de las variaciones tanto de ρ como de g.

Para la mayor parte de las situaciones prácticas de ingeniería, la variación en g es despreciable. Sólo para una situación tal como el cálculo muy preciso del cambio de la presión en una diferencia grande de altitud, sería necesario incluir la variación de g. A menos que se establezca de otro modo, asumiremos que g será constante con respecto a la altitud en cualquier posición dada.

En muchos problemas prácticos de ingeniería, la variación en ρ será apreciable y se requerirán resultados precisos que lo confirmen. Varios tipos de variación son fáciles de tratar analíticamente.

Es posible evaluar las variaciones de presión en un flujo compresible, integrando la ecuación 3.6. Antes de que esto pueda efectuarse, la densidad debe expresarse como una función de una u otra de las variables en la ecuación. Es factible utilizar información apropiada o una ecuación de estado para obtener la relación requerida de la densidad.

La densidad de los gases depende, por lo general, de la presión y la temperatura. La ecuación de estado de gas ideal es

$$p = \rho RT \tag{1.1}$$

donde R es la constante de gas (véase Apéndice A) y T la temperatura absoluta, modela con exactitud el comportamiento de la mayor parte de los gases bajo condiciones de ingeniería. Sin embargo, el empleo de la ecuación 1.1 introduce la temperatura del gas como una variable adicional. En consecuencia, debe realizarse otra suposición adicional respecto a la variación de la temperatura antes de que sea posible integrar la ecuación 3.6.

Para un fluido incompresible, ρ = constante. Entonces para gravedad constante,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = \text{constante}$$

Para determinar la variación de presión, debemos integrar y aplicar condiciones de frontera apropiadas. Si la presión en el nivel de referencia, z_0, se designa como p_0, entonces la presión, p, en la posición z, se encuentra mediante integración

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\int_{z_0}^{z} \rho g \, dz$$

o

$$p - p_0 = -\rho g(z - z_0) = \rho g(z_0 - z)$$

Para líquidos, a menudo es conveniente tomar el origen del sistema de coordenadas en la superficie libre (nivel de referencia) y medir las distancias como positivas hacia abajo, a partir de la superficie libre. Con h, medida positiva hacia abajo, entonces

$$z_0 - z = h$$

y

$$p - p_0 = \rho g h \tag{3.7}$$

La ecuación 3.7 indica que la diferencia de presión entre dos puntos en un fluido estático, puede determinarse midiendo la diferencia de altura entre los dos puntos. Los dispositivos utilizados para este propósito reciben el nombre de *manómetros*.

La presión atmosférica puede obtenerse de un *barómetro*, en el cual se mide la altura de una columna de mercurio. La altura medida puede convertirse en unidades de ingeniería empleando la ecuación 3.7 y los datos para la densidad relativa del mercurio, dados en el Apéndice A. Aunque es posible despreciar la presión de vapor de mercurio (véase problema 3.8), para trabajo de precisión, es necesario aplicar correcciones de altitud y temperatura al nivel medido y tomar en cuenta los efectos de la tensión superficial.

Un manómetro simple de tubo en U se muestra en la figura 3.3. Puesto que la rama derecha está abierta a la atmósfera, las mediciones de h_1 y h_2 permitirán la determinación de la presión manométrica en A. Empleando la notación de la figura 3.3 y aplicando la ecuación 3.7 entre A y B y entre B y C, obtenemos

$$p_A - p_B = \rho_1 g(z_B - z_A) = -\rho_1 g h_1$$

y

$$p_B - p_C = \rho_2 g(z_C - z_B) = \rho_2 g h_2$$

Sumando estas dos ecuaciones

$$p_A - p_C = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

Puesto que $p_C = p_{atm}$, entonces $p_A - p_C = p_{Amanométrica}$

Si la densidad ρ_1 es despreciable comparada con ρ_2, entonces $p_{Amanométrica} = \rho_2 g h_2$. Advierta que las presiones B' y B son iguales, porque están a la misma elevación en una extensión continua del mismo fluido.

Los manómetros son dispositivos simples y de poco costo que se usan con frecuencia en las mediciones de presión. Los estudiantes algunas veces tienen problemas al analizar situaciones de manómetros de tubo múltiple. Las siguientes reglas empíricas son útiles:

1. Cualesquiera dos puntos a la misma altura en una longitud continua del mismo líquido, están a la misma presión.
2. La presión aumenta conforme se *desciende* en una columna de líquido (recuerde el cambio de presión al nadar en una alberca).

El problema ejemplo 3.1 ilustra el empleo de un manómetro de líquido múltiple para medir la diferencia de presión. Debido a que el cambio de nivel del líquido es pequeño a baja diferencial de presión, puede resultar difícil leer con exactitud un manómetro de tubo en U. El cambio de nivel puede aumentarse modificando el diseño del manómetro o empleando dos líquidos inmiscibles de densidad un poco diferente. El análisis de un diseño típico de manómetro de depósito se ilustra en el problema ejemplo 3.2.

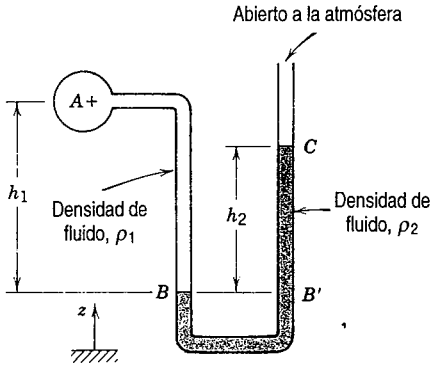
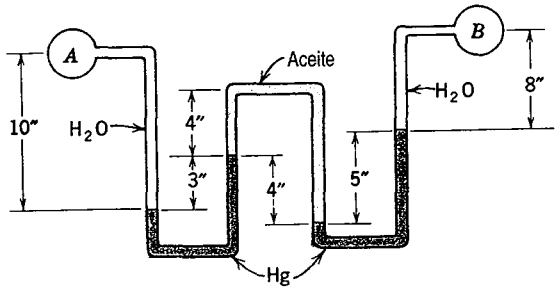


Fig. 3.3 Manómetro de tubo en U para medir la presión manométrica en A.

EJEMPLO 3.1 Manómetro de líquido múltiple

Agua circula por los tubos *A* y *B*. Aceite, con densidad relativa de 0.8, está en la parte superior de la U invertida. Mercurio, con densidad relativa de 13.6, se encuentra en la parte inferior de los recodos del manómetro. Determine la diferencia de presión $p_A - p_B$, en unidades de lbf/pulg^2.

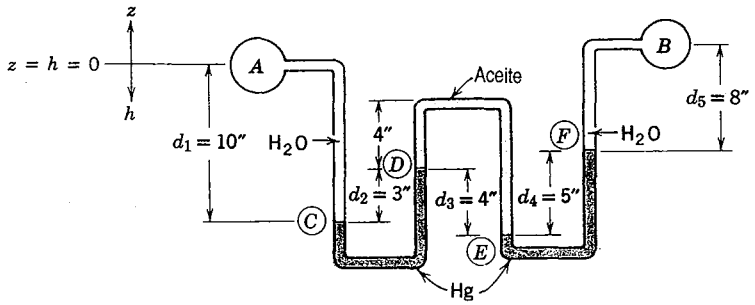


PROBLEMA EJEMPLO 3.1

DATOS: Un manómetro de tubo múltiple como el mostrado. La densidad relativa del aceite es 0.8; la densidad relativa del mercurio es 13.6.

ENCUENTRE: La diferencia de presión, $p_A - p_B$, en unidades de lbf/pulg^2.

SOLUCIÓN:



Ecuaciones básicas: $\dfrac{dp}{dz} = -\dfrac{dp}{dh} = -\rho g \qquad \text{DR} = \dfrac{\rho}{\rho_{H_2O}}$

Suposiciones: 1) Fluido estático
2) Incompresible

Por tanto,

$$dp = \rho g\, dh \qquad \text{y} \qquad \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{h_1}^{h_2} \rho g\, dh$$

Para ρ = constante

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)$$

Empezando en el punto *A* y aplicando la ecuación entre puntos sucesivos alrededor del manómetro, se obtiene

$$p_C - p_A = +\rho_{H_2O} g d_1$$

$$p_D - p_C = -\rho_{Hg} g d_2$$

$$p_E - p_D = +\rho_{aceite}\, g\, d_3$$

$$p_F - p_E = -\rho_{H_g}\, g\, d_4$$

$$p_B - p_F = -\rho_{H_2O}\, g\, d_5$$

Sumando, obtenemos

$$p_A - p_B = (p_A - p_C) + (p_C - p_D) + (p_D - p_E) + (p_E - p_F) + (p_F - p_B)$$
$$= -\rho_{H_2O} g d_1 + \rho_{H_g} g d_2 - \rho_{aceite} g d_3 + \rho_{H_g} g d_4 + \rho_{H_2O} g d_5$$

Sustituyendo $\rho = \mathrm{DR}\rho_{H_2O}$ se obtiene

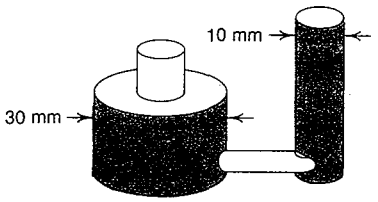
$$p_A - p_B = g(-\rho_{H_2O} d_1 + 13.6\rho_{H_2O} d_2 - 0.8\rho_{H_2O} d_3 + 13.6\rho_{H_2O} d_4 + \rho_{H_2O} d_5)$$
$$= g\,\rho_{H_2O}(-d_1 + 13.6 d_2 - 0.8 d_3 + 13.6 d_4 + d_5)$$
$$= g\,\rho_{H_2O}(-10 + 40.8 - 3.2 + 68 + 8)\ \text{pulg.}$$
$$= g\,\rho_{H_2O} \times 103.6\ \text{pulg.}$$
$$= 32.2\ \frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \times 1.94\ \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times 103.6\ \text{pulg} \times \frac{\text{pie}}{12\ \text{pulg.}} \times \frac{\text{pie}^2}{144\ \text{pulg}^2} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$$p_A - p_B = 3.74\ \text{lbf/pulg.}^2$$

$p_A - p_B$

EJEMPLO 3.2 Manómetro de depósito

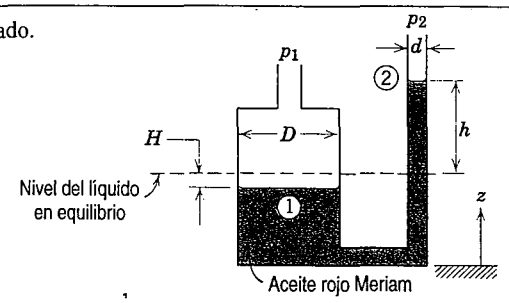
Un manómetro de depósito se construye con un diámetro de tubo de 10 mm y un diámetro del depósito de 30 mm. El líquido del manómetro es aceite rojo Meriam. Determine la sensibilidad del manómetro, esto es, la separación en milímetros por milímetro de presión diferencial del agua aplicada.



PROBLEMA EJEMPLO 3.2

DATOS: El manómetro de depósito mostrado.

$d = 10$ mm
$D = 30$ mm



ENCUENTRE: Separación del líquido, h, en milímetros por milímetro de presión diferencial del agua aplicada.

SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas: $\dfrac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \text{DR} = \dfrac{\rho}{\rho_{H_2O}}$

Suposiciones: 1) Fluido estático
2) Incompresible

Por tanto,

$$dp = -\rho g\, dz \qquad \text{y} \qquad \int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g\, dz$$

Para ρ = constante,

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

o

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) = \rho_{\text{aceite}}\, g(h + H)$$

Para eliminar H, advertimos que el *volumen* del líquido del manómetro debe permanecer constante. De tal modo, el volumen desplazado del depósito debe ser el mismo que el que aumenta en el tubo,

$$\frac{\pi}{4} D^2 H = \frac{\pi}{4} d^2 h \qquad \text{o} \qquad H = \left(\frac{d}{D}\right)^2 h$$

La sustitución produce

$$p_1 - p_2 = \rho_{\text{aceite}}\, gh \left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$$

Esta ecuación puede simplificarse expresando la diferencial de presión aplicada como una columna de agua equivalente, de altura Δh_e,

$$p_1 - p_2 = \rho_{H_2O} g\, \Delta h_e,$$

y notando que $\rho_{\text{aceite}} = \text{DR}_{\text{aceite}} \rho_{H_2O}$. Entonces

$$\rho_{H_2O} g \Delta h_e = \text{DR}_{\text{aceite}}\, \rho_{H_2O} gh \left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$$

o

$$\frac{h}{\Delta h_e} = \frac{1}{\text{DR}_{\text{aceite}}[1 + (d/D)^2]}$$

Para aceite rojo Meriam, DR = 0.827 (tabla A.1). Por consiguiente, la sensibilidad es

$$\frac{h}{\Delta h_e} = \frac{1}{0.827[1 + (10/30)^2]} = 1.09$$

$\dfrac{h}{\Delta h_e}$

Este problema ilustra los efectos del diseño del manómetro y de la elección del líquido manométrico en la sensibilidad.

En muchos líquidos, la densidad es sólo una función que depende poco de la temperatura. A presiones muy bajas, es posible considerar a los líquidos como incompresibles. Sin embargo, a presiones elevadas, los efectos de compresibilidad pueden ser importantes. Los cambios en la presión y la densidad en los líquidos se relacionan por medio del *módulo de compresibilidad volumétrica*, o módulo de elasticidad,

$$E_v \equiv \frac{dp}{(d\rho/\rho)} \tag{3.8}$$

Si el módulo volumétrico se supone constante, entonces la densidad será sólo una función de la presión (el fluido es *barotrópico*) y la ecuación 3.8 proporcionará la relación de densidad adicional, necesaria para integrar la relación básica presión-altura. Los datos del módulo volumétrico para algunos líquidos comunes se presentan en el Apéndice A.

3-3 LA ATMÓSFERA ESTÁNDAR

Varios congresos internacionales de aeronáutica se han llevado a cabo para que los expertos de la aviación de todo el mundo puedan comunicarse mejor. El resultado de uno de tales congresos fue

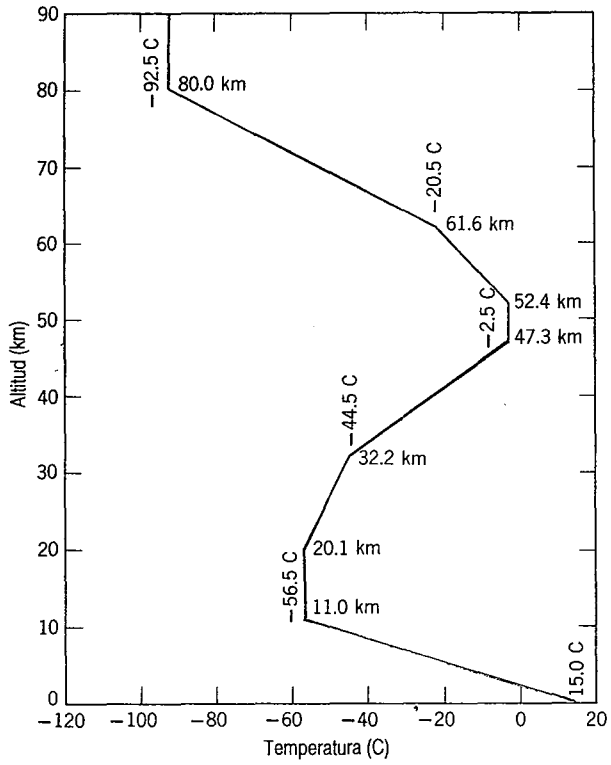


Fig. 3.4 Variación de la temperatura con la altitud en la atmósfera estándar.

una definición, aceptada internacionalmente, de la atmósfera estándar. Las condiciones al nivel del mar de la atmósfera estándar, se resumen en la tabla 3.1.

Tabla 3.1 Condiciones al nivel del mar de la atmósfera estándar

Propiedad	Símbolo	Sistema internacional	Sistema inglés
Temperatura	T	288 K	59 F
Presión	p	101.3 kPa (abs)	14.696 psia
Densidad	ρ	1.225 kg/m^3	0.002377 slug/pie^3
Peso específico	γ	—	0.07651 lbf/pie^3
Viscosidad	μ	1.781×10^{-5} kg/m · s (Pa · s	3.719×10^{-7} lbf · s/pie^2

El perfil de temperatura de la atmósfera estándar se muestra en la figura 3.4. En el apéndice A, se tabulan valores de propiedades adicionales como funciones de la altitud.

EJEMPLO 3.3 Variación de la presión y la densidad en la atmósfera

La capacidad máxima de salida de potencia de una máquina de combustión interna disminuye con la altitud, debido a que decrece la densidad del aire y, por tanto, la de la tasa del flujo de masa. Un camión sale de Denver (altitud de 5280 pies) un día en que la temperatura local y la presión barométrica son 80 F y 24.8 pulg de mercurio, respectivamente. Viaja por Vail Pass (altitud de 10 600 pies), donde la temperatura es 62 F. Determine la presión barométrica local en Vail Pass y el cambio porcentual en la densidad, si se supone que la temperatura es una función lineal de la altitud.

PROBLEMA EJEMPLO 3.3

DATOS: Un camión que viaja de Denver a Vail Pass.

Denver: $z = 5280$ pie
$p = 24.8$ pulg. Hg
$T = 80$ F

Vail Pass: $z = 10\,600$ pie
$T = 62$ F

ENCUENTRE: Presión atmosférica en Vail Pass.
Cambio porcentual en la densidad del aire entre Denver y Vail.

SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas: $\dfrac{dp}{dz} = -\rho g \qquad p = \rho RT$

Suposiciones:
1) Fluido estático
2) El aire se comporta como un gas ideal
3) La temperatura varía linealmente con la altitud

La sustitución en la relación básica presión-altura produce

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{RT}g \quad \text{o} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{g\,dz}{RT}$$

Pero la temperatura varía linealmente con la elevación, por lo que $T = T_0 + m(z - z_0)$. En consecuencia,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\,dz}{R[T_0 + m(z - z_0)]} = -\frac{g\ m\ d(z - z_0)}{mR[T_0 + m(z - z_0)]}$$

Integrando desde p_0 en Denver a p en Vail, obtenemos

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{g}{mR}\ln\left[\frac{T_0 + m(z - z_0)}{T_0}\right] = -\frac{g}{mR}\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

o

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-g/mR}$$

Evaluando, obtenemos

$$m = \frac{T - T_0}{z - z_0} = \frac{(62 - 80)\ \text{F}}{(10.6 - 5.28)10^3\ \text{pie}} = -3.38 \times 10^{-3}\ \text{F/pie}$$

y

$$\frac{g}{mR} = 32.2\ \frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \times \frac{(-1)\ \text{pie}}{3.38 \times 10^{-3}\ \text{F}} \times \frac{\text{lbm} \cdot \text{R}}{53.3\ \text{pie lbf}} \times \frac{\text{slug}}{32.2\ \text{lbm}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug pie}} = -5.55$$

Por tanto,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-g/mR} = \left(\frac{460 + 62}{460 + 80}\right)^{5.55} = (0.967)^{5.55} = 0.830$$

y

$$p = 0.830\,p_0 = (0.830)24.8\ \text{pulg. Hg} = 20.6\ \text{pulg. Hg} \longleftarrow p$$

{ Advierta que la temperatura debe expresarse como una temperatura absoluta porque proviene de la ecuación de estado de gas ideal. }

El cambio porcentual en la densidad está dado por

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = \frac{p}{p_0}\frac{T_0}{T} - 1 = \frac{0.830}{0.967} - 1 = -0.142 \text{ o } -14.2\% \longleftarrow \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

{ Este problema se incluye para ilustrar el uso de la ecuación de estado de gas ideal con la relación básica presión–altura y evaluar la distribución de presión en la atmósfera. }

3-4 SISTI

3-5 FUEI

3-5.1 Fue

3-4 SISTEMAS HIDRÁULICOS

Los sistemas hidráulicos se caracterizan por tener presiones muy altas. Como una consecuencia de estas presiones tan elevadas del sistema, a menudo es posible despreciar las variaciones de la presión hidrostática. Los frenos hidráulicos de los automóviles desarrollan presiones hasta de 10 MPa (1500 psi); los sistemas de accionamiento hidráulico de aviones y maquinaria, con frecuencia se diseñan para presiones hasta de 30 MPa (4500 psi) y los gatos hidráulicos utilizan presiones hasta de 70 MPa (10 000 psi). ¡Comercialmente se dispone de equipos de laboratorio para usarse a presiones hasta de 1000 MPa (150 000 psi)!

Aunque por lo general los líquidos se consideran incompresibles a presiones ordinarias, pueden ser apreciables los cambios de densidad a altas presiones. El módulo de compresibilidad de los fluidos hidráulicos también puede variar abruptamente a presiones elevadas. En los problemas que comprenden flujo inestable, tanto la compresibilidad del fluido como la elasticidad de la estructura de la frontera deben ser consideradas. El análisis de problemas tales como el ruido y la vibración en sistemas hidráulicos, servomotores y amortiguadores es sumamente complejo y se encuentra más allá del alcance de este libro.

3-5 FUERZA HIDROSTÁTICA SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS

Ahora que hemos determinado la manera en la cual la presión varía en un fluido estático, podemos examinar la fuerza sobre una superficie sumergida en un líquido.

Con el fin de determinar por completo la fuerza que actúa sobre la superficie sumergida, debemos especificar:

1. La magnitud de la fuerza.
2. La dirección de la fuerza.
3. La línea de acción de la fuerza resultante.

Debemos considerar superficies sumergidas tanto planas como curvas.

3-5.1 Fuerza hidrostática sobre una superficie plana sumergida

Una superficie plana sumergida, sobre cuya cara superior deseamos determinar la fuerza hidrostática resultante, se muestra en la figura 3.5. Las coordenadas se han elegido de manera que la superficie yazga en el plano xy.

Puesto que no puede haber esfuerzos de corte en un fluido estático, la fuerza hidrostática sobre cualquier elemento de la superficie debe actuar normal a la misma. La fuerza de presión actuando sobre un elemento de la superficie superior, $d\vec{A} = dx\,dy\,\hat{k}$, está dada por

$$d\vec{F} = -p\,d\vec{A} \tag{3.9}$$

La dirección positiva del vector $d\vec{A}$ es la normal al área, dibujada hacia afuera; el signo negativo en la ecuación 3.9 indica que la fuerza, $d\vec{F}$, actúa *contra* la superficie, en una dirección opuesta a la de $d\vec{A}$. La fuerza *resultante* que actúa sobre la superficie se encuentra sumando las

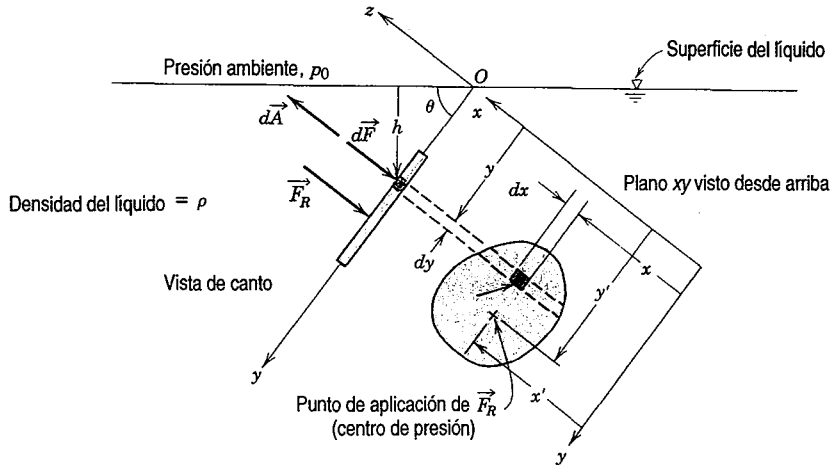


Fig. 3.5 Superficie plana sumergida.

contribuciones de las fuerzas infinitesimales sobre el área completa. De tal modo,

$$\vec{F}_R = \int_A -p\, d\vec{A} \tag{3.10}$$

Para evaluar la integral en la ecuación 3.10, tanto la presión, p, como el elemento de área, $d\vec{A}$, se deben expresar en términos de las mismas variables. Es posible escribir la relación básica presión-altura en un fluido estático, como

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

donde h se mide positiva hacia abajo desde la superficie libre del líquido. Por tanto, si la presión en la superficie libre ($h = 0$) es p_0, podemos integrar la relación presión-altura para obtener una expresión para la presión, p, a cualquier profundidad, h. De tal modo, puesto que ρ = constante,

$$p = p_0 + \int_0^h \rho g\, dh = p_0 + \rho g h$$

Esta expresión para p puede entonces sustituirse en la ecuación 3.10. La geometría de la superficie se expresa en términos de x y y; como la profundidad, h, se expresa en términos de y, esto es, $h = y \operatorname{sen}\theta$, la ecuación puede integrarse para determinar la fuerza resultante.

El punto de aplicación de la fuerza resultante debe ser tal que el momento de la misma en torno a cualquier eje, sea igual al momento de la fuerza distribuida alrededor del mismo eje. Si el vector de posición, desde un origen arbitrario de coordenadas hasta el punto de aplicación de la fuerza resultante, se designa como $\vec{r}'$, entonces

$$\vec{r}' \times \vec{F}_R = \int \vec{r} \times d\vec{F} = -\int_A \vec{r} \times p\, d\vec{A} \tag{3.11}$$

Refiriéndonos a la figura 3.5, vemos que $\vec{r}' = \hat{i}x' + \hat{j}y'$, $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$ y $d\vec{A} = dA\,\hat{k}$. Puesto que la fuerza resultante, $\vec{F}_R$, actúa contra la superficie (en una dirección opuesta a la de $d\vec{A}$), entonces $\vec{F}_R = -\vec{F}_R\,\hat{k}$. La sustitución en la ecuación 3.11 produce

$$(\hat{i}x' + \hat{j}y') \times -F_R\hat{k} = \int (\hat{i}x + \hat{j}y) \times d\vec{F} = -\int_A (\hat{i}x + \hat{j}y) \times p\,dA\,\hat{k}$$

Al evaluar el producto cruz, obtenemos

$$\hat{j}x'F_R - \hat{i}y'F_R = \int_A (\hat{j}xp - \hat{i}yp)dA$$

Ésta es una ecuación vectorial, por lo que las componentes deben ser iguales. Por tanto,

$$y'F_R = \int_A yp\,dA \qquad \text{y} \qquad x'F_R = \int_A xp\,dA \tag{3.12}$$

donde x' y y' son las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza resultante. Observe que es posible utilizar las ecuaciones 3.10 y 3.11 para determinar la magnitud de la fuerza resultante y su punto de aplicación sobre cualquier superficie plana sumergida. No requieren que la densidad sea una constante o que la superficie libre del líquido se encuentre a la presión atmosférica.

Las ecuaciones 3.10 y 3.12 son enunciados matemáticos de principios básicos que son familiares para usted de sus cursos previos en física y estática:

1. La fuerza resultante es la suma de las fuerzas infinitesimales (ecuación 3.10).
2. El momento de la fuerza resultante en torno a cualquier eje es igual al momento de la fuerza distribuida en torno al mismo eje (ecuación 3.12).

Al evaluar la fuerza hidrostática que actúa sobre una superficie plana sumergida, hemos empleado la notación vectorial para destacar que las fuerzas y los momentos son cantidades vectoriales. Como todos los elementos de las fuerzas son paralelos, no es esencial el uso de los vectores. Resumiendo:

1. La magnitud de $\vec{F}_R$ está dada por

$$F_R = |\vec{F}_R| = \int p\,dA$$

2. La dirección de $\vec{F}_R$ es normal a la superficie.
3. Para una fuerza en el plano xy, la línea de acción de $\vec{F}_R$ pasa por el punto x', y' (el centro de presión), donde

$$y'F_R = \int_A yp\,dA \qquad \text{y} \qquad x'F_R = \int_A xp\,dA$$

EJEMPLO 3.4 Ecuaciones para el cálculo de la fuerza de presión y punto de aplicación sobre una superficie plana sumergida

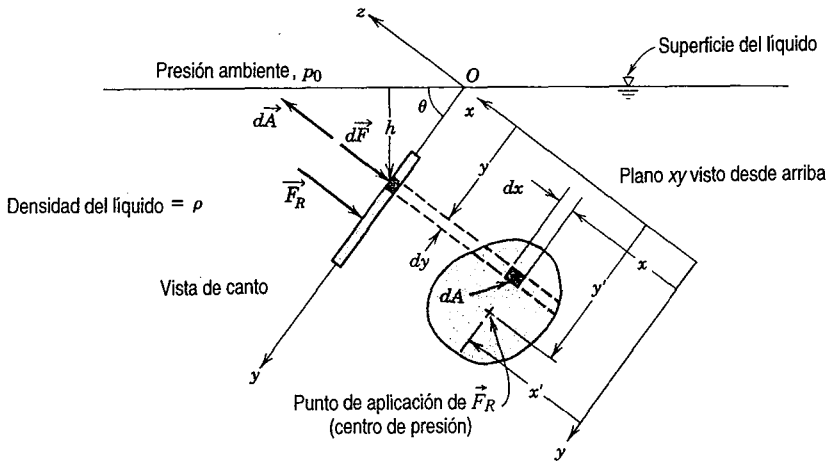
Considere una superficie plana sumergida con superficie libre a presión atmosférica. Empleando la notación de la figura 3.5, *a*) muestre que la fuerza hidrostática sobre la cara superior de cualquier

superficie plana sumergida es igual a la presión en el centroide multiplicada por el área de la superficie y *b*) deduzca expresiones para las coordenadas del centro de presión en términos de los parámetros geométricos de la superficie.

PROBLEMA EJEMPLO 3.4

DATOS: La superficie plana sumergida que se muestra, con centroide de área en x_c, y_c. Superficie libre a presión ambiente (presión manométrica cero).

ENCUENTRE: *a*) Muestre que $F_R = p_c A$.
b) Determine las expresiones para las coordenadas del centro de presión.



SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas: $$F_R = \int p\, dA \qquad \frac{dp}{dh} = \rho g$$

Para un fluido incompresible, la integración de la relación presión-altura desde la superficie libre ($h = 0, p = p_0$) produce

$$p = p_0 + \rho g h$$

La fuerza, F_R, es entonces

$$F_R = \int_A p\, dA = \int_A (p_0 + \rho g h) dA = \int_A (p_0 + \rho g y \operatorname{sen}\theta) dA$$

$$F_R = p_0 \int_A dA + \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y\, dA = p_0 A + \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y\, dA$$

La integral es el primer momento del área superficial en torno al eje x, el cual puede escribirse

$$\int_A y\,dA = y_c A$$

donde y_c es la coordenada y del *centroide* del área, A. De tal modo,

$$F_R = p_0 A + \rho g \operatorname{sen}\theta\, y_c A = (p_0 + \rho g h_c)A = p_c A \qquad F_R$$

donde p_c es la presión en el líquido en la posición del centroide de área A. Este resultado es válido para cualquier presión, p_0, en la superficie libre del líquido. Cuando p_0 es la presión atmosférica (presión manométrica cero) y actúa sobre ambos lados de la superficie, p_0 no contribuye a la fuerza hidrostática *neta* y, por lo tanto, puede omitirse.

Para encontrar expresiones relativas a las coordenadas del centro de presión, admitimos que el momento de la fuerza resultante en torno a cualquier eje debe ser igual al momento de la fuerza distribuida alrededor del mismo eje. Al tomar los momentos en torno al eje x, resulta

$$y' F_R = \int_A yp\,dA$$

Sustituyendo $F_R = \rho g \operatorname{sen}\theta\, y_c A$, $p = \rho g h$, y $h = y \operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$y' \rho g \operatorname{sen}\theta\, y_c A = \int_A y \rho g h\,dA = \int_A y^2 \rho g \operatorname{sen}\theta\,dA = \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A y^2\,dA$$

Considerando que $\int_A y^2\,dA = I_{xx}$, el segundo momento del área en torno al eje x, encontramos que

$$y' = I_{xx}/Ay_c$$

Del teorema de ejes paralelos, $I_{xx} = I_{\hat{x}\hat{x}} + Ay_c^2$, donde $I_{\hat{x}\hat{x}}$ es el segundo momento de área en torno al eje centroidal $\hat{x}$,

$$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{Ay_c} \qquad y'$$

Tomando los momentos en torno al eje y, se obtiene $x' F_R = \int_A xp\,dA$.

La sustitución de F_R, p y h como antes, produce

$$x' \rho g \operatorname{sen}\theta\, y_c A = \int_A x \rho g h\,dA = \int_A xy \rho g \operatorname{sen}\theta\,dA = \rho g \operatorname{sen}\theta \int_A xy\,dA$$

Viendo que $\int_A xy\,dA = I_{xy}$, el producto de inercia del área, obtenemos

$$x' = I_{xy}/Ay_c$$

Del teorema de ejes paralelos, $I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + Ax_c y_c$, donde $I_{\hat{x}\hat{y}}$ es el producto de inercia del área con respecto al eje centroidal $\hat{x}\hat{y}$. Entonces,

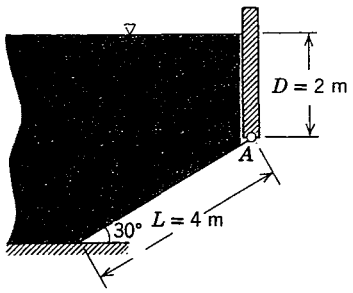
$$x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{Ay_c} \qquad x'$$

Nota: Las ecuaciones deducidas para x' y y' son válidas sólo cuando la presión en la superficie libre es la atmosférica.

{ Este problema se incluye para ilustrar la obtención de las ecuaciones de cálculo que sería conveniente utilizar si varios de tales problemas tuvieran que resolverse. }

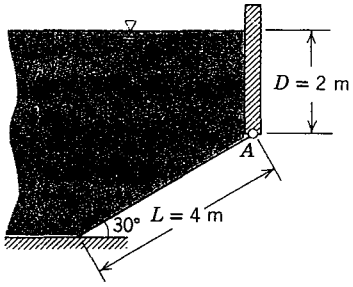
EJEMPLO 3.5 Fuerza resultante sobre una superficie plana inclinada sumergida

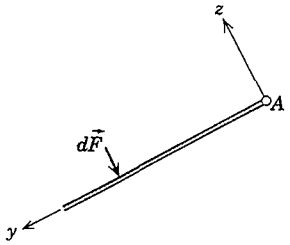
La superficie inclinada que se muestra, articulada a lo largo de A, tiene 5 m de ancho. Determine la fuerza resultante, $\vec{F}_R$, del agua sobre la superficie inclinada.



PROBLEMA EJEMPLO 3.5

DATOS: Compuerta rectangular, articulada a lo largo de A, $w = 5$ m.





ENCUENTRE: La fuerza resultante, $\vec{F}_R$, del agua sobre la compuerta.

SOLUCIÓN:

Para determinar completamente $\vec{F}_R$, debemos especificar: *a*) la magnitud, *b*) la dirección y *c*) la línea de acción de la fuerza resultante.

Ecuaciones básicas: $\vec{F}_R = -\int p\, d\vec{A}$ $\qquad \dfrac{dp}{dh} = \rho g$

Considere la compuerta soportada a lo largo de A, yaciendo en el plano xy, con las coordenadas que se indican.

$$\vec{F}_R = -\int_A p\, d\vec{A} = -\int_A p w\, dy\, \hat{k} \qquad (d\vec{A} = w\, dy\, \hat{k})$$

Necesitamos ahora p como función de y para efectuar la integración. De la relación básica presión-altura,

$$\frac{dp}{dh} = \rho g \qquad \text{por lo que} \qquad dp = \rho g\, dh \qquad \text{y} \qquad \int_{p_a}^{p} dp = \int_0^h \rho g\, dh$$

Suponiendo ρ = constante,

$$p = p_a + \rho g h \qquad \{\text{Esto produce } p = p(h). \text{ Necesitamos } p = p(y).\}$$

Del diagrama

$$h = D + y \operatorname{sen} 30° \qquad \text{donde } D = 2 \text{ m}$$

Como estamos interesados en la fuerza resultante del agua sobre la compuerta, eliminamos entonces p_a y obtenemos

$$p = \rho g(D + y \operatorname{sen} 30°)$$

Advierta que la cara de la base de la compuerta está abierta a la atmósfera y sujeta también a p_a. Por tanto,

$$\vec{F}_R = -\int_A p\, d\vec{A} = -\int_0^L \rho g(D + y \operatorname{sen} 30°) w\, dy\, \hat{k}$$

$$= -\rho g w \left[Dy + \frac{y^2}{2} \operatorname{sen} 30° \right]_0^L \hat{k} = -\rho g w \left[DL + \frac{L^2}{2} \operatorname{sen} 30° \right] \hat{k}$$

$$= -999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5 \text{ m} \left[2 \text{ m} \times 4 \text{ m} + \frac{16 \text{ m}^2}{2} \times \frac{1}{2} \right] \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \hat{k}$$

$$\vec{F}_R = -588 \hat{k} \text{ kN} \qquad \{\text{La fuerza actúa en la dirección negativa de } z\}\ \vec{F}_R$$

Para encontrar la línea de acción de la fuerza resultante, $\vec{F}_R$, debemos reconocer que la línea tiene que ser tal que el momento de la fuerza resultante en torno a cualquier eje sea igual al momento de la fuerza distribuida alrededor del mismo eje. Considerando los momentos en torno al eje x a través del punto A (0, 0, 0), obtenemos

$$F_R y' = \int_A yp\, dA$$

Entonces

$$y' = \frac{1}{F_R} \int_A yp\, dA = \frac{1}{F_R} \int_0^L ypw\, dy = \frac{\rho g w}{F_R} \int_0^L y(D + y \operatorname{sen} 30°)\, dy$$

$$= \frac{\rho g w}{F_R} \left[\frac{Dy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \operatorname{sen} 30° \right]_0^L = \frac{\rho g w}{F_R} \left[\frac{DL^2}{2} + \frac{L^3}{3} \operatorname{sen} 30° \right]$$

$$= 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{5 \text{ m}}{5.88 \times 10^5 \text{ N}} \left[\frac{2 \text{ m} \times 16 \text{ m}^2}{2} + \frac{64 \text{ m}^3}{3} \times \frac{1}{2} \right] \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$y' = 2.22 \text{ m}$$

También, de la consideración de los momentos en torno al eje y a través del punto A,

$$x' = \frac{1}{F_R} \int_A xp\, dA$$

Cuando calcule el momento de la fuerza distribuida (lado derecho), recuerde de sus cursos anteriores de estática, que el centroide del elemento de área debe utilizarse para "x". Puesto que el elemento de área es de ancho constante, entonces $x = w/2$, y

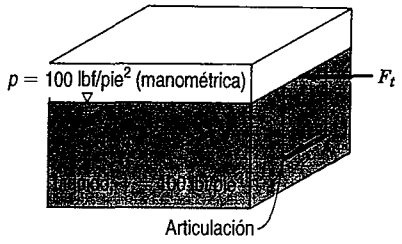
$$x' = \frac{1}{F_R} \int_A \frac{w}{2} p\, dA = \frac{w}{2F_R} \int_A p\, dA = \frac{w}{2} 2.5 \text{ m}$$

$\vec{r}' = 2.5\hat{i} + 2.22\hat{j}$ m — { La línea de acción de $\vec{F}_R$ se encuentra a lo largo del eje z negativo que pasa por $\vec{r}$ } — $\vec{r}'$

{ Este problema ilustra el procedimiento utilizado para determinar la fuerza resultante, $\vec{F}_R$, equivalente a la fuerza distribuida sobre una superficie plana sumergida. }

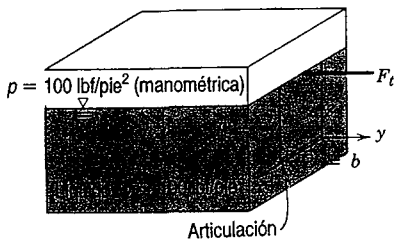
EJEMPLO 3.6 Fuerza sobre una superficie plana vertical sumergida con presión manométrica diferente de cero en la superficie libre

La puerta que se muestra en el lado del tanque está articulada a lo largo de su borde inferior. Una presión de 100 psfg se aplica en la superficie libre del líquido. Encuentre la fuerza, F_t, requerida para mantener la puerta cerrada.



PROBLEMA EJEMPLO 3.6

DATOS: La puerta que se muestra en la figura; el eje x está a lo largo de la articulación.



ENCUENTRE: La fuerza requerida para mantener la puerta cerrada.

SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas: $F_R = \int p\, dA$ $\qquad \frac{dp}{dh} = \rho g$ $\qquad \sum \vec{M} = 0$

La suma de los momentos en torno al eje de articulación produce

$$\sum M_x = 0 = LF_t - \int z\, dF = 0$$

$$\therefore F_t = \frac{1}{L}\int z\, dF = \frac{1}{L}\int z\, p\, dA = \frac{1}{L}\int_0^L z\, p\, b\, dz$$

Para resolver con respecto a F_t necesitamos conocer p como función de z:

$$\frac{dp}{dh} = \rho g = \gamma \quad \text{y} \quad dp = \gamma\, dh$$

Por tanto,

$$p - p_0 = \int_{p_0}^{p} dp = \int_0^h \gamma dh \quad \text{de modo que} \quad p = p_0 + \gamma h$$

3-5.2 Fuer

Como la presión atmosférica actúa sobre el exterior de la puerta, la presión p_0 en la expresión anterior debe ser la presión manométrica. Con $p = p_0 + \gamma h$ y $h = L - z$,

$$F_t = \frac{1}{L}\int_0^L z[p_0 + \gamma(L-z)]b\,dz = \frac{b}{L}\int_0^L p_0 z\,dz + \frac{\gamma b}{L}\int_0^L (Lz - z^2)\,dz$$

$$= \frac{p_0 b z^2}{2L}\Big]_0^L + \frac{\gamma b}{L}\left[\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^L$$

$$= \frac{p_0 bL}{2} + \gamma bL^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{p_0 bL}{2} + \frac{\gamma bL^2}{6}$$

$$= 100\ \frac{\text{lbf}}{\text{pie}^2} \times 2\ \text{pie} \times 3\ \text{pie} \times \frac{1}{2} + \frac{100\ \text{lbf}}{\text{pie}^3} \times 2\ \text{pie} \times 9\ \text{pie}^2 \times \frac{1}{6}$$

$F_t = 600$ lbf ← F_t

Este problema ilustra:
i) La inclusión de una presión manométrica diferente de cero en la superficie libre del líquido.
ii) El uso directo del momento distribuido sin evaluar por separado la fuerza resultante y la línea de aplicación.

3-5.2 Fuerza hidrostática sobre una superficie curva sumergida

La determinación de la fuerza hidrostática sobre una superficie curva sumergida es un poco más complicada que el cálculo de la fuerza sobre una superficie plana. La fuerza hidrostática sobre un elemento infinitesimal de una superficie curva, $d\vec{A}$, actúa normal a la superficie. Sin embargo, la fuerza de presión diferencial sobre cada elemento de la superficie actúa en una dirección diferente por causa de la curvatura de la superficie. Explicar este cambio en la dirección hace que el problema sea un poco más complicado.

¿Qué hacemos normalmente cuando deseamos sumar una serie de vectores de fuerza que actúan en diferentes direcciones? El procedimiento usual es sumar las componentes de los vectores relativas a un sistema de coordenadas conveniente.

Considere la superficie curva que se muestra en la figura 3.6. La fuerza de presión actuando sobre el elemento de área, $d\vec{A}$, está dada por

$$d\vec{F} = -p\,d\vec{A} \tag{3.9}$$

La fuerza resultante también en este caso está dada por

$$\vec{F}_R = -\int_A p\,d\vec{A} \tag{3.10}$$

Podemos escribir

$$\vec{F}_R = \hat{i}F_{R_x} + \hat{j}F_{R_y} + \hat{k}F_{R_z} \tag{3.13}$$

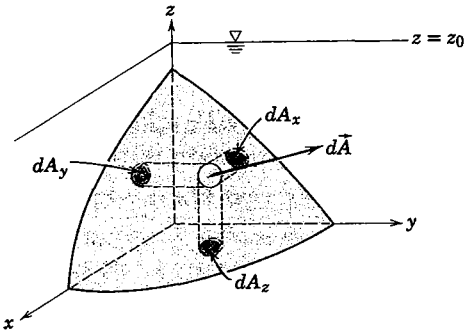


Fig. 3.6 Superficie curva sumergida.

donde F_{R_x}, F_{R_y} y F_{R_z} son las componentes de $\vec{F}_R$ en las direcciones positivas x, y y z, respectivamente.

Para evaluar la componente de la fuerza en una dirección determinada, tomamos el producto punto de la fuerza con el vector unitario en la dirección dada. Por ejemplo, tomando el producto punto de cada lado de la ecuación 3.10 con el vector unitario $\hat{\imath}$, se obtiene

$$F_{R_x} = \int dF_x = \vec{F}_R \cdot \hat{\imath} = \int d\vec{F} \cdot \hat{\imath} = -\int_A p\, d\vec{A} \cdot \hat{\imath} = -\int_{A_x} p\, dA_x$$

donde dA_x es la proyección de $d\vec{A}$ sobre el plano perpendicular al eje x (véase la figura 3.6).

En vista de que, en cualquier problema, la dirección de la componente de fuerza puede determinarse por inspección, no es necesario el uso de vectores. En general, la magnitud de la componente de la fuerza resultante en la dirección l está determinada por

$$F_{R_l} = \int_{A_l} p\, dA_l \tag{3.14}$$

donde dA_l es la proyección del elemento de área dA sobre el plano perpendicular a la dirección l. La línea de acción de cada componente de la fuerza resultante se encuentra admitiendo que el momento de la componente de la fuerza resultante, en torno a un eje dado, debe ser igual al momento de la componente de fuerza distribuida correspondiente, alrededor del mismo eje.

La componente vertical de la fuerza hidrostática resultante sobre una superficie curva sumergida es igual al peso total del líquido directamente arriba de la superficie. Esto puede verse tomando el producto punto de la ecuación 3.9 con el vector unitario $\hat{k}$, para obtener

$$dF_z = -p\, dA_z$$

Con la superficie libre a la presión atmosférica, entonces $p = \rho g\, h$, y

$$dF_z = -\rho g h\, dA_z = -\rho g\, d\forall$$

donde $\rho g h\, dA_z = \rho g\, d\forall$ es el peso de un cilindro diferencial de líquido arriba del elemento de área superficial, dA_z, extendiéndose una distancia h desde la superficie curva hasta la superficie libre. La componente vertical de la fuerza resultante se obtiene integrando sobre toda la superficie sumergida. De tal modo,

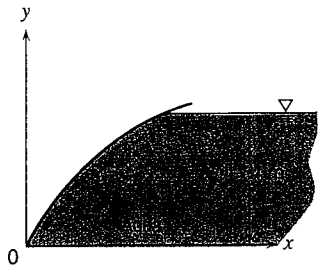
$$F_z = -\int_{A_z} \rho g h \, dA_z = -\int_{\forall} \rho g \, d\forall = -\rho g \forall$$

El signo menos indica que una superficie curva con una proyección positiva dA_z se somete a una fuerza en la dirección z negativa. La línea de acción de la componente de la fuerza vertical pasa por el centro de gravedad del volumen del líquido entre la superficie sumergida y la superficie libre del líquido.

Hemos mostrado que la fuerza hidrostática resultante sobre una superficie curva sumergida se especifica en términos de sus componentes. Para determinar las componentes y sus correspondientes líneas de acción, procedemos para cada componente del mismo modo que lo hicimos para las superficies planas sumergidas. Cuando están presentes las tres componentes, no coincidirán necesariamente las líneas de acción de las componentes de la fuerza resultante; la resultante completa no puede expresarse como una sola fuerza. En la mayor parte de los problemas, las componentes paralela y perpendicular a la superficie libre del líquido son las que interesan.

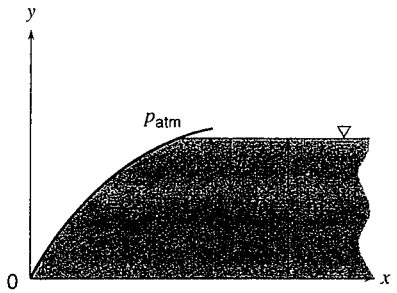
EJEMPLO 3.7 Componentes de fuerza sobre una superficie curva sumergida

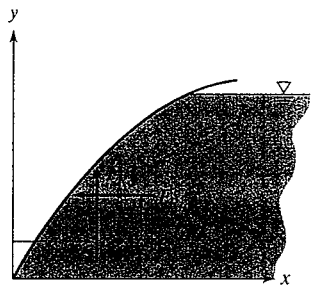
La compuerta mostrada tiene un ancho constante, $w = 5$ m. La ecuación de la superficie es $x = y^2/a$, donde $a = 4$ m. La profundidad del agua a la derecha de la compuerta es $D = 4$ m. Encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante producida por el agua y la línea de acción de cada una de ellas.



PROBLEMA EJEMPLO 3.7

DATOS: Una compuerta de ancho constante, $w = 5$ m.
La ecuación de la superficie en el plano xy es $x = y^2/a$, donde $a = 4$ m.
El agua alcanza una profundidad $D = 4$ m a la derecha de la compuerta.





ENCUENTRE: F_{R_h}, F_{R_v}, y la línea de acción de cada una.

SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas: $\vec{F}_R = -\int p \, d\vec{A}$ $\qquad \frac{dp}{dh} = \rho g$

$$F_{R_H} = \int_0^D pw\,dy \qquad F_{R_V} = \int_0^{D^2/a} pw\,dx$$

Para poder integrar, necesitamos expresiones relativas a $p(y)$ y $p(x)$ a lo largo de la superficie de la compuerta.

$$\frac{dp}{dh} = \rho g, \quad \text{por lo que } dp = \rho g\,dh \qquad \text{y} \qquad \int_{p_a}^{p} dp = \int_0^h \rho g\,dh$$

Si suponemos ρ = constante, entonces

$$p = p_a + \rho g h$$

Como la presión atmosférica actúa tanto sobre la parte superior de la compuerta como sobre la superficie libre del líquido, no hay una contribución neta de la fuerza de la presión atmosférica. Por tanto, al determinar la fuerza debida al líquido, tomamos $p = \rho gh$.

Después de esto necesitamos una expresión para $h = h(y)$ y $h = h(x)$ a lo largo de la superficie de la compuerta, donde $h = D - y$. Puesto que la ecuación de la superficie de la compuerta es $x = y^2/a$, entonces a lo largo de la compuerta $y = \sqrt{a}x^{1/2}$ y por ello, h puede escribirse también como $h = D - \sqrt{a}x^{1/2}$. Sustituyendo las ecuaciones apropiadas para h en las expresiones para F_{R_H} y F_{R_V} da como resultado

$$F_{R_H} = \int_0^D pw\,dy = \int_0^D \rho g h w\,dy = \rho g w \int_0^D h\,dy = \rho g w \int_0^D (D-y)\,dy$$

$$= \rho g w \left[Dy - \frac{y^2}{2}\right]_0^D = \rho g w \left[D^2 - \frac{D^2}{2}\right] = \frac{\rho g w D^2}{2}$$

$$F_{R_H} = 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\text{ m} \times \frac{(4)^2}{2}\text{ m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} = 392\text{ kN} \longleftarrow F_{R_H}$$

$$F_{R_V} = \int_0^{D^2/a} pw\,dx = \int_0^{D^2/a} \rho g h w\,dx = \rho g w \int_0^{D^2/a} h\,dx$$

$$= \rho g w \int_0^{D^2/a} (D - \sqrt{a}x^{1/2})\,dx$$

$$= \rho g w \left[Dx - \frac{2}{3}\sqrt{a}x^{3/2}\right]_0^{D^2/a} = \rho g w \left[\frac{D^3}{a} - \frac{2}{3}\sqrt{a}\frac{D^3}{a^{3/2}}\right] = \frac{\rho g w D^3}{3a}$$

$$F_{R_V} = 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\text{ m} \times \frac{(4)^3\text{ m}^3}{3} \times \frac{1}{4\text{ m}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} = 261\text{ kN} \longleftarrow F_{R_V}$$

Para encontrar la línea de acción de F_{R_H}, el momento de F_{R_H} en torno al eje z a través de O, debe ser igual a la suma de los momentos de dF_H en torno al mismo eje.

$$y' F_{R_H} = \int_{A_x} yp\,dA_x \qquad \text{y} \qquad y' = \frac{1}{F_{R_H}} \int_{A_x} yp\,dA_x$$

$$y' = \frac{1}{F_{R_H}} \int_0^D ypw\,dy = \frac{1}{F_{R_H}} \int_0^D y\rho g h w\,dy = \frac{\rho g w}{F_{R_H}} \int_0^D y(D-y)\,dy$$

** 3-6 FLC

$$= \frac{\rho g w}{F_{R_H}} \left[\frac{D y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^D$$

$$y' = \frac{\rho g w D^3}{6 F_{R_H}} = \frac{\rho g w D^3}{6} \left[\frac{2}{\rho g w D^2} \right] = \frac{D}{3} = \frac{4 \text{ m}}{3} = 1.33 \text{ m} \quad \longleftarrow y'$$

Para encontrar la línea de acción de F_{R_V}, el momento de F_{R_V} alrededor del eje z a través de O, debe ser igual a la suma de los momentos de dF_V en torno al mismo eje.

$$x' F_{R_V} = \int_{A_y} x p \, dA_y \qquad \text{y} \qquad x' = \frac{1}{F_{R_V}} \int_{A_y} x p \, dA_y$$

$$x' = \frac{1}{F_{R_V}} \int_0^{D^2/a} xpw \, dx = \frac{1}{F_{R_V}} \int_0^{D^2/a} x \rho g h w \, dx = \frac{\rho g w}{F_{R_V}} \int_0^{D^2/a} x(D - \sqrt{a} x^{1/2}) \, dx$$

$$= \frac{\rho g w}{F_{R_V}} \left[\frac{D}{2} x^2 - \frac{2}{5} \sqrt{a} x^{5/2} \right]_0^{D^2/a} = \frac{\rho g w}{F_{R_V}} \left[\frac{D^5}{2a^2} - \frac{2}{5} \sqrt{a} \frac{D^5}{a^{5/2}} \right] = \frac{\rho g w D^5}{10 F_{R_V} a^2}$$

$$= \frac{\rho g w D^5}{10 a^2} \left[\frac{3a}{\rho g w D^3} \right]$$

$$x' = \frac{3D^2}{10a} = \frac{3}{10} \times (4)^2 \text{ m}^2 \times \frac{1}{4 \text{ m}} = 1.2 \text{ m} \quad \longleftarrow x'$$

{ Este problema ejemplifica el cálculo de las componentes de la fuerza resultante sobre una superficie curva sumergida. }

** 3-6 FLOTACIÓN Y ESTABILIDAD

Si un objeto está sumergido en un líquido, o flotando en su superficie, la fuerza vertical neta que actúa sobre él debido a la presión del líquido se llama *flotación*. Considere un objeto totalmente sumergido en un líquido estático, como se muestra en la figura 3.7.

La fuerza vertical sobre el cuerpo, debida a la presión hidrostática, puede encontrarse más fácilmente considerando elementos de volumen cilíndricos similares al que se muestra en la figura 3.7. En un fluido estático

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

Integrando con ρ constante, se obtiene

$$p = p_0 + \rho g h$$

La fuerza vertical neta sobre el elemento es

$$dF_z = (p_0 + \rho g h_2) \, dA - (p_0 + \rho g h_1) \, dA = \rho g (h_2 - h_1) \, dA$$

Pero $(h_2 - h_1) dA = d\forall$, es el volumen del elemento. Por tanto

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

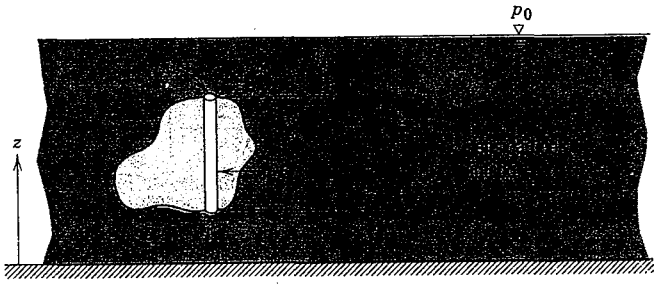


Fig. 3.7 Cuerpo inmerso en un líquido estático.

$$F_z = \int dF_z = \int_{\forall} \rho g \, d\forall = \rho g \forall \tag{3.15}$$

donde $\forall$ es el volumen del objeto, de modo que la fuerza vertical neta debida a la presión, o flotación, sobre el objeto, es igual a la fuerza de gravedad sobre el líquido desplazado por el objeto. Se dice que esta relación fue utilizada por Arquímedes en el año 220 a.C. para determinar el contenido de oro en la corona del Rey Hiero II. Por ello, a menudo se le llama "Principio de Arquímedes". En las aplicaciones técnicas más actuales, la ecuación 3.15 se emplea para diseñar embarcaciones, dispositivos de flotación y batíscafos.

Es necesario subrayar que la ecuación 3.15 predice la fuerza vertical neta sobre un cuerpo que está totalmente sumergido en un fluido simple. En casos de inmersión parcial, deben considerarse directamente las fuerzas superficiales en lugar de intentar tratar con los volúmenes desplazados.

La línea de acción de la fuerza de flotación puede determinarse utilizando los métodos de la sección 3-5.2. Puesto que en los cuerpos flotantes están en equilibrio las fuerzas másicas y de flotación, la localización de la línea de acción de la fuerza de flotación determina la estabilidad, como se muestra en la figura 3.8.

La fuerza másica debida a la gravedad sobre un objeto actúa a través de su centro de gravedad, CG. En la figura 3.8*a*, la fuerza de flotación está desequilibrada y produce un par que tiende a mover la embarcación hacia la derecha. En la figura 3.8*b*, el par tiende a volcar la embarcación. En la navegación, las cargas del viento producen fuerzas adicionales sobre las embarcaciones; dichas fuerzas deben considerarse al analizar la estabilidad.

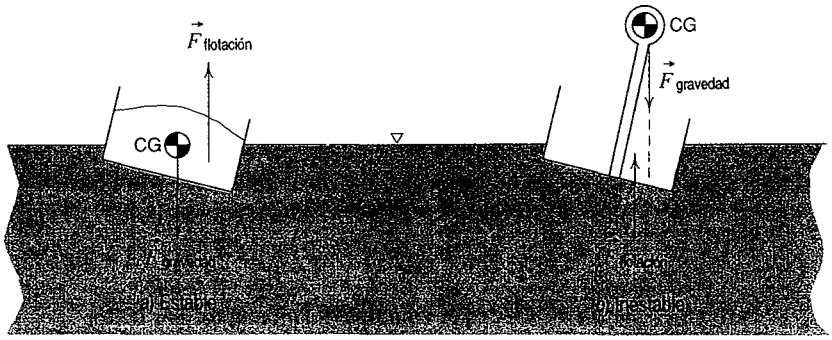


Fig. 3.8 Estabilidad de cuerpos flotantes.

** 3-7 FLUIDOS EN EL MOVIMIENTO DE CUERPO RÍGIDO

Un fluido en un cuerpo rígido en movimiento se mueve sin deformación, como si fuera un cuerpo sólido. Puesto que no hay deformación, no puede haber ahí esfuerzo de corte. En consecuencia, el único esfuerzo superficial sobre cada elemento de fluido es el que se debe a la presión.

Una partícula de fluido mantiene su identidad en el movimiento de un cuerpo rígido porque el fluido no se deforma. Como en el caso del fluido estático, podemos aplicar la segunda ley de movimiento de Newton para determinar el campo de presión que resulta de un movimiento de cuerpo rígido especificado.

En la sección 3-1 derivamos una expresión para la fuerza total debida a la presión y a la gravedad que actuaban sobre una partícula de fluido de volumen $d\forall$. Obtuvimos

$$d\vec{F} = (-\text{grad } p + \rho\vec{g})d\forall$$

o

$$\frac{d\vec{F}}{d\forall} = -\text{grad } p + \rho\vec{g} \tag{3.2}$$

La segunda ley de Newton se escribió

$$d\vec{F} = \vec{a}\, dm = \vec{a}\rho\, d\forall \quad \text{o} \quad \frac{d\vec{F}}{d\forall} = \rho\vec{a}$$

Sustituyendo la ecuación 3.2, obtenemos

$$-\text{grad } p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a} \tag{3.16}$$

El significado físico de cada término en esta ecuación es

$$-\text{grad}\, p \quad + \quad \rho\,\vec{g} \quad = \quad \rho\,\vec{a}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{fuerza neta de presión}\\ \text{por unidad de volumen}\\ \text{en un punto}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{fuerza másica por}\\ \text{unidad de volumen}\\ \text{en un punto}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{masa por}\\ \text{unidad de}\\ \text{volumen}\end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{l}\text{aceleración de}\\ \text{la partícula}\\ \text{de fluido}\end{array}\right\}$$

Esta ecuación vectorial consta de tres ecuaciones componentes que deben satisfacerse individualmente. En coordenadas rectangulares, las ecuaciones componentes son

$$\left.\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x & \text{dirección } x \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y & \text{dirección } y \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z & \text{dirección } z \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

Las ecuaciones componentes para otros sistemas de coordenadas pueden escribirse empleando la expresión apropiada para grad p. En coordenadas cilíndricas el operador vectorial, ∇, está dado por

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.18}$$

donde $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ son vectores unitarios en las direcciones r y θ, respectivamente. Por tanto,

$$\text{grad } p = \nabla p = \hat{e}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.19}$$

EJEMPLO 3.8 Líquido en el movimiento de un cuerpo rígido con aceleración lineal

Como resultado de un ascenso, lo transfieren de su adscripción presente a otra localidad. Usted debe transportar una pecera en la parte posterior de su camioneta. La pecera es de 12 × 24 × 12 pulg. ¿Qué cantidad de agua debe dejar usted en la pecera para asegurar razonablemente que no se derramará durante el viaje?

PROBLEMA EJEMPLO 3.8

DATOS: Pecera de 12 × 24 × 12 pulg llena parcialmente con agua que se transportará en una camioneta.

ENCUENTRE: La profundidad permisible del agua para asegurar de manera razonable que no se derramará durante el viaje.

SOLUCIÓN:

El primer paso en la solución es formular un enfoque que traslade el problema general a uno más específico.

Advertimos que habrá movimiento de la superficie del agua como resultado del desplazamiento del automóvil sobre protuberancias en la carretera, curvas, etc. No obstante, suponemos que el efecto principal sobre la superficie del agua es producto de aceleraciones lineales (y desaceleraciones) del auto; despreciaremos los derramamientos.

De este modo, hemos reducido el problema al de determinar el efecto de una aceleración lineal sobre la superficie libre. Aún no hemos decidido la orientación del tanque relativa a la dirección del movimiento. Si se elige la coordenada x en la dirección de movimiento, ¿debemos alinear el tanque con el lado largo paralelo o con él perpendicular a la dirección de movimiento?

Si se supone que no habrá movimiento relativo en el agua, debemos asumir que estamos tratando con una aceleración constante, a_x. ¿Cuál es la forma de la superficie libre bajo estas condiciones?

Vamos a volver a enunciar el problema para responder las preguntas originales sin hacer ninguna suposición restrictiva al principio.

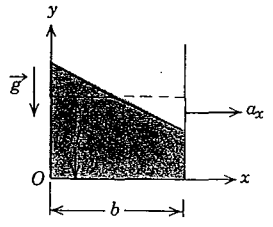
DATOS: Pecera parcialmente llena con agua (a una profundidad d pulg) sujeta a aceleración lineal constante, a_x. La altura de la pecera es de 12 pulg; la longitud paralela a la dirección de movimiento es b pulg. El ancho perpendicular a la dirección del movimiento es c pulg.

ENCUENTRE:

a) La forma de la superficie libre bajo a_x constante.

b) La altura permisible del agua, d, para evitar el derramamiento como función de a_x y de la orientación de la pecera.

c) La orientación óptima de la pecera y la profundidad permisible.



SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas: $$-\nabla p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}$$

$$-\left(\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \rho(\hat{i}g_x + \hat{j}g_y + \hat{k}g_z) = \rho(\hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z)$$

Puesto que p no es una función de z, $\partial p/\partial z = 0$. También, $g_x = 0$, $g_y = -g$, $g_z = 0$, y $a_y = a_z = 0$.

$$\therefore -\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} - \hat{j}\rho g = \hat{i}\rho a_x$$

Las ecuaciones componentes son:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

{Recuerde que la derivada parcial significa que todas las otras variables independientes se mantienen constantes en la diferenciación.}

El problema ahora es encontrar una expresión para $p = p(x, y)$. Esto nos permitirá encontrar la ecuación de la superficie libre, pero quizá no tengamos que hacer eso.

Puesto que la presión es $p = p(x, y)$, entonces la diferencia en la presión entre dos puntos (x, y) y $(x + dx, y + dy)$ es

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy$$

Como la superficie libre es una línea de presión constante, entonces a lo largo de ella, p = constante, por lo que $dp = 0$ y

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = -\rho a_x\, dx - \rho g\, dy$$

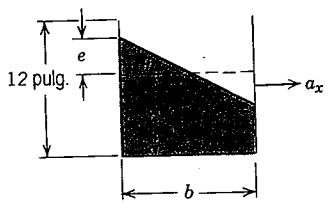
Por tanto,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{superficie libre}} = -\frac{a_x}{g}$$ ← {La superficie libre es una línea recta.}

En el diagrama,

d = profundidad original

e = altura sobre la profunidad original



b = longitud de la pecera paralela a la dirección de movimiento

$$e = \frac{b}{2}\tan\theta = \frac{b}{2}\left(-\frac{dy}{dx}\right)_{\text{superficie libre}} = \frac{b}{2}\frac{a_x}{g} \quad \left\{\text{Válida sólo para } d \le \frac{b}{2}\right\}$$

En vista de que deseamos que e sea lo más pequeña para una a_x dada, el tanque debe alinearse con la b lo menos posible. Debemos alinear el tanque con el lado largo perpendicular a la dirección de movimiento, esto es, elegir b = 12 pulg. ← b

Con $b = 12$ pulg

$$e = 6\frac{a_x}{g} \text{ pulg.}$$

El valor máximo permisible de $e = 12 - d$ pulg. Por tanto,

$$12 - d = 6\frac{a_x}{g} \quad \text{y} \quad d_{\text{máx}} = 12 - 6\frac{a_x}{g}$$

Si la a_x máxima se asume igual a $\frac{2}{3}g$, entonces el valor permisible de d es 8 pulg.

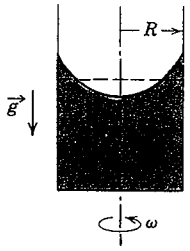
Para permitir un margen de seguridad, tal vez debamos seleccionar $d = 6$ pulg. *d*

Recuérdese que se supuso una aceleración uniforme en este problema, es decir, el automóvil tendría que manejarse con *sumo* cuidado.

Este problema se ha incluido para demostrar:
i) no todos los problemas están claramente definidos ni tienen respuestas únicas.
ii) la aplicación de la ecuación, $-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$.

EJEMPLO 3.9 Líquido en el movimiento de un cuerpo rígido con velocidad angular constante

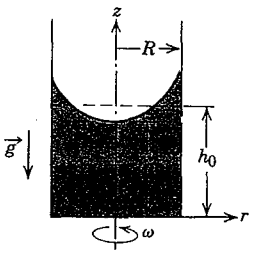
Un recipiente cilíndrico lleno parcialmente con líquido, se hace girar a una velocidad angular constante, ω, alrededor de su eje, como se indica en el diagrama. Después de un breve tiempo, no hay movimiento relativo; el líquido gira con el cilindro como si el sistema fuera un cuerpo rígido. Determine la forma de la superficie libre.



PROBLEMA EJEMPLO 3.9

DATOS: Un cilindro de líquido en rotación de cuerpo rígido con velocidad angular ω alrededor de su eje.

ENCUENTRE: La forma de la superficie libre.



SOLUCIÓN:

Ecuación básica: $$-\nabla p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}$$

Es conveniente utilizar un sistema de coordenas cilíndricas, r, θ, z. Como $g_r = g_\theta = 0$ y $g_z = -g$, entonces

$$-\left(\hat{e}_r\frac{\partial p}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\hat{k}\rho g=\rho(\hat{e}_r a_r+\hat{e}_\theta a_\theta+\hat{k}a_z)$$

Además $a_\theta = a_z = 0$ y $a_r = -\omega^2 r$.

$$\therefore -\left(\hat{e}_r\frac{\partial p}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=-\hat{e}_r\rho v^2 r+\hat{k}\rho g$$

Las ecuaciones componentes son: $\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\omega^2 r$, $\frac{\partial p}{\partial u}=0$, y $\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$

De las ecuaciones componentes, vemos que la presión no es una función de θ; sino de r y z solamente.

En virtud de que $p = p(r, z)$, el cambio diferencial, dp, en la presión entre dos puntos con coordenadas (r, θ, z) y $(r + dr, \theta, z + dz)$ está dado por

$$dp=\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_z dr+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_r dz$$

Entonces

$$dp=\rho\omega^2 r\,dr-\rho g\,dz$$

Para obtener la diferencia de presión entre un punto de referencia (r_1, z_1), donde la presión es p_1, y el punto arbitrario (r, z), donde la presión es p, debemos integrar

$$\int_{p_1}^{p} dp=\int_{r_1}^{r}\rho\omega^2 r\,dr-\int_{z_1}^{z}\rho g\,dz$$

$$p-p_1=\frac{\rho\omega^2}{2}(r^2-r_1^2)-\rho g(z-z_1)$$

Tomando el punto de referencia sobre el eje del cilindro en la superficie libre se obtiene

$$p_1=p_{\text{atm}}\qquad r_1=0\qquad z_1=h_1$$

Entonces

$$p-p_{\text{atm}}=\frac{\rho\omega^2 r^2}{2}-\rho g(z-h_1)$$

Como la superficie libre es una superficie de presión constante ($p = p_{\text{atm}}$), su ecuación está dada por

$$0=\frac{\rho\omega^2 r^2}{2}-\rho g(z-h_1)$$

o

$$z=h_1+\frac{(\omega r)^2}{2g}$$

La ecuación de la superficie libre es una parábola con vértice en el eje, en $z = h_1$.

Podemos resolver, para la altura h_1 bajo condiciones de rotación, en términos de la altura original de la superficie, h_0, en ausencia de rotación. Para hacer esto, nos servimos del hecho que muestra que el volumen del líquido debe permanecer constante. Sin rotación,

$$\forall = \pi R^2 h_0$$

Con rotación,

$$\forall = \int_0^R \int_0^z 2\pi r \, dz \, dr = \int_0^R 2\pi z r \, dr = \int_0^R 2\pi \left(h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) r \, dr$$

$$\forall = 2\pi \left[h_1 \frac{r^2}{2} + \frac{\omega^2 r^4}{8g}\right]_0^R = \pi \left[h_1 R^2 + \frac{\omega^2 R^4}{4g}\right]$$

Entonces

$$\pi R^2 h_0 = \pi \left[h_1 R^2 + \frac{\omega^2 R^4}{4g}\right]$$

y

$$h_1 = h_0 - \frac{(\omega R)^2}{4g}$$

Finalmente,

$$z = h_0 - \frac{(\omega R)^2}{4g} + \frac{(\omega r)^2}{2g}$$

$$z = h_0 - \frac{(\omega R)^2}{2g}\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad \longleftarrow \quad z(r)$$

Este problema ilustra la aplicación de la segunda ley de Newton en coordenadas cilíndricas y el comportamiento físico de un líquido con una superficie libre sujeta a la rotación de un cuerpo rígido.

3.8 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de completar el estudio del capítulo 3, usted será capaz de efectuar lo siguiente:

1. Escribir la ecuación básica de la estática de fluidos en forma vectorial e indicar el significado físico de cada término.
2. Escribir la relación básica presión-altura para un fluido estático e integrarla para así determinar la variación de la presión para cualquier variación de las propiedades del fluido.
3. Establecer la relación entre las presiones absoluta y manométrica.
4. Determinar la diferencia de presión indicada por las lecturas de diversos manómetros.
5. Definir las condiciones de temperatura y presión para la atmósfera estándar.
6. Para una superficie plana sumergida:
   a) Determinar la fuerza resultante debida al fluido que actúa sobre la superficie y su línea de acción.
   b) Determinar la(s) fuerza(s) externa(s) requerida(s) para mantener la superficie en equilibrio.

PROBLEMAS

7. Para una superficie sumergida con curvatura en un plano:
   a) Determinar las componentes de la fuerza resultante debida al fluido que actúa sobre la superficie y sus líneas de acción.
   b) Determinar la(s) fuerza(s) externa(s) necesaria(s) para mantener la superficie en equilibrio.

**8. Determinar la fuerza de flotación sobre un cuerpo sumergido en, o flotando sobre la superficie de, un líquido; determinar la estabilidad del objeto flotante.

**9. Aplicar la ecuación hidrostática básica para determinar el campo de presión y/o la forma de la superficie libre en cualquier cuerpo de fluido en el movimiento de un cuerpo rígido.

10. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionan con el material que usted ha estudiado.

PROBLEMAS

3.1 Un dispositivo conocido como calibrador de pesos muertos se emplea como patrón para calibrar manómetros mecánicos (el rango útil va de 30 kPa a 35 MPa aproximadamente). Se generan presiones conocidas cargando pesos sobre un arreglo vertical de cilindro-émbolo. El émbolo con los pesos se hace girar para minimizar los efectos de la fricción. La máxima carga conveniente es de 100 kg. Determine un tamaño de émbolo apropiado para cubrir el rango de presión especificado.

3.2 La ecuación presión-altura para un fluido estático incompresible se integró suponiendo que la aceleración gravitacional, g, era constante. La ley de la atracción gravitacional es

$$g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

donde R es el radio de la Tierra y h es la altitud sobre la superficie. Encuentre la variación porcentual en g para los siguientes dos casos (considere $R = 4000$ millas): *a*) $h = 6$ millas de altitud y *b*) $h = -4$ millas de altitud.

3.3 Un montacargas neumático se va a diseñar para un taller de reparaciones. La presión manométrica del aire que provee la instalación es de 600 kPa. El montacargas debe levantar automóviles de hasta 3000 kg. La fricción en el mecanismo de cilindro-émbolo y los sellos generan una fuerza de 980 N que se opone al movimiento del émbolo. Determine el diámetro del émbolo necesario para brindar la fuerza de elevación. ¿Qué presión debe mantenerse en el cilindro de elevación para bajar con suavidad un auto con una masa de 895 kg?

3.4 La tubería del gasoducto de Alaska tiene un diámetro interno de 1.22 m. Se emplean espesores de pared de 11 y 14 mm. Los tramos de la tubería se taparon y probaron hidrostáticamente a una presión de 10 MPa. Calcule el esfuerzo de tensión máximo en la pared de la tubería. ¿La dirección del esfuerzo máximo en la pared de la tubería será axial o circunferencial?

3.5 Un tanque cilíndrico de diámetro $D = 0.25$ m y longitud $L = 1.3$ m se carga con nitrógeno comprimido. El gas en el tanque está a una presión absoluta de 20 MPa y a una temperatura de 20 C. Calcule la masa de gas en el tanque. Si el esfuerzo máximo permisible en la pared del tanque es 210 MPa, determine el espesor mínimo teórico de la pared del cilindro.

3.6 Un cartucho de CO_2 para un rifle de aire tiene 60 mm de largo y 16.5 mm de diámetro interior. El espesor de la pared es de 0.5 mm. La etiqueta indica que contiene 12 g de CO_2. Estime la presión máxima dentro de un cartucho completamente cargado. Suponiendo un estado de esfuerzo biaxial en la pared cilíndrica, calcule los esfuerzos máximos axial, circunferencial y cortante en la misma.

3.7 Un manómetro mecánico unido al tanque del depósito cerrado de un compresor de aire indica una

** Este objetivo se aplica a una sección que puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

presión de 827 kPa, en un día en que la altura del barómetro es 750 mm de mercurio. Calcule la presión absoluta en el tanque. ¿Qué presión indicaría el medidor si la lectura del barómetro cambiara a 775 mm de mercurio?

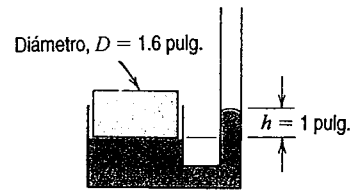
3.8 Un recipiente cerrado contiene agua a una profundidad de 5 m. La presión absoluta sobre la superficie del agua es 0.3 atm. Calcule la presión absoluta interior sobre la superficie del fondo del recipiente.

3.9 La presión de vapor del mercurio es $p_v = 2.5 \times 10^{-5}$ psia a 70 F. Calcule el error en la altura del barómetro debido a la no consideración de la presión de vapor del mercurio. ¿Sería detectable en cálculos de ingeniería?

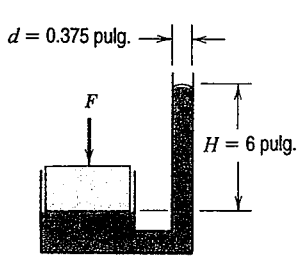
3.10 La altura real de la columna de un barómetro de mercurio es $h = 29.5$ pulg cuando $T = 70$ F. Encuentre la presión atmosférica en lbf/pie^2. Exprese la altura del barómetro en mm de mercurio a 0 C.

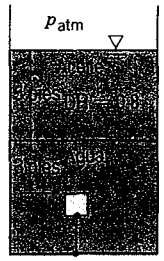
3.11 Muchas instalaciones recreativas usan estructuras de "burbuja" inflables. Una burbuja que encerrará cuatro canchas de tenis, se bosqueja como un semicilindro circular con un diámetro de 30 m y una longitud de 60 m. Los sopladores utilizados para inflar la estructura pueden mantener la presión de aire dentro de la burbuja a 10 mm de agua por arriba de la presión ambiente. La "piel" del tejido de la burbuja es de espesor uniforme. Determine la máxima densidad del material, en masa por área unitaria, que puede emplearse para fabricar una burbuja soportada por presión.

3.12 El tubo que se muestra es llenado con mercurio a 20 C. Calcule la fuerza aplicada al émbolo.



P3.12





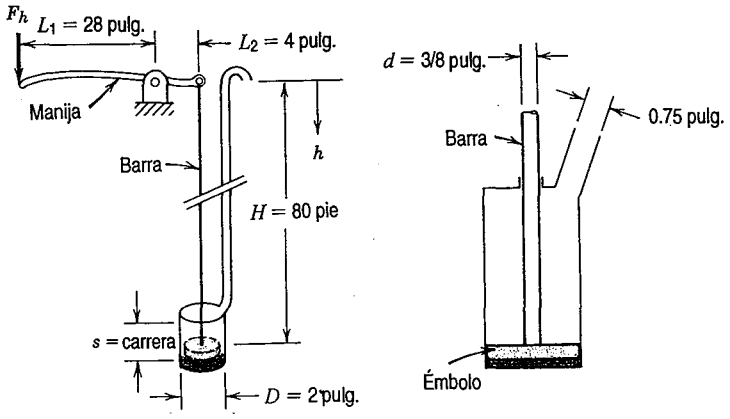
P3.13

3.13 Un cubo de 1 pie de roble sólido se mantiene sumergido mediante una correa como se muestra. Calcule la fuerza real del agua sobre la superficie de la base del cubo y la tensión en la correa.

3.14 Un cubo con aristas de 4 pulg se sumerge en un líquido y se suspende mediante una cuerda de modo que su parte superior esté horizontal y a 6 pulg por debajo de la superficie. La masa del cubo es $M = 0.569$ slug; la tensión en la cuerda es $T = 11.5$ lbf. Calcule la densidad y la densidad relativa del líquido.

3.15 La chimenea de una central eléctrica tiene una altura $H = 75$ m. La temperatura promedio del gas en la chimenea es $T_g = 210$ C. Considere el gas de la chimenea como un gas ideal con las propiedades termodinámicas del aire. La presión en la salida de la chimenea es igual a la del aire circundante a la misma elevación. Suponga condiciones estándares, fuera de la base de la chimenea, del aire al nivel del mar. Calcule la presión en el gas que se encuentra en el fondo de la chimenea. Evalúe la diferencia de presión (expresada en milímetros de agua) entre el aire y el gas de la chimenea en la base.

3.16 Se muestra una bomba de émbolo manual doméstica. El agua levantada por el émbolo se lleva hasta la descarga de la bomba mediante un tubo de 0.75 pulg de diámetro interior. La varilla y el émbolo de la bomba pesan 30 lbf. La velocidad máxima de bombeo sin problemas es de 50 carreras por minuto. La ventaja mecánica de la manija de la bomba es 7:1. Evalúe la presión sobre el émbolo cuando toda la línea de descarga está llena de agua. Calcule la fuerza sobre la manija de la bomba, necesaria para empezar a mover el agua (desprecie la fricción entre el émbolo y la cubierta). Considerando que no hay fugas, determine la carrera del émbolo requerida si se va a entregar un flujo de 2.5 gpm por medio de la bomba.



P3.16

3.17 Cierto día tranquilo, una inversión moderada provoca que la temperatura atmosférica permanezca constante a 30 C entre el nivel del mar y una altura de 5 km. Bajo estas condiciones, calcule el cambio de altitud para el cual ocurre una reducción de 1 por ciento en la presión del aire.

3.18 Determine el cambio de altitud necesario para conseguir una reducción de 15 por ciento en la densidad de una atmósfera isotérmica a 20 C.

3.19 Suele considerarse incompresible el agua cuando se evalúan las variaciones de la presión estática. En realidad, es aproximadamente 100 veces más compresible que el acero. Suponga que el módulo volumétrico es constante. Calcule el cambio porcentual en la densidad de agua que se ha llevado a una presión manométrica de 100 atm.

3.20 Chorros de agua a alta velocidad se utilizan para cortar concreto y otros materiales compuestos, por ejemplo, componentes de aviones. La presiones máximas se encuentran en la vecindad de 50 000 psi. ¿Esperaría usted razonable la suposición de densidad constante para cálculos de ingeniería?

3.21 Se usa aceite lubricante como fluido de trabajo en un sistema hidráulico de alta presión. Estime el cambio porcentual en la densidad del aceite cuando su presión se eleva de las condiciones ambiente a 300 atm (manométrica). ¿La densidad constante es un modelo razonable para el aceite?

3.22 La atmósfera de Marte se comporta como un gas ideal con masa molecular media de 32.0 y temperatura constante de 200 K. La densidad atmosférica en la superficie del planeta es $\rho = 0.015$ kg/m^3 y la gravedad marciana es 3.92 m/s^2. Calcule la densidad de la atmósfera de Marte a una altura de $z = 20$ km sobre la superficie.

3.23 Al nivel del suelo en Denver, Colorado, la presión atmosférica y la temperatura son 83.2 kPa y 25 C. Calcule la presión sobre el Monte Pike a una elevación de 2690 m sobre la ciudad suponiendo una atmósfera *a*) incompresible y *b*) adiabática.

3.24 Un recipiente cilíndrico invertido desciende lentamente bajo la superficie del agua de una alberca. El aire atrapado en el recipiente se comprime isotérmicamente conforme aumenta la presión hidrostática. Desarrolle una expresión para la altura del agua, y, dentro del recipiente, en términos de la altura del mismo, H, y de la profundidad a la que se sumerge, h.

3.25 Suele considerarse incompresible el agua cuando se evalúan las variaciones de la presión estática. En realidad, su compresibilidad puede ser importante en el diseño de vehículos sumergibles. Suponga que el módulo volumétrico del agua es constante. Calcule la presión y la densidad, a una profundidad de 4 millas, en agua de mar. Exprese el cambio de densidad como un porcentaje de la densidad al nivel del mar.

3.26 Naves de investigación oceanográfica han descendido hasta 10 km debajo del nivel del mar. A estas profundidades extremas, es posible que la compresibilidad del agua de mar sea significativa. Puede modelarse el comportamiento del agua de mar considerando que su módulo de compresibilidad volumétrica permanece constante. Empleando esta suposición, evalúe las desviaciones en la densidad

y en la presión cuando se comparan con los valores calculados, utilizando la suposición de incompresibilidad a una profundidad de 10 km en agua de mar. Exprese sus respuestas en porcentaje.

3.27 Si se considera el aire como un gas ideal, el conocimiento de la variación de la temperatura con la altitud permite determinar la presión a cualquier altitud cuando las condiciones se conocen a una elevación de referencia, z_0.

a) Para $T = T_0(1 + mz)$, obtenga la ecuación para la variación de presión, como una función de la altitud, si la presión en la elevación de referencia es p_0.

b) Utilizando los resultados de la parte *a*), demuestre que la variación de la presión en el caso isotérmico ($m \rightarrow 0$) está dada por

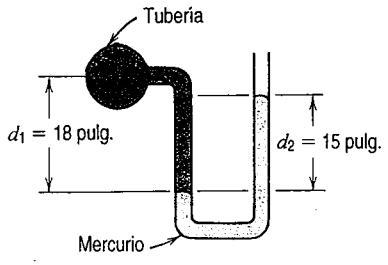
$$\frac{p}{p_0} = e^{-(g/RT_0)(z-z_0)}$$

3.28 Suponiendo constante el módulo volumétrico para agua de mar, deduzca una expresión para la variación de la densidad con la profundidad, h, bajo la superficie. Muestre que el resultado puede escribirse

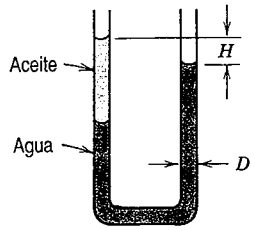
$$\rho \approx \rho_0 + bh$$

donde ρ_0 es la densidad en la superficie. Evalúe la constante b. Empleando luego la aproximación, obtenga una ecuación para el cambio de la presión con respecto a la profundidad debajo de la superficie. Determine el error porcentual en la presión, predicho mediante la solución aproximada, a una profundidad de 1000 m.

3.29 La presión en una tubería se mide utilizando el manómetro de dos fluidos que se muestra. Evalúe la presión manométrica en la tubería.



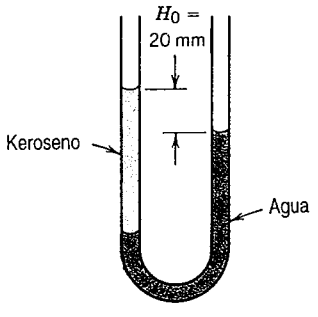
P3.29



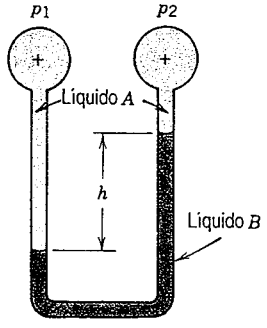
P3.30

3.30 Un manómetro se construye a partir de un tubo de vidrio con diámetro interior uniforme, $D = 6.35$ mm, como se muestra. El tubo en U se llena parcialmente con agua. Luego se añade un volumen $\forall = 3.25$ cm^3 de aceite rojo Meriam al lado izquierdo, según se indica. Calcule la altura de equilibrio, H, cuando ambas ramas del tubo en U están abiertas a la atmósfera.

3.31 El manómetro que se muestra contiene agua y keroseno. Con ambos tubos abiertos a la atmósfera,



P3.31

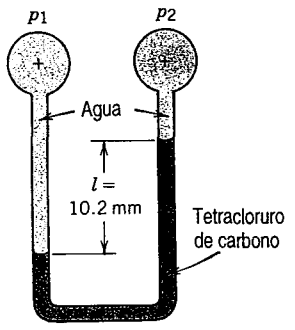


P3.32

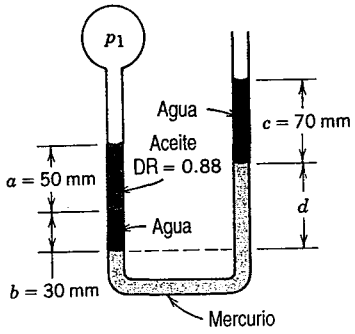
las alturas de la superficie libre difieren en $H_0 = 20.0$ mm. Determine la diferencia de altura cuando se aplica una presión de 98.0 Pa (manométrica) al tubo derecho.

3.32 El manómetro de la figura contiene dos líquidos. El líquido A tiene DR = 0.88 y el líquido B, DR = 2.95. Calcule la separación, h, cuando la diferencia de presión aplicada es $p_1 - p_2 = 870$ Pa.

3.33 Considere el manómetro de dos fluidos mostrado. Calcule la diferencia de presión aplicada.



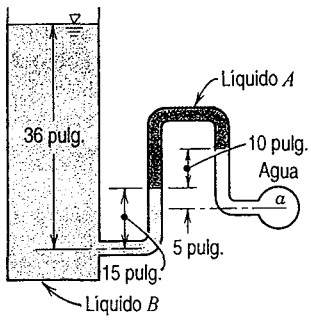
P3.33



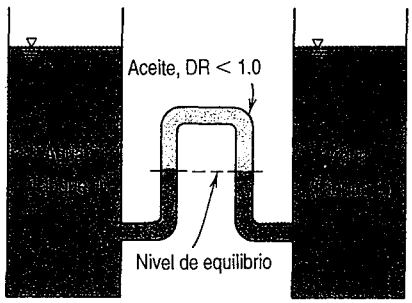
P3.34

3.34 El manómetro que se muestra contiene tres líquidos. Cuando $p_1 = 10.0$ kPa (manométrica), determine la distancia de separación, d.

3.35 Determine la presión manométrica en psig en el punto a, si el líquido A tiene DR = 0.75 y el líquido B, DR = 1.20. El líquido que rodea el punto a es agua y el tanque de la izquierda está abierto a la atmósfera.



P3.35

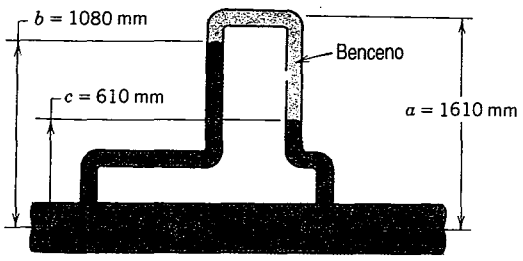


P3.36

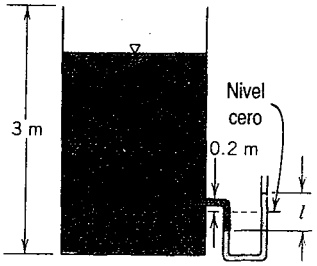
3.36 El departamento de ingeniería de la Corporación NIH evalúa un sofisticado sistema láser de 80000 dólares para medir la diferencia de nivel en dos grandes tanques de almacenamiento de agua. Es importante que se midan con exactitud pequeñas diferencias. Usted sugiere que el trabajo puede efectuarse con un arreglo de manómetro de 200 dólares. Un aceite menos denso que el agua puede utilizarse para dar una amplificación de 10:1 del movimiento del menisco; una pequeña diferencia de nivel entre los tanques provocará 10 veces la separación en los niveles de aceite en el manómetro. Determine la densidad relativa del aceite requerida para la amplificación de 10:1.

3.37 Considere un manómetro conectado como se indica. Calcule la diferencia de presión.

3.38 Un tanque rectangular, abierto a la atmósfera, se llena con agua a una profundidad de 2.5 m en la



P3.37



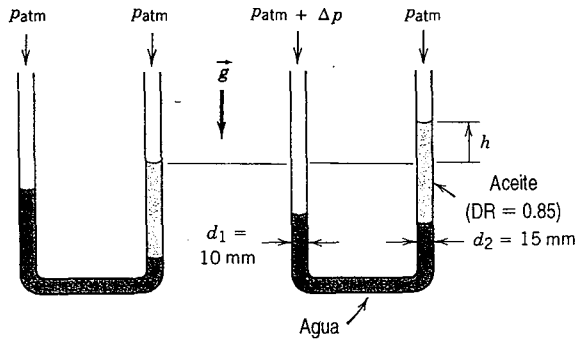
P3.38

forma indicada. Un manómetro de tubo en U se conecta al tanque en una posición a 0.7 m sobre la base del recipiente. Si el nivel cero del fluido manométrico azul Meriam es de 0.2 m por debajo de la conexión, determine la altura l después de que se ha conectado el manómetro y se ha sacado todo el aire del conducto de conexión.

3.39 El fluido del manómetro del problema 3.38 se sustituye con mercurio (mismo nivel cero). Se sella el tanque y la presión de aire se aumenta hasta un valor manométrico de 0.5 atm. Determine la altura l.

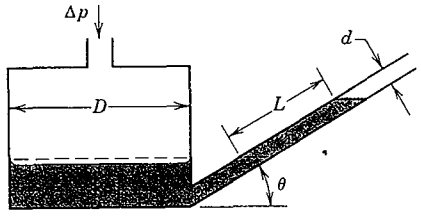
3.40 Un manómetro de depósito se calibra para usarse con un líquido de densidad relativa de 0.827. El diámetro del depósito es de $\frac{5}{8}$ pulg y el diámetro del tubo (vertical), de $\frac{3}{16}$ pulg. Calcule la distancia requerida, entre las marcas sobre la escala vertical, para 1 pulg de diferencia de presión del agua.

3.41 Un estudiante desea diseñar un manómetro con mejor sensibilidad que un tubo en U de diámetro constante lleno de agua. El concepto del estudiante implica el uso de tubos con diámetros diferentes y dos líquidos, como se muestra. Evalúe la altura, h, de este manómetro, si la diferencia de presión aplicada es $\Delta p = 250$ N/m^2. Determine la sensibilidad del manómetro.

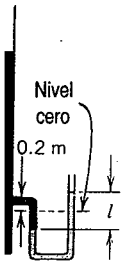


P3.41

3.42 Para el manómetro de depósito de tubo inclinado que se muestra, obtenga una expresión general para la separación del líquido, L, en la rama inclinada, en términos de la diferencia de presión aplicada, Δp. Obtenga también una expresión general para la sensibilidad del manómetro.



P3.42 a P3.48



3.43 Considere el manómetro de tubo inclinado de la figura. Suponga que $\theta = 15.0°$, $D = 72.0$ mm, $d = 6.35$ mm y el líquido es azul Meriam. La separación del líquido en el tubo inclinado es $L = 230$ mm cuando el manómetro se conecta a un diferencial de presión Δp. Evalúe Δp. Determine la sensibilidad de este manómetro.

3.44 El manómetro de depósito de tubo inclinado indicado en la figura se utiliza para medir presiones en un túnel de viento. El líquido es aceite rojo Meriam. Suponga $\theta = 15.0°$, $D = 19.1$ mm y $d = 6.35$ mm. Calcule la diferencia de presión a través del manómetro cuando la separación del líquido, a lo largo del tubo inclinado, es $L = 32.7$ mm. Evalúe la sensibilidad de este manómetro.

3.45 El manómetro de tubo inclinado que se muestra tiene $D = 90$ mm y $d = 6$ mm; el líquido es aceite rojo Meriam. La longitud del tubo de medición es 0.6 m; $\theta = 30°$. Determine la presión máxima, en Pa, que puede ser medida con este manómetro. Evalúe la sensibilidad del mismo.

3.46 El manómetro de tubo inclinado tiene $D = 3$ pulg y $d = 0.25$ pulg, y se llena con aceite rojo Meriam. Calcule el ángulo, θ, que producirá una separación de 5 pulg del aceite a lo largo del tubo inclinado, para una presión aplicada de 1 pulg de agua (manométrica). Determine la sensibilidad de este manómetro.

3.47 El mismo manómetro de tubo inclinado tiene $D = 96$ mm y $d = 8$ mm. Determine el ángulo, θ, necesario para brindar un aumento de 5:1 en la separación del líquido, L, comparado con la separación total en un manómetro normal de tubo en U. Evalúe la sensibilidad de este manómetro de tubo inclinado.

3.48 En la figura, se indican las dimensiones básicas de un manómetro de depósito de tubo inclinado en un laboratorio de mecánica de fluidos. Suponga que el área de depósito es $A_r = 277$ mm^2, $d = 3.64$ mm y $\theta = 10.5°$. Una presión manométrica equivalente a 10.2 mm de agua se aplica al depósito; el tubo inclinado está abierto a la atmósfera. Encuentre la distancia de separación, L, del líquido del manómetro a lo largo del tubo, si el líquido es aceite rojo Meriam. Determine la sensibilidad de este manómetro.

3.49 Si el tanque del problema 3.38 se sella herméticamente y se extrae lentamente agua del fondo del tanque, determine la separación, l, después de que el sistema ha alcanzado el equilibrio.

3.50 La tensión superficial provoca que el menisco ascienda en un manómetro lleno con agua. Este fenómeno de *ascenso capilar* se vuelve significativo en tubos de diámetro pequeño. Desarrolle una expresión para el ascenso capilar de agua en un tubo vertical. Demuestre que el resultado es

$$\Delta h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g R}$$

donde R es el radio de tubo y θ, el ángulo de contacto. Evalúe y grafique los resultados para el agua en tubos de 1 a 10 mm de diámetro interior..

3.51 Resuelva el problema 3.50 para la depresión capilar de mercurio en un tubo. Evalúe y grafique para tubos de entre 1 y 10 mm de diámetro interior.

3.52 Las variaciones de presión que resultan de cambios de altitud pueden provocar que "truenen" los oídos y algunas molestias para los pasajeros de avión o para aquellos que manejan en zonas montañosas. Cada individuo es afectado de manera diferente, pero en promedio truenan una vez los oídos por cada 75 m de cambio en la elevación. Determine el cambio de presión, expresado en milímetros de agua, que corresponde a esta diferencia de elevación en un día normal a una altitud de 2000 m.

3.53 Debido a que la presión desciende, el agua hierve a una temperatura menor con el aumento de la altitud. En consecuencia, las masas de pasteles y los huevos duros, entre otros alimentos, deben elaborarse con diferentes tiempos de cocimiento. Determine la temperatura de ebullición del agua a 1000 y 2000 m de elevación en un día normal y compare con el valor al nivel del mar.

3.54 Una sección de pared vertical se va a construir con mezcla de concreto vertido entre los moldes. La

pared tendrá 3 m de altura, 0.25 m de espesor y 5 m de ancho. Calcule la fuerza ejercida por la mezcla de concreto sobre cada molde. Determine la línea de aplicación de la fuerza.

3.55 Una puerta de 1 m de ancho y 1.5 m de altura se localiza en una pared vertical plana de un tanque de agua. La puerta se articula a lo largo de su borde superior, que está 1 m abajo de la superficie del agua. La presión atmosférica actúa sobre la superficie exterior de la puerta y en la superficie del agua. Determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza resultante total de todos los fluidos que actúan sobre la puerta.

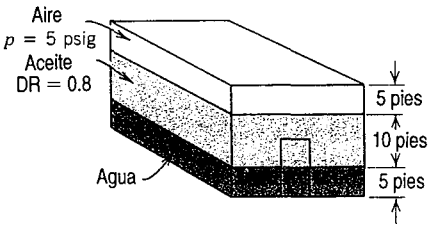
3.56 Si, en el problema 3.55, la presión manométrica de la superficie del agua aumenta a 0.3 atm, determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza resultante total de todos los fluidos que actúan sobre la puerta.

3.57 Una puerta de 1 m de ancho y 1.5 m de altura se localiza en la pared vertical plana de un tanque de agua. La puerta se articula a lo largo de su borde superior, que se encuentra a 1 m abajo de la superficie del agua. La presión atmosférica actúa sobre la superficie exterior de la puerta. Si la presión en la superficie del agua es la atmosférica, ¿qué fuerza debe aplicarse en el borde inferior de la puerta con el fin de evitar que se abra?

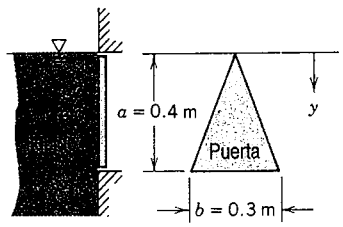
3.58 Si, en el problema 3.57, la presión manométrica en la superficie del agua es 0.5 atm, ¿qué fuerza debe aplicarse en el borde inferior de la puerta para evitar que se abra?

3.59 Un tanque con una división en el centro tiene una pequeña "puerta" de 0.5 m de ancho por 1 m de altura en la base. Esta puerta se articula a lo largo del borde superior. El lado izquierdo tiene 0.6 m de agua y el lado derecho contiene 1 m de ácido nítrico (DR = 1.5). ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) se requiere en el borde inferior de la puerta para mantenerla cerrada?

3.60 La puerta que se muestra mide 5 pies de ancho y 10 pies de altura. Encuentre la fuerza resultante de todos los fluidos que actúan sobre la puerta.



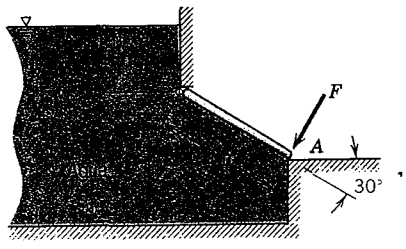
P3.60



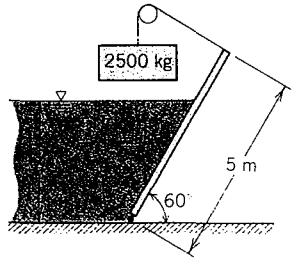
P3.61

3.61 Una puerta de acceso triangular debe incluirse en el lado de un molde que contiene concreto líquido. Empleando las coordenadas y las dimensiones que se indican, determine la fuerza resultante que actúa sobre la puerta y su punto de aplicación.

3.62 La puerta de acceso circular en el lado de una tubería vertical de agua tiene un diámetro de 0.6 m y se mantiene fija mediante ocho tornillos igualmente espaciados alrededor de la circunferencia. Si el diámetro de la tubería es de 7 m y el centro de la puerta se localiza a 12 m por debajo de la superficie libre del agua, determine *a*) la fuerza total sobre la puerta y *b*) el diámetro de tornillo apropiado.



P3.63

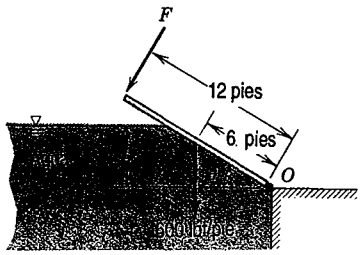


P3.64

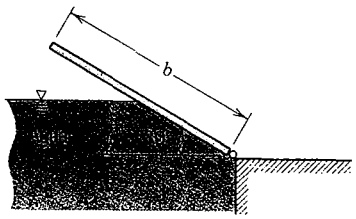
3.63 La compuerta que se muestra en P3.63 se articula en H. La compuerta tiene 2 m de ancho normal al plano del diagrama. Calcule la fuerza requerida en A para mantener la compuerta cerrada.

3.64 La compuerta que se presenta en P3.64 tiene un ancho de 3 m y, para el análisis, puede considerarse sin masa. ¿Para qué profundidad del agua esta compuerta rectangular estará en equilibrio como se muestra?

3.65 Una compuerta plana se mantiene en equilibrio mediante la fuerza F, distribuida uniformemente por ancho unitario, según se indica. La compuerta pesa 600 lbf/pie de ancho y su centro de gravedad está a 6 pies de la articulación en O. Encuentre F cuando $D = 5$ pies y $\theta = 30°$.



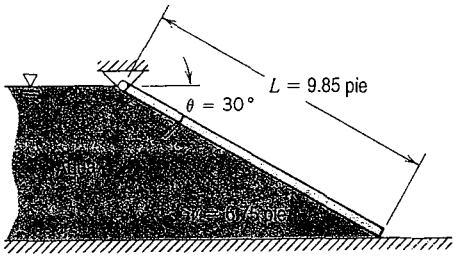
P3.65



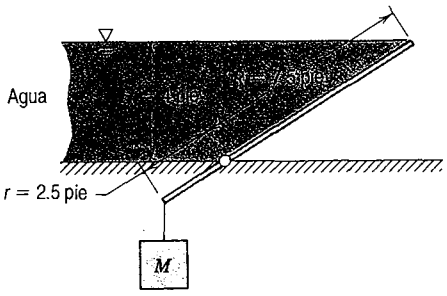
P3.66

3.66 Una compuerta de 2000 kg de masa se monta en una articulación sin fricción a lo largo del borde inferior. La longitud del depósito y la compuerta (perpendicular al plano de la figura) es de 8 m. En las condiciones de equilibrio mostradas, calcule el ancho, b, de la compuerta.

3.67 Una compuerta plana de espesor uniforme se sostiene en el agua por la parte de atrás, a la profundidad que se indica. Encuentre el peso mínimo necesario para mantener la compuerta cerrada.

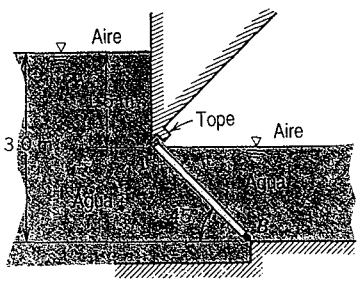


P3.67

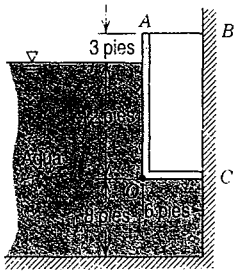


P3.68

3.68 El nivel de agua se controla mediante una compuerta plana de espesor uniforme de la manera que se indica. El ancho de la compuerta normal al diagrama es $w = 10$ pies. Determine la masa, M, necesaria para mantener el nivel del agua a una profundidad H o menor, si se desprecia la masa de la compuerta.



P3.69

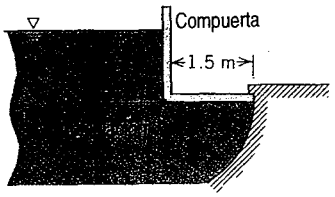


P3.70

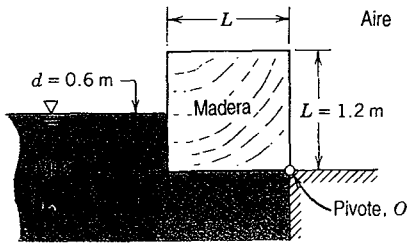
3.69 La compuerta rectangular *AB* de la figura P3.69 tiene 2 m de ancho. Encuentre la fuerza por unidad de ancho ejercida contra el tope en *A*. Suponga que la masa de la compuerta es despreciable.

3.70 La compuerta *AOC* que se muestra en P3.78 tiene un ancho de 6 pies y se articula a lo largo de *O*. Despreciando el peso de la compuerta, determine la fuerza en la barra *AB*.

3.71 Conforme asciende el agua en el lado izquierdo de la compuerta rectangular, ésta se abrirá automáticamente. ¿A qué profundidad sobre la articulación ocurrirá lo anterior? Desprecie la masa de la compuerta.



P3.71

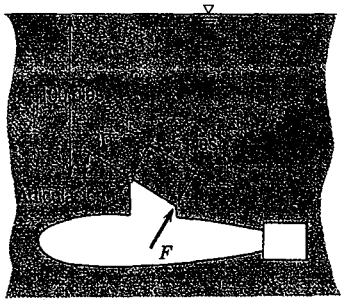


P3.72

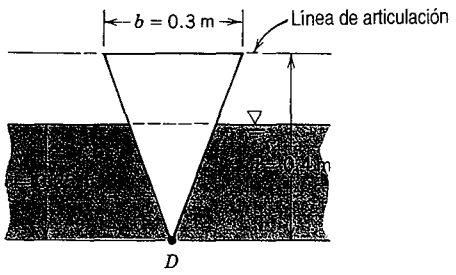
3.72 Un largo bloque cuadrado de madera puede girar en torno a una de sus aristas. El bloque está en equilibrio cuando se encuentra sumergido en agua a la profundidad indicada. Evalúe la densidad relativa de la madera, si se desprecia la fricción en el pivote.

3.73 Considere una pileta semicilíndrica de radio *R* y longitud *L*. Desarrolle una expresión general para la magnitud y la línea de acción de la fuerza hidrostática sobre un extremo, si la pileta está llena de agua y abierta a la atmósfera.

3.74 Un submarino se encuentra a 100 pies por debajo de la superficie del mar como se muestra. Encuentre la fuerza neta, *F*, requerida para abrir la escotilla circular cuando se aplica de la manera señalada. La presión dentro del submarino es igual a la atmosférica.



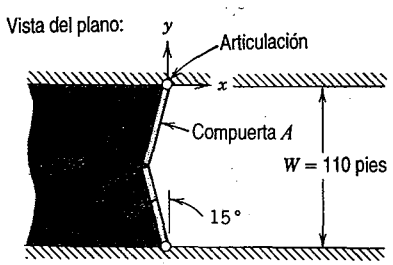
P3.74



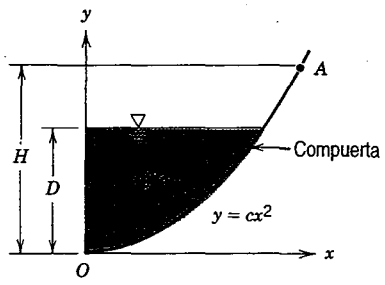
P3.75

3.75 Una ventana en la forma de un triángulo isósceles y articulada en su parte superior se coloca en la pared vertical de un molde que contiene concreto líquido. Determine la fuerza mínima que debe aplicarse en el punto *D* para mantener cerrada la ventana según la configuración mostrada del molde y el concreto.

3.76 Las compuertas en el Poe Lock en Sault Ste. Marie, Michigan, cierran un canal de $W = 110$ pies de ancho, $L = 1200$ pies de longitud y $D = 32$ pies de profundidad. Se muestra la geometría de un par de compuertas; cada una se articula en la pared del canal. Al cerrarse, los bordes de la compuerta son forzados a unirse en el centro del canal por la presión del agua. Evalúe la fuerza ejercida por el agua sobre la compuerta *A*. Determine la magnitud y dirección de las componentes de la fuerza ejercida por la compuerta sobre la articulación. (Desprecie el peso de la compuerta.)



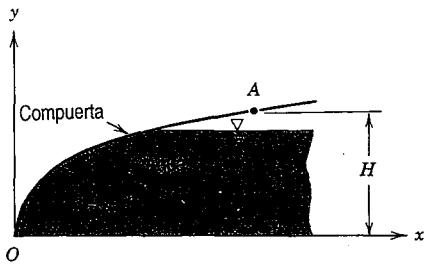
P3.76



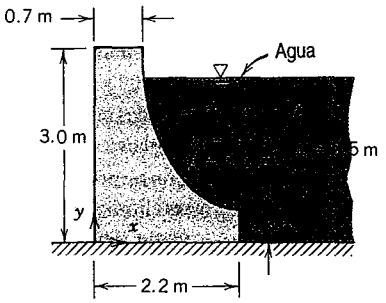
P3.77, 3.85, 3.86, 3.91

3.77 La compuerta parabólica de la figura tiene 2 m de ancho. Determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza vertical, debida al agua, ejercida sobre la compuerta, $c = 0.25\ \text{m}^{-1}$, $D = 2$ m y $H = 3$ m.

3.78 El ancho de la compuerta que se muestra es de 1.5 m. Determine la magnitud y el momento de la componente vertical de la fuerza en torno a O; $a = 1.0\ \text{m}^{-2}$, $D = 1.20$ m y $H = 1.40$ m.



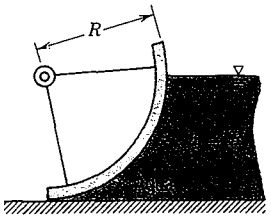
P3.78, 3.87, 3.88, 3.90



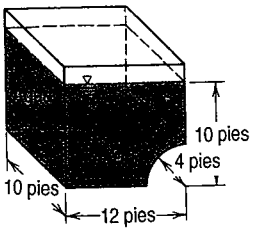
P3.79, 3.89

3.79 Se va a construir una presa a lo ancho del río Wabash empleando la sección transversal indicada. Para una altura del agua de $H = 2.5$ m, calcule la magnitud y la línea de acción de la fuerza vertical del agua sobre la cara de la presa. Suponga que el ancho de la presa es $w = 50$ m.

3.80 Una compuerta de un vertedero construida en forma de un arco circular tiene un ancho de w m. Encuentre la magnitud y la línea de acción de la componente vertical de la fuerza debida a todos los fluidos que actúan sobre la compuerta.



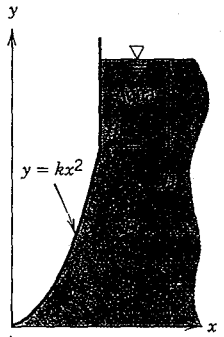
P3.80



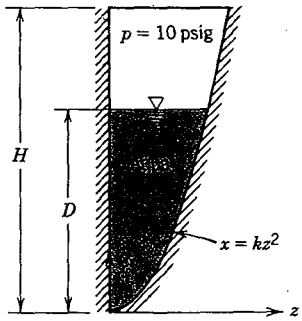
P3.81

3.81 Un tanque abierto se llena con agua a la profundidad indicada. La presión atmosférica actúa sobre todas las superficies exteriores del tanque. Determine la magnitud y la línea de acción de la componente vertical de la fuerza del agua sobre la parte curva de la base del tanque.

3.82 Determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza vertical sobre la sección curva, AB, que tiene un ancho de 1 pie. La presión atmosférica actúa en la superficie libre; $k = 1.0\ \text{pie}^{-1}$, $D = 4$ pies y $H = 6$ pies.



P3.82



P3.83, P3.84

3.83 El tanque que se muestra tiene un ancho de 2 pies (perpendicular al plano xz). Se llena con agua a una profundidad de 8 pies. El aire entre la parte superior del tanque y el agua está presurizado a 10 psig. Determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza vertical sobre la porción curva del tanque; $k = 0.5$ pies^{-1}, $D = 8$ pies y $H = 12$ pies.

3.84 Si la profundidad del agua, D, en el tanque del problema 3.83 se reduce a 4 pies y se mantiene la presión del aire en 10 psig, determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza vertical sobre la porción curva del tanque.

3.85 Para las condiciones del problema 3.77, determine la fuerza horizontal, aplicada en A, necesaria para mantener la compuerta en equilibrio.

3.86 Con respecto a la compuerta parabólica del problema 3.77, suponga que no se aplica ningún momento en el origen, donde la compuerta está articulada. Evalúe la fuerza vertical que debe aplicarse en el punto A para mantener fija la compuerta.

3.87 Para las condiciones del problema 3.78, determine la reacción en O requerida para el equilibrio.

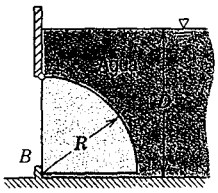
3.88 Para la compuerta cúbica del problema 3.78, suponga que no se aplica ningún momento en el origen, donde se articula la compuerta. Evalúe la fuerza horizontal que debe aplicarse en el punto A para mantener fija la compuerta.

3.89 Considere otra vez la presa del problema 3.79. ¿Es posible que el agua volque la presa? ¿En qué circunstancias?

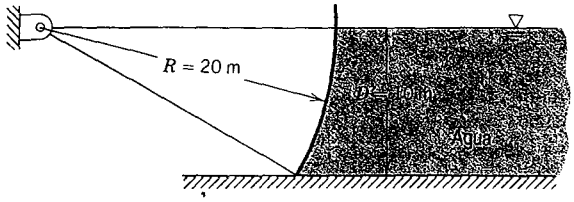
3.90 Si permanece agua a una profundidad de 0.5 m a la izquierda de la compuerta del problema 3.78, determine el momento total en torno a O.

3.91 La profundidad del agua a la derecha de la compuerta del problema 3.77 aumenta de cero a L m. Determine la profundidad, L, requerida para reducir el momento alrededor de O al 50 por ciento del valor para $L = 0$.

3.92 Una compuerta, en la forma de un cuarto de cilindro, articulada en A y sellada en B, mide 2 m de ancho. La base de la compuerta está a 3 m por debajo de la superficie del agua. Determine la fuerza sobre el tope en B si la compuerta es de concreto; $R = 2$ m y $D = 3$ m.



P3.92

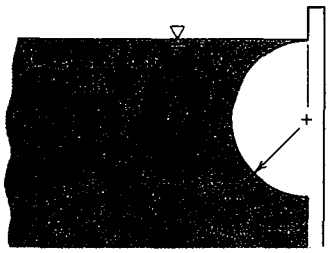


P3.93

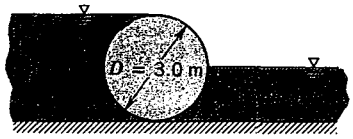
3.93 Se muestra una compuerta Tainter utilizada para controlar el flujo de agua de la presa Uniontown

en el río Ohio; el ancho de la compuerta es $w = 35$ m. Determine la magnitud, dirección y línea de acción de la fuerza del agua que actúa sobre la compuerta.

3.94 Se va a verter una mezcla de concreto dentro del molde que se muestra. A usted se le pide efectuar los cálculos sobre los que se basará el diseño de la estructura necesaria para mantener fijo el molde cilíndrico (el ancho del molde es $w = 6$ pies). Calcule la fuerza vertical ejercida por el concreto sobre la parte cilíndrica del molde y encuentre su línea de acción.



P3.94

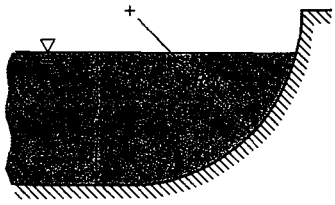


P3.95

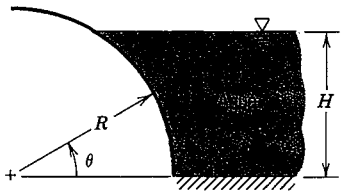
3.95 Una vertedero cilíndrico tiene un diámetro de 3 m y un longitud de 6 m. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza resultante del agua sobre el vertedero.

3.96 Un tronco cilíndrico de diámetro D descansa contra la parte superior de una presa. El agua está al nivel de la parte superior del tronco y el centro de éste, en el mismo nivel de la parte superior de la presa. Obtenga expresiones para *a*) la masa del tronco por unidad de longitud y *b*) la fuerza de contacto por unidad de longitud entre el tronco y la presa.

3.97 Se muestra una superficie curva sumergida, en la forma de un cuarto de cilindro, con radio $R = 0.3$ m. El molde se llena a una profundidad $H = 0.24$ m, con concreto líquido. El ancho es $w = 1.25$ m. Calcule la magnitud de la fuerza hidrostática vertical del concreto sobre el molde. Encuentre la línea de acción de la fuerza.



P3.97



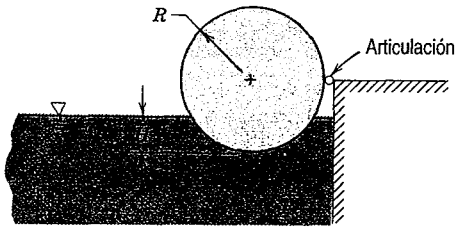
P3.98

3.98 Una superficie curva es formada como un arco circular con $R = 0.750$ m de la manera que se indica. El ancho de la superficie es $w = 3.55$ m. A la derecha de la superficie curva hay agua con una profundidad de $H = 0.650$ m. Calcule la fuerza hidrostática vertical sobre la superficie curva. Evalúe la línea de acción de esta fuerza. Encuentre la magnitud y la línea de acción de la fuerza horizontal sobre la superficie.

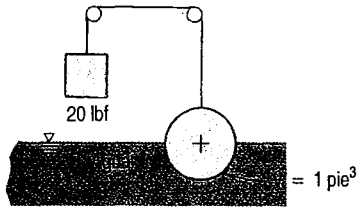
3.99 Una canoa se representa por medio de un semicilindro circular recto, con $R = 0.35$ m y $L = 5.25$ m. La canoa flota en agua que tiene una profundidad $d = 0.245$ m. Establezca la expresión algebraica general, como una función de la profundidad, para la máxima masa total (la canoa y su contenido) que puede flotar. Evalúe para las condiciones dadas.

‡**3.100** El cilindro mostrado se sostiene mediante un líquido incompresible de densidad ρ, y se articula a lo largo de su longitud. El cilindro, de masa M, longitud L y radio R, se sumerge en un líquido a una profundidad H. Obtenga una expresión general para la densidad relativa del cilindro contra el cociente

‡ Es posible que usted desee emplear programas de computadora sencillos, como ayuda para resolver los problemas marcados con obeliscos.



P3.100

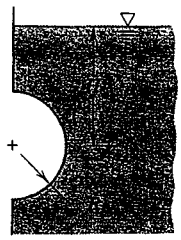


P3.101

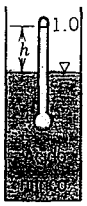
entre la profundidad del líquido y el radio del cilindro, $\alpha = H/R$, necesario para mantener el cilindro en equilibrio para $0 \leq \alpha$, 1. Grafique los resultados.

3.101 Encuentre el peso específico de la esfera que se muestra, si su volumen es 1 pie^3. Establezca todas las suposiciones. ¿Es el peso necesario para que la esfera flote?

3.102 Una puerta de observación hemisférica, de radio $R = 0.75$ m, se instala a una profundidad $H = 2.5$ m, en el lado de un acuario lleno de agua de mar, como se indica. Evalúe las magnitudes de las fuerzas vertical y horizontal del agua que actúa sobre la puerta de observación.



P3.102



P3.103

3.103 Un hidrómetro es un indicador de densidad relativa, el valor es indicado por el nivel al cual la superficie libre intersecta el vástago cuando flota en un líquido. La marca 1.0 es el nivel en el caso de agua destilada. Para la unidad que se muestra, el volumen sumergido en agua destilada es de 15 cm^3. El vástago tiene 6 mm de diámetro. Encuentre la distancia, h, desde la marca 1.0 hasta la superficie cuando el hidrómetro se pone en una solución de ácido nítrico de densidad relativa igual a 1.5.

3.104 La proporción entre grasa y músculo de una persona puede determinarse a partir de una medición de densidad relativa. La medida se efectúa sumergiendo el cuerpo en un tanque de agua y midiendo el peso neto. Desarrolle una expresión para la densidad relativa de una persona en términos de su peso en el aire, el peso neto en el agua y DR $= f(T)$ para el agua.

3.105 Cuantifique el enunciado, "Sólo se ve la punta de un iceberg (en agua de mar)".

3.106 En la película *Visualización del flujo*, se emplean burbujas de hidrógeno para visualizar las líneas de traza del flujo de agua. El diámetro típico de una burbuja de hidrógeno es $d = 0.025$ mm. Las burbujas tienden a ascender lentamente en el agua debido a la flotación hasta alcanzar, finalmente, la velocidad terminal. La fuerza de arrastre del agua sobre una burbuja está dada por $F_D = 3\pi\mu Vd$, donde μ es la viscosidad del agua y V es la velocidad de la burbuja relativa al agua. Encuentre la fuerza de flotación que actúa sobre una burbuja de hidrógeno inmersa en agua. Estime la velocidad terminal de una burbuja ascendiendo en agua.

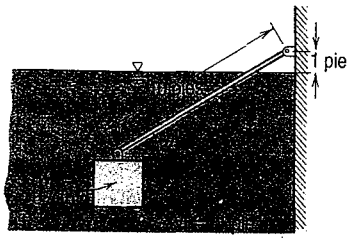
3.107 Un catálogo de un fabricante incluye un compensador de flotación, CB (similar a un chaleco flotador), para buceo. El CB indica una sustentación hasta de 40 lbf, que se obtiene de un cartucho de inflado que contiene 25 g de dióxido de carbono. Evalúe la indicación del fabricante si la masa del CB es despreciable. ¿A qué profundidad en agua de mar puede el CB producir la sustentación indicada?

3.108 Un moderno buque cisterna tiene una capacidad de almacenamiento de medio millón de toneladas

métricas de petróleo crudo con DR = 0.86. El buque es en esencia rectangular con una longitud de 400 m y manga (ancho) de 65 m. La masa del buque es de aproximadamente 230 000 toneladas métricas. Cuando está descargado, es necesario tener un lastre de agua de mar con el fin de mantener el calado suficiente para la estabilidad y mantener sumergida la hélice; el calado mínimo que se requiere es de 20 m. Determine el calado máximo del buque completamente cargado en agua de mar. Determine también la fracción a la cual el buque debe llenarse, cuando viaja descargado, con lastre de agua de mar.

3.109 Los globos aeroestáticos de aire caliente son un deporte popular. De acuerdo con un artículo reciente, "los volúmenes de aire caliente deben ser grandes debido a que el aire calentado a 150 F arriba de la temperatura ambiente, sustentan sólo 0.018 lbf/pie^3 en comparación con 0.066 y 0.071 para helio e hidrógeno, respectivamente". Verifique estas afirmaciones para las condiciones al nivel del mar. Calcule el efecto de incrementar la temperatura máxima del aire caliente a 250 F por encima de la ambiente.

3.110 Un pie cúbico de un material que pesa 67 lbf se sumerge en agua de la manera que se indica. Una barra circular de madera de 10 pies de largo y 3 pulg^2 en sección transversal, se une al peso y también a la pared. Si la barra pesa 3 lbf, ¿cuál será el ángulo, θ, para el equilibrio?



P3.110

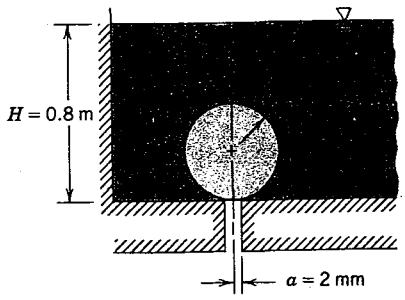
3.111 El catálogo de un fabricante de tanques de aire de aluminio para buceo, afirma que éstos flotan independientemente cuando están vacíos. Un tanque contiene 50 pies cúbicos estándar de aire cuando se llena a 3000 psig, tiene 6.9 pulg de diámetro exterior, un espesor de pared de 0.467 pulg y 19 pulg de largo. Evalúe la afirmación.

3.112 Un globo aereostático de helio levantará un carga hasta una altitud de 40 km, donde la presión atmosférica y la temperatura son 3.0 mbar y −25 C, respectivamente. El forro del globo es poliéster con densidad relativa de 1.28 y espesor de 0.015 mm. Para mantener una forma esférica, el globo se presuriza a una presión manométrica de 0.45 mbar. Determine el diámetro máximo del globo si el esfuerzo de tensión permisible en el forro se limita a 62 MN/m^2. ¿Qué carga puede transportarse?

3.113 Los globos aerostáticos científicos, que operan en equilibrio de presión con los alrededores, se han utilizado para levantar paquetes de instrumentos a altitudes sumamente grandes. Uno de tales globos, hecho de poliestireno con un espesor del forro de 0.013 mm, levantó una carga de 230 kg hasta una altitud de aproximadamente 40 km, donde las condiciones atmosféricas eran 0.95 mbar y −20 C. El gas helio en el globo estaba a una temperatura cercana a −10 C. La densidad relativa del material del forro es 1.28. Determine el diámetro y la masa del globo. Suponga que éste es esférico.

3.114 Una esfera, de radio R, se sumerge parcialmente a una profundidad d, en un líquido de densidad relativa DR. Obtenga una expresión algebraica para la fuerza de flotación que actúa sobre la esfera, como una función de la profundidad de inmersión, d, para $0 \leq d \leq 2R$.

3.115 Una esfera de radio R, elaborada con un material de densidad relativa DR, se sumerge en un tanque de agua. La esfera se coloca sobre un agujero, de radio a, en el fondo del tanque. Desarrolle una expresión general para el rango de densidades relativas para las cuales, la esfera flotará hacia la superficie. De acuerdo con las dimensiones dadas, determine la DR mínima requerida para que la esfera se mantenga en la posición mostrada.



P3.115

3.116 Un popote está hecho de plástico, con densidad relativa DR = 1.1. El popote tiene 5 mm de diámetro interior y el espesor del plástico es 0.4 mm. Su longitud es 250 mm. Los experimentos han demostrado que cuando se le coloca en un vaso de bebida (DR = 1.055), el popote permanece sumergido. Estime la fuerza externa requerida para mantener sumergido el popote de manera vertical en una bebida, a una profundidad de 100 mm. Suponga que la tensión superficial, σ, de la bebida es similar a la del agua.

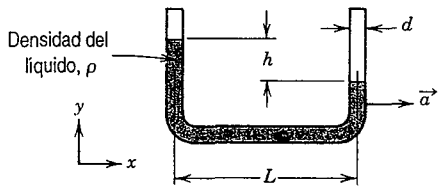
3.117 Un madero cuadrado de roble con lados W y longitud L, flota en agua de mar. Calcule la profundidad de equilibrio d, a la cual flota el madero en agua tranquila. Estime el momento de torsión necesario para mantener el madero en una posición rotada 15° en el sentido de las manecillas del reloj, a partir de su posición de equilibrio no perturbado.

3.118 Considere un objeto largo con sección transversal cuadrada (a m por lado) flotando horizontalmente en la superficie de un líquido. Suponga que al principio, una cuarta parte del objeto está sumergida. Considerando sólo pequeños desplazamiento angulares, obtenga una expresión para el momento de torsión que tiende a regresar el objeto a la posición horizontal. Evalúe el rango de posiciones del centro de gravedad (CG) simétrico para el cual el objeto permanecerá estable.

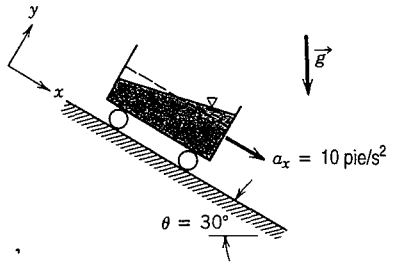
3.119 Un madero cilíndrico, con D = 0.3 m y L = 4 m, se sobrecarga en su extremo inferior de manera que flota verticalmente con 3 m sumergidos en agua de mar. Cuando se desplaza verticalmente de su posición de equilibrio, el madero oscila o se "alza" en dirección vertical al soltarlo. Estime la frecuencia de oscilación en este modo de alzamiento. Desprecie los efectos de la viscosidad y el movimiento del agua.

3.120 Un recipiente cilíndrico, similar al que se analizó en el problema ejemplo 3.9, gira a velocidad angular constante alrededor de su eje. El cilindro tiene un pie de diámetro y al inicio contiene agua a una profundidad de 4 pulg. Determine la tasa máxima a la cual el recipiente puede girarse antes de que la superficie libre del líquido apenas toque el fondo del tanque. ¿Su respuesta depende de la densidad del líquido? Explique.

3.121 Un acelerómetro rudimentario puede construirse a partir de un tubo en U lleno de líquido. Derive una expresión para la aceleración $\vec{a}$, en términos de la diferencia de nivel del líquido, h, la geometría del tubo y las propiedades del fluido.



P3.121



P3.122

3.122 Un recipiente rectangular de agua está sujeto a una aceleración constante hacia abajo en un plano inclinado, como se ilustra. Determine la pendiente de la superficie libre empleando el sistema de coordenadas indicado.

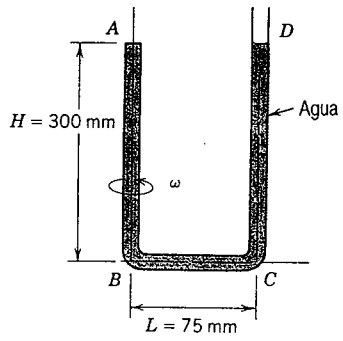
3.123 Un corredor entrena para un maratón en una pista de carreras bajo techo. Decide llevar una botella de agua llena a la mitad para calmar su sed. Suponga que corre a una velocidad uniforme, $V = 5.3$ m/s, alrededor de vueltas de radio $R = 17.5$ m. Calcule la aceleración radial del corredor y del agua. Estime el ángulo de inclinación promedio de la superficie del agua, marcando claramente la dirección.

3.124 Una cámara hermética, que contiene aceite manométrico (DR = 0.8), gira en torno a su eje con velocidad angular, ω. Deduzca una expresión para el gradiente de presión radial en el aceite, $\partial p/\partial r$, en términos del radio, r, y la velocidad angular, ω.

3.125 Un tubo de ensayo se hace girar en una centrifugadora. El soporte del tubo está montado sobre un pivote de modo que el tubo se balancea hacia afuera, cuando aumenta la velocidad de rotación. A elevadas velocidades, el tubo está prácticamente horizontal. Encuentre *a*) una expresión para la componente radial de la aceleración de un elemento de líquido, localizado a un radio r, *b*) el gradiente de presión radial $\partial p/\partial r$ y *c*) la presión máxima en el fondo del tubo de ensayo, si éste contiene agua. (La superficie libre y el radio del fondo son 50 y 130 mm, respectivamente.)

3.126 Un micromanómetro centrífugo puede emplearse con el fin de crear presiones diferenciales pequeñas y exactas en aire, utilizadas en mediciones de alta precisión. El dispositivo consta de un par de discos paralelos que rotan para generar una diferencia de presión radial. No hay flujo entre los discos. Obtenga una expresión para la diferencia de presión en términos de la velocidad de rotación, el radio y la densidad del aire. Evalúe la velocidad de rotación requerida para desarrollar una presión diferencial de 8 μm de agua, empleando un dispositivo de 50 mm de radio.

3.127 El tubo en U que se muestra está lleno de agua a $T = 20$ C. Está cerrado en A y abierto a la atmósfera en D. El tubo se hace girar en torno al eje vertical AB. Para las dimensiones mostradas, calcule la velocidad angular máxima si se supone que no habrá cavitación.



P3.127

3.128 A una caja cúbica, de 1 m de lado, llena a la mitad con aceite (DR = 0.80), se le da una aceleración constante horizontal de $0.2g$. Determine la pendiente de la superficie libre y la presión a lo largo del fondo de la caja.

3.129 Un recipiente rectangular, de dimensiones de 0.4 m × 0.2 m en la base y 0.4 m de altura, se llena con agua a una profundidad de 0.2 m; la masa del recipiente vacío es 10 kg. El recipiente se pone en un plano inclinado a 30° respecto a la horizontal. Si el coeficiente de fricción de deslizamiento entre el recipiente y el plano es 0.3, determine el ángulo de la superficie del agua relativa a la horizontal.

3.130 Si el recipiente del problema 3.129 se desliza sin fricción, determine el ángulo de la superficie del agua relativa a la horizontal. ¿Cuál es la pendiente de la superficie libre para la misma aceleración hacia arriba del plano?

3.131 Una lata parcialmente llena de bebida se coloca en el borde exterior de un carrusel, a una distancia

$R = 1.5$ m del eje de rotación. El diámetro y la altura de la lata son $D = 65$ mm y $H = 120$ mm, respectivamente. La lata está llena a la mitad, con densidad relativa DR = 1.06. Evalúe la pendiente de la superficie líquida en la lata, si el carrusel gira a 0.3 revoluciones por segundo. Calcule la velocidad de giro a la cual la lata se desbordaría, suponiendo que no hay separación entre el fondo de la lata y el carrusel. ¿Sería más probable que la lata se derramara o que deslizara fuera del carrusel?

3.132 Una cubeta, de 1 pie de diámetro y 1 pie de profundidad, pesa 3 lbf y contiene 8 pulg de agua. La cubeta gira en un círculo vertical de 3 pies de radio a una velocidad de 15 pies/s. Suponga que el agua se mueve como un cuerpo rígido. En el instante en que la cubeta se encuentra en la parte superior de su trayectoria, calcule la tensión en la cuerda y la presión del agua sobre el fondo de la cubeta.

3.133 Centrífugas de gas se utilizan en un proceso para producir uranio enriquecido para barras de combustible nuclear. La velocidad periférica máxima de una centrífuga de gas está limitada, por consideraciones de esfuerzo, hasta aproximadamente 300 m/s. Suponga una centrífuga que contiene gas de hexafloruro de uranio, con masa molecular $M_m = 352$ y comportamiento de gas ideal. Deduzca una expresión para el cociente entre la presión máxima y la presión en el eje de la centrífuga. Evalúe la razón de presión para una temperatura de gas de 325 C.

3.134 Un recipiente rectangular, de 0.4 m × 0.2 m de dimensiones en la base y altura de 0.5 m, se llena con agua a una profundidad de 0.2 m; la masa del recipiente vacío es 10 kg. El recipiente se coloca en una superficie horizontal y se somete a una fuerza horizontal constante de 150 N. Si el coeficiente de fricción de deslizamiento entre el recipiente y la superficie es 0.25 y el tanque se alinea con la dimensión corta a lo largo de la dirección de movimiento, determine *a*) la fuerza del agua sobre cada extremo del tanque y *b*) la fuerza del agua sobre el fondo del tanque.

3.135 Un automóvil que viaja a 90 km/h recorre una curva larga de 250 m de radio. El aire acondicionado está encendido y las ventanas están cerradas de modo que el aire dentro del auto se mueve esencialmente como un cuerpo rígido. Un niño en el asiento posterior sostiene la cuerda de un globo lleno de helio. En un tramo recto la cuerda está vertical, pero en la curva no. Determine la magnitud y la dirección del ángulo de la cuerda cuando se mide desde la vertical.

3.136 Se utilizan moldes de hierro o acero fundido en una máquina mandriladora para hacer fundiciones tubulares, tales como cilindros y tubos. Una carga de metal fundido se vierte dentro del molde giratorio. La aceleración radial permite que se formen secciones de pared con espesor casi uniforme. Un cilindro de acero, de longitud $L = 2$ m, radio exterior $r_o = 0.15$ m y radio interior $r_i = 0.10$ m, se va a formar mediante este proceso. Para alcanzar un espesor casi uniforme, la aceleración radial mínima debe ser $10g$. Determine *a*) la velocidad angular requerida y *b*) las presiones máxima y mínima sobre la superficie del molde.

y $H = 120$ mm,
'alúe la pendiente
;undo. Calcule la
ón entre el fondo
uera del carrusel?
pulg de agua. La
. Suponga que el
n la parte superior
do de la cubeta.
o para barras de
:stá limitada, por
fuga que contiene
as ideal. Deduzca
entrífuga. Evalúe

le 0.5 m, se llena
:ipiente se coloca
. Si el coeficiente
: se alinea con la
l agua sobre cada

re acondicionado
l auto se mueve
ıerda de un globo
mine la magnitud

ıacer fundiciones
dentro del molde
;or casi uniforme.
:rior $r_i = 0.10$ m,
ıceleración radial
siones máxima y

Capítulo 4

Ecuaciones básicas en forma integral para un volumen de control

Debemos iniciar nuestro estudio de fluidos en movimiento desarrollando las ecuaciones básicas en forma integral para su aplicación a volúmenes de control. Nos podríamos preguntar, "¿por qué la formulación del volumen de control en lugar de la formulación de sistema?" Hay dos razones básicas. Primero, como los medios fluidos son capaces de una distorsión y una deformación continuas, a menudo es en extremo difícil identificar y seguir la misma masa de fluido todo el tiempo (como debe hacerse para aplicar la formulación de sistema). Segundo, con frecuencia nos interesa, no el movimiento de una masa dada de fluido, sino más bien el efecto del movimiento del fluido en algún dispositivo o estructura. De tal modo, es más conveniente aplicar las leyes básicas a un volumen definido en el espacio, empleando un análisis de volumen de control.

Las leyes básicas para un sistema son familiares para usted por sus estudios anteriores de física, mecánica y termodinámica. Nuestro enfoque para desarrollar la formulación matemática de estas leyes para un volumen de control, consistirá en desarrollar una formulación general que nos permitirá pasar del análisis de sistema al de volumen de control.

4-1 LEYES BÁSICAS PARA UN SISTEMA

Las leyes básicas para un sistema se resumen brevemente; por razones que se volverán evidentes en la siguiente sección, cada una de las ecuaciones básicas para un sistema se escribe como una ecuación de régimen.

4-1.1 Conservación de la masa

En vista de que un sistema es, por definición, una colección arbitraria de materia de identidad fija, un sistema está compuesto de la misma cantidad de materia en todo momento. La conservación de la masa establece que la masa, M, del sistema es constante. En términos de régimen, tenemos

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = 0 \tag{4.1a}$$

donde

$$M_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} \rho \, d\forall \tag{4.1b}$$

4-1.2 Segunda ley de Newton

Para un sistema que se mueve con relación a un marco de referencia inercial, la segunda ley de Newton indica que la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, es igual a la relación de cambio en el tiempo del momento lineal del sistema,

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.2a}$$

donde el momento lineal, $\vec{P}$, del sistema está dado por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{V}\, dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} \vec{V}\rho\, d\forall \tag{4.2b}$$

4-1.3 El principio del momento angular

El principio del momento angular para un sistema establece que la relación de cambio del momento angular es igual a la suma de todos los momentos de torsión que actúan sobre el sistema,

$$\vec{T} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.3a}$$

donde el momento angular del sistema está determinado por

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{r}\times\vec{V}\, dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\, d\forall \tag{4.3b}$$

El momento de torsión puede producirse por fuerzas de superficie o másicas y también por ejes que cruzan la frontera del sistema,

$$\vec{T} = \vec{r}\times\vec{F}_s + \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{r}\times\vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{flecha}} \tag{4.3c}$$

4-1.4 La primera ley de la termodinámica

La primera ley de la termodinámica es un enunciado de la conservación de la energía en un sistema,

$$\delta Q - \delta W = dE$$

4-1.5 La s

4-2 RELAC
CON L

Relacionándola con el tiempo, la ecuación puede escribirse como

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.4a}$$

donde la energía total del sistema está dada por

$$E_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} e\, dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} e\rho\, d\forall \tag{4.4b}$$

y

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \tag{4.4c}$$

En la ecuación 4.4a la relación de transferencia de calor, $\dot{Q}$, es positiva cuando se añade calor al sistema de los alrededores; la relación de trabajo $\dot{W}$, es positiva cuando el trabajo es efectuado por el sistema sobre sus alrededores. En la ecuación 4.4c, u es la energía interna específica, V la velocidad y z, la altura relativa a una referencia conveniente de una partícula de sustancia que tiene masa dm.

4-1.5 La segunda ley de la termodinámica

Si una cantidad de calor, δQ, se transfiere a un sistema a temperatura T, la segunda ley de la termodinámica establece que el cambio en la entropía, dS, del sistema está dado por

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

En términos de régimen de flujo podemos escribir

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{\text{sistema}} \geq \frac{1}{T}\dot{Q} \tag{4.5a}$$

donde la entropía total del sistema está determinada por

$$S_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} s\, dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} s\rho\, d\forall \tag{4.5b}$$

4-2 RELACIÓN DE LAS DERIVADAS DEL SISTEMA CON LA FORMULACIÓN DEL VOLUMEN DE CONTROL

En la sección anterior, resumimos las ecuaciones básicas para un sistema. Encontramos que cuando las escribimos en términos del flujo, cada ecuación comprende la derivada en el tiempo de una propiedad extensiva del sistema (la masa total, momento, momento angular, energía o entropía del sistema). Para desarrollar la formulación de volumen de control de cada ley básica a partir de la

formulación de sistema, usaremos el símbolo N para designar cualquier propiedad extensiva arbitraria del sistema. La propiedad intensiva correspondiente (propiedad extensiva por unidad de masa) se designará por medio de η. Por consiguiente,

$$N_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \eta \, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \eta \rho \, d\forall \tag{4.6}$$

Al comparar la ecuación 4.6 con las ecuaciones 4.1b, 4.2b, 4.3b, 4.4b y 4.5b, vemos que si:

$$\begin{aligned} N &= M, && \text{entonces } \eta = 1 \\ N &= \vec{P}, && \text{entonces } \eta = \vec{V} \\ N &= \vec{H}, && \text{entonces } \eta = \vec{r} \times \vec{V} \\ N &= E, && \text{entonces } \eta = e \\ N &= S, && \text{entonces } \eta = s \end{aligned}$$

La principal tarea en el paso de la formulación del sistema a la del volumen de control de las leyes básicas es expresar la relación de cambio de la propiedad extensiva arbitraria N, para un sistema, en términos de las variaciones de esta propiedad asociadas con el volumen de control. Puesto que la masa cruza la frontera de un volumen de control, las variaciones en el tiempo de la propiedad N asociadas con el volumen de control, comprenden el flujo másico y las propiedades que se transmiten con él. Una manera conveniente de explicar el flujo másico es utilizar un proceso de límite que abarque a un sistema y a un volumen de control que coincidan en cierto instante. Las cantidades de flujo en regiones de traslape y en regiones que circunden el volumen de control se formularán después de manera aproximada y el proceso de límite se aplicará para obtener resultados exactos. La ecuación final relaciona la relación de cambio de una propiedad extensiva arbitraria, N, para un sistema, con las variaciones en el tiempo de esta propiedad asociadas con el volumen de control.

4-2.1 Derivación

El sistema y el volumen de control que se van a emplear en el análisis, se muestran en la figura 4.1. El campo de flujo, $\vec{V}(x, y, z, t)$, es arbitrario y relativo a las coordenadas x, y y z. El volumen de control está fijo en el espacio, en relación al sistema de coordenadas xyz; por definición, el sistema siempre debe constar de las mismas partículas de fluido y, consecuentemente, debe moverse con el campo de flujo. En la figura 4.1, las fronteras del sistema se muestran en dos instantes diferentes, t_0 y $t_0 + \Delta t$. En t_0, las fronteras del sistema y el volumen de control coinciden; en $t_0 + \Delta t$, el sistema ocupa las regiones II y III. El sistema se ha elegido de manera que la masa dentro de la región I ingrese al volumen de control durante el intervalo Δt y la masa, en la región III, abandone el volumen de control durante el mismo intervalo.

Recuerde que nuestro objetivo es relacionar la variación de cambio de cualquier propiedad extensiva arbitraria, N, del sistema, con las variaciones en el tiempo de esta propiedad, asociadas al volumen de control. De la definición de derivada, la relación de cambio de N_{sistema} está dada por

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_s)_{t_0+\Delta t} - N_s)_{t_0}}{\Delta t} \tag{4.7}$$

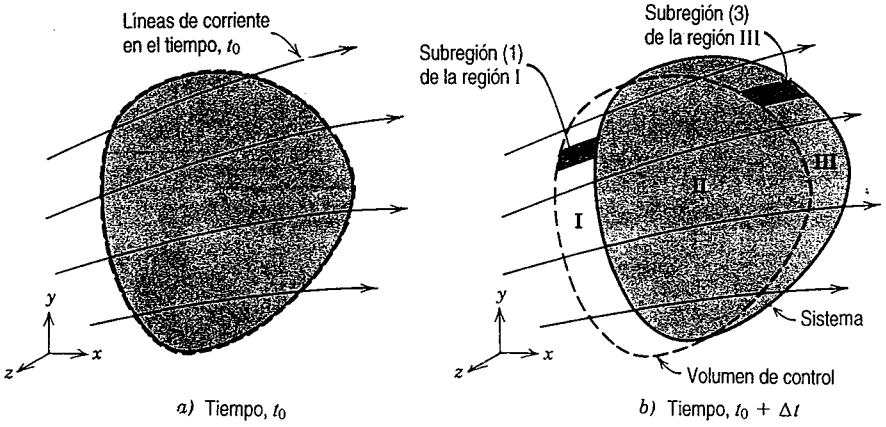


Fig. 4.1 Configuración de sistema y de volumen de control.

Por conveniencia, se ha empleado el subíndice s para denotar el sistema, en la definición de derivada de la ecuación 4.7.

En $t_0 + \Delta t$, el sistema ocupa las regiones II y III; en t_0, coinciden el sistema y el volumen de control. Por tanto,

$$N_s)_{t_0+\Delta t} = (N_{\text{II}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} = (N_{\text{VC}} - N_{\text{I}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}$$

y

$$N_s)_{t_0} = (N_{\text{VC}})_{t_0}$$

Puesto que

$$N_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \eta \, dm = \int_{\forall\,\text{(sistema)}} \eta\rho \, d\forall \tag{4.6}$$

podemos escribir

$$N_s)_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{\text{VC}} \eta\rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{\text{I}} \eta\rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} + \left[\int_{\text{III}} \eta\rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}$$

y

$$N_s)_{t_0} = (N_{\text{VC}})_{t_0} = \left[\int_{\text{VC}} \eta\rho \, d\forall\right]_{t_0}$$

Sustituyendo en la definición de la derivada del sistema, ecuación 4.7, obtenemos

$$\left.\frac{dN}{dt}\right]_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{\text{VC}} \eta\rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} + \left[\int_{\text{III}} \eta\rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{\text{I}} \eta\rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{\text{VC}} \eta\rho \, d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t} \tag{4.8}$$

Como el límite de una suma es igual a la suma de los límites, podemos escribir

$$\left.\frac{dN}{dt}\right]_s = \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{VC}\eta\rho\,d\forall\right]_{t_0+\Delta t}-\left[\int_{VC}\eta\rho\,d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t}}_{①} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{III}\eta\rho\,d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{I}\eta\rho\,d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} \qquad (4.9)$$

② ③

Después de esto, nuestra tarea es evaluar cada uno de los tres términos en la ecuación 4.9.

El término ① en la ecuación 4.9 se simplifica en

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{VC}\eta\rho\,d\forall\right]_{t_0+\Delta t}-\left[\int_{VC}\eta\rho\,d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{VC})_{t_0+\Delta t}-N_{VC})_{t_0}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial N_{VC}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\eta\rho\,d\forall$$

El término ② en la ecuación 4.9 se reduce a

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{III}\eta\rho\,d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

Para evaluar $N_{III})_{t_0+\Delta t}$, observemos en la figura 4.2 la imagen amplificada de una subregión típica de la región III. El vector $d\vec{A}$ tiene una magnitud igual al elemento de área, dA, de la superficie de control; la dirección de $d\vec{A}$ corresponde a la de la normal dibujada hacia afuera, a partir del elemento de área de la superficie de control. El ángulo α es el que se define entre $d\vec{A}$ y el vector de velocidad, $\vec{V}$. Como la masa en la región III es la que fluye *hacia afuera* del volumen de control durante el intervalo Δt, el ángulo α siempre será menor que $\pi/2$ para toda el área de la superficie de control que delimita la región III.

Para la subregión (3) podemos escribir

$$dN_{III})_{t_0+\Delta t} = (\eta\rho\,d\forall)_{t_0+\Delta t} = [\eta\rho(\Delta l\cos\alpha\,dA)]_{t_0+\Delta t}$$

ya que $d\forall = \Delta l\cos\alpha\,dA$. Entonces para toda la región III,

$$N_{III})_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{SC_{III}}\eta\rho\,\Delta l\cos\alpha\,dA\right]_{t_0+\Delta t}$$

donde SC_{III} es la superficie común a la región III y el volumen de control. En esta expresión, Δl es la distancia recorrida por una partícula sobre la superficie del sistema durante el intervalo Δt, a lo largo de una línea de corriente que existió en t_0.

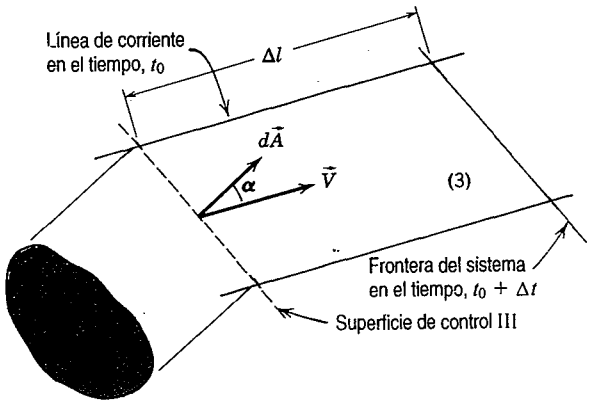


Fig. 4.2 Vista amplificada de la subregión (3) de la figura 4.1.

Ahora que tenemos una expresión para $N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}$, podemos evaluar el término ② en la ecuación 4.9:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{\text{III}}\eta\rho\, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{SC_{\text{III}}}\eta\rho\,\Delta l\cos\alpha\, dA}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\int_{SC_{\text{III}}}\eta\rho\frac{\Delta l}{\Delta t}\cos\alpha\, dA=\int_{SC_{\text{III}}}\eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}|$$

La última igualdad resulta del hecho de que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t}=|\vec{V}| \qquad \text{y} \qquad dA=|d\vec{A}|$$

El término ③ en la ecuación 4.9 se simplifica en

$$-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{\text{I}}\eta\rho\, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{\text{I}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

Para evaluar $N_{\text{I}})_{t_0+\Delta t}$, nos fijamos en la imagen amplificada de una subregión típica de la región I, mostrada en la figura 4.3. El vector $d\vec{A}$ tiene una magnitud igual al elemento de área, dA, de la superficie de control; la dirección de $d\vec{A}$ corresponde a la de la normal hacia afuera, a partir del elemento de área de dicha superficie. El ángulo α es el que se forma entre $d\vec{A}$ y el vector de velocidad, $\vec{V}$. Como la masa en la región I fluye *hacia adentro* del volumen de control durante el intervalo de tiempo Δt, el ángulo α siempre será mayor que $\pi/2$ para toda el área de la superficie de control que delimita la región I.

Para la subregión (1) es posible escribir

$$dN_{\text{I}})_{t_0+\Delta t}=(\eta\rho\, d\forall)_{t_0+\Delta t}=[\eta\rho\,\Delta l(-\cos\alpha)\, dA]_{t_0+\Delta t}$$

ya que $d\forall = \Delta l(-\cos\alpha)\, dA$. ¿Por qué el signo menos? Recuerde que el volumen es una cantidad escalar que debe tener un valor numérico positivo. En vista de que $\alpha > \pi/2$, entonces $\cos\alpha$ será negativo.

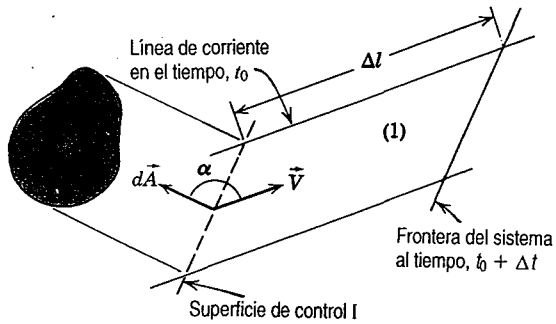


Fig. 4.3 Vista amplificada de la subregión (1) de la figura 4.1.

Luego, para toda la región I,

$$N_{\mathrm{I}})_{t_0+\Delta t} = \left[\int_{\mathrm{SC_I}} -\eta\rho\,\Delta l\cos\alpha\,dA\right]_{t_0+\Delta t}$$

donde $\mathrm{SC_I}$ es la superficie común a la región I y al volumen de control. En esta expresión, Δl es la distancia recorrida por una partícula sobre la superficie del sistema durante el intervalo de tiempo Δt, a lo largo de una línea de corriente que existió en t_0.

Ahora que tenemos una expresión para $N_{\mathrm{I}})_{t_0+\Delta t}$, podemos evaluar el término ③ en la ecuación 4.9:

$$-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{\mathrm{I}}\eta\rho\,d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{\mathrm{I}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\mathrm{SC_I}} -\eta\rho\,\Delta l\cos\alpha\,dA}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathrm{SC_I}}\eta\rho\frac{\Delta l}{\Delta t}\cos\alpha\,dA = \int_{\mathrm{SC_I}}\eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}|$$

La última igualdad se deduce del hecho de que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t} = |\vec{V}| \qquad \text{y} \qquad dA = |d\vec{A}|$$

Ahora que hemos obtenido las expresiones para cada uno de los tres términos en el lado derecho, la ecuación 4.9 puede escribirse

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}}\eta\rho\,d\forall + \int_{\mathrm{SC_I}}\eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}| + \int_{\mathrm{SC_{III}}}\eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}|$$

Con referencia a la figura 4.1, vemos que la superficie de control completa, SC, está compuesta por tres superficies,

$$\mathrm{SC} = \mathrm{SC_I} + \mathrm{SC_{III}} + \mathrm{SC}_p$$

donde SC_p se caracteriza por la ausencia de flujo a través de la superficie, donde $\alpha = \pi/2$ o $\vec{V} = 0$.

En consecuencia, es posible escribir

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\rho|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}| \tag{4.10}$$

Reconociendo que $|\vec{V}|\cos\alpha|d\vec{A}| = \vec{V}\cdot d\vec{A}$, la ecuación 4.10 se convierte en

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

La ecuación 4.11 es la relación que queríamos obtener.

4-2.2 Interpretación física

Nos hemos tomado varias páginas para deducir la ecuación 4.11. Recuerde que nuestro objetivo era obtener una relación general entre la relación de cambio de cualquier propiedad extensiva arbitraria, N, de un sistema y las variaciones de esta propiedad asociadas al volumen de control. La principal razón de su deducción fue reducir el álgebra requerida para obtener las formulaciones de volumen de control de las ecuaciones básicas. Debido a que la forma de trabajo de cada ecuación básica para la aplicación a volúmenes de control se desarrolla a partir de la ecuación 4.11, consideramos a la propia ecuación como "básica" y la reescribimos para realzar su importancia:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

Es importante recordar que en la deducción de la ecuación 4.11, el proceso de límite (tomando el límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$) nos aseguró que la relación es válida en el instante en que coinciden el sistema y el volumen de control. Al emplear la ecuación 4.11 para pasar de las formulaciones de sistema de las leyes básicas a las de volumen de control, reconocemos que la ecuación 4.11 relaciona la variación de cambio de cualquier propiedad extensiva, N, de un sistema con las variaciones de esta propiedad asociadas al volumen de control, en el instante en que coinciden el sistema y el volumen de control; esto es cierto puesto que, cuando $\Delta t \longrightarrow 0$, el sistema y el volumen de control ocupan el mismo volumen y tienen las mismas fronteras.

Antes de utilizar la ecuación 4.11 para desarrollar formulaciones del volumen de control de las leyes básicas, vamos a afirmar nuestra comprensión de cada uno de los términos y símbolos en la ecuación:

$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}}$ es la relación total de cambio de cualquier propiedad extensiva arbitraria del sistema.

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\,\rho\, d\forall$ es la relación de cambio en el tiempo de la propiedad extensiva arbitraria, N, dentro del volumen de control.

: η es la propiedad intensiva correspondiente a N; $\eta = N$ por unidad de masa.

: $\rho d\forall$ es un elemento de masa contenido en el volumen de control.

: $\int_{VC} \eta\rho \, d\forall$ es la cantidad total de la propiedad extensiva, N, contenida dentro del volumen de control.

$\int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ es la relación neta de flujo de la propiedad extensiva, N, hacia afuera de la superficie de control.

: $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ es la relación de flujo másico a través del elemento de área, $d\vec{A}$, por unidad de tiempo (admitimos que el producto punto es un producto escalar; el signo de $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ depende de la dirección del vector de velocidad, $\vec{V}$, relativa al vector de área, $d\vec{A}$).

: $\eta\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ es la relación de flujo de la propiedad extensiva, N, a través del área, $d\vec{A}$.

Deben hacerse dos comentarios adicionales acerca de la ecuación 4.11. Primero, la velocidad $\vec{V}$ se mide respecto a la superficie del volumen de control. Al desarrollar la ecuación 4.11, consideramos un volumen de control fijo, relativo a las coordenadas de referencia, x, y y z. Como el campo de velocidad se especificó a las mismas coordenadas de referencia, entonces la velocidad $\vec{V}$ se mide relativa al volumen de control. Segundo, en nuestro desarrollo, el sistema se movió en el campo de velocidad especificado; de modo que la relación de cambio en el tiempo de la propiedad extensiva arbitraria, N, dentro del volumen de control, debe ser evaluada por un observador fijo en el volumen de control.

Debemos destacar aún más estos puntos, al deducir la formulación del volumen de control de cada una de las leyes básicas. En cada caso, empezamos con la familiar formulación de sistema y empleamos la ecuación 4.11 para relacionar las derivadas del sistema con las variaciones en el tiempo, asociadas con un volumen de control fijo, en el instante en que coinciden el sistema y el volumen de control.[1]

4-3 CONSERVACIÓN DE LA MASA

La conservación de la masa es el primer principio físico al cual aplicamos la relación entre las formulaciones de sistema y las de volumen de control. Darse cuenta de que la masa no puede crearse ni destruirse es un fenómeno intuitivo; si la relación de flujo másico hacia dentro de un volumen de control excede a la relación de flujo hacia afuera, la masa se acumulará dentro del VC.

Recuerde que la conservación de la masa establece simplemente que la masa de un sistema es constante,

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = 0 \tag{4.1a}$$

donde

$$M_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} \rho \, d\forall \tag{4.1b}$$

[1] La ecuación 4.11 se ha deducido para un volumen de control fijo en el espacio, relativo a las coordenadas xyz. Para el caso de un volumen de control *deformable*, cuya forma varía con el tiempo, la ecuación 4.11 puede aplicarse siempre que la velocidad, $\vec{V}$, en la integral de flujo se mida relativa a la superficie de control local a través de la cual ocurre el flujo.

Las formulaciones de sistema y de volumen de control se relacionan mediante la ecuación 4.11,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

donde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \eta\, dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} \eta\rho\, d\forall \tag{4.6}$$

Para derivar la ecuación de la conservación de la masa para un volumen de control, establecemos que

$$N = M \qquad \text{y} \qquad \eta = 1$$

Con esta sustitución, obtenemos

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.12}$$

Comparando las ecuaciones 4.1a y 4.12, llegamos a la ecuación de la conservación de la masa para un volumen de control:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

En la ecuación 4.13, el primer término representa la relación de cambio de la masa dentro del volumen de control; el segundo término representa la relación neta de flujo másico que atraviesa hacia afuera la superficie de control. La conservación de la masa requiere que la suma de la relación de cambio de masa sea cero dentro del volumen de control y que la relación neta de masa, que fluye hacia afuera por la superficie de control, también sea cero.

Enfatizamos que la velocidad, $\vec{V}$, en la ecuación 4.13 se mide relativa a la superficie de control. Además, el producto punto, $\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$, es un producto escalar. El signo depende de la dirección del vector de velocidad, $\vec{V}$, relativa al vector de área, $d\vec{A}$. Regresando a la deducción de la ecuación 4.11, vemos que el producto punto, $\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$, es positivo donde el flujo está hacia afuera de la superficie de control, negativo en el caso de que el flujo esté hacia dentro y cero cuando el flujo es tangente a la superficie de control.

4-3.1 Casos especiales

En los casos especiales es posible simplificar la ecuación 4.13. Considere primero la situación de flujo incompresible, en la que la densidad permanece constante. Cuando ρ es una constante, no es

una función del espacio o del tiempo. En consecuencia, para flujo incompresible, la ecuación 4.13 puede escribirse como

$$0 = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.14a}$$

La integral de $d\forall$ sobre el volumen de control es simplemente el volumen del volumen de control. Por tanto, al dividir entre ρ, escribimos la ecuación 4.14a como

$$0 = \frac{\partial \forall}{\partial t} + \int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.14b}$$

Para un volumen de control indeformable, esto es, un volumen de control de tamaño y forma fijos, $\forall$ = constante. La conservación de la masa, para flujo incompresible a través de un volumen de control fijo, se convierte en

$$0 = \int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.14c}$$

Observe que no hemos supuesto que el flujo será estacionario al reducir la ecuación 4.13 a la forma de la 4.14c. Sólo hemos impuesto la restricción de flujo incompresible. De tal manera, la ecuación 4.14c es un enunciado de la conservación de la masa para un flujo incompresible que puede o no ser estacionario.

Las dimensiones del integrando en la ecuación 4.14c son L^3/t. La integral de $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ sobre una sección de la superficie de control se llama, comúnmente, *relación de flujo volumétrico* o bien, *relación volumétrica de flujo*. Por tanto, para flujo incompresible, la relación de flujo volumétrico hacia dentro de un volumen de control fijo, debe ser igual a la relación de flujo volumétrico hacia fuera del volumen de control. La relación de flujo volumétrico, Q, a través de una sección de una superficie de control, de área A, está dada por

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.15a}$$

La velocidad promedio, $\vec{V}$, en una sección, se define como

$$\vec{V} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.15b}$$

Considere ahora el caso general de flujo estacionario que no es incompresible. Como el flujo es estacionario, esto significa que a lo sumo $\rho = \rho(x, y, z)$. Por definición, ninguna de las propiedades del fluido varía con respecto al tiempo en un flujo estacionario. En consecuencia, el primer término de la ecuación 4.13 debe ser 0 y, por tanto, para flujo estacionario, el enunciado de la conservación de la masa se reduce a

$$0 = \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.16}$$

Asi, para flujo estacionario, la relación de flujo másico hacia adentro de un volumen de control debe ser igual a la relación de flujo másico hacia afuera del volumen de control.

Como advertimos en nuestra discusión previa de campos de velocidad en la sección 2-2, la idealización de *flujo uniforme en una sección* con frecuencia brinda un adecuado modelo de flujo. El flujo uniforme, en una sección, implica que la velocidad es constante a través de toda el área. Cuando la densidad también es constante en una sección, la integral de flujo en la ecuación 4.13 puede sustituirse por un producto. De tal modo, cuando se supone flujo uniforme en una sección n,

$$\int_{A_n} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho_n \vec{V}_n \cdot \vec{A}_n$$

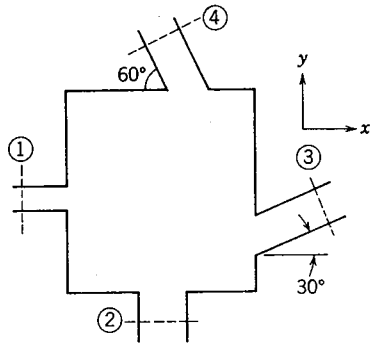
o empleando magnitudes escalares

$$\int_{A_n} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \pm |\rho_n V_n A_n|$$

Advierta también aquí que cuando $\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A}$ es negativa, la masa fluye hacia adentro, atravesando la superficie de control, mientras que la masa fluye hacia fuera de la superficie de control en regiones donde $\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A}$ es positiva. Este hecho brinda una comprobación rápida de los signos de los diversos términos de flujo en un análisis.

EJEMPLO 4.1 Flujo másico a través de un dispositivo de múltiples entradas y salidas

Considere un flujo estacionario de agua a través del dispositivo que se muestra en el diagrama. Las áreas son: $A_1 = 0.2$ pie^2, $A_2 = 0.5$ pie^2 y $A_3 = A_4 = 0.4$ pie^2. La relación de flujo másico que sale de la sección ③ es de 3.88 slug/s. La relación de flujo volumétrico hacia la sección ④ es de 1 pie^3/s y $\vec{V}_1 = 10\hat{i}$ pie/s. Si las propiedades se suponen uniformes a través de todas las secciones de flujo de entrada y de salida, determine la velocidad de flujo en la sección ②.



PROBLEMA EJEMPLO 4.1

DATOS: Flujo estacionario de agua a través del dispositivo. Propiedades uniformes en todos los puertos

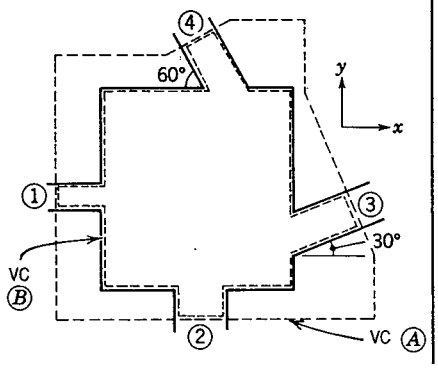
$A_1 = 0.2$ pie^2 $\quad A_2 = 0.5$ pie^2

$A_3 = A_4 = 0.4$ pie^2 $\quad \rho = 1.94$ slug/pie^3

$m_3 = 3.88$ slug/s (saliendo)

$\vec{V}_1 = 10\hat{i}$ pie/s

Relación de flujo volumétrico entrante en ④ = 1.0 pie^3/s



ENCUENTRE: La velocidad en la sección ②.

SOLUCIÓN:

Elija un volumen de control fijo. Se muestran dos posibilidades mediante las líneas interrumpidas.

Ecuación básica: $$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo estacionario
2) Flujo incompresible
3) Propiedades uniformes en cada sección donde el fluido cruza las fronteras del VC

Para flujo estacionario, el primer término es cero por definición, por lo que

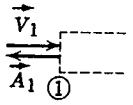
$$0 = \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Al observar cualquier volumen de control, vemos que hay cuatro secciones donde la masa fluye a través de la superficie de control. De manera que escribimos

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_3} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_4} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (1)$$

Vamos a considerar estas integrales una por una, admitiendo que las propiedades son uniformes sobre cada área y asumiendo que ρ = constante.

$$\int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_1} |\rho V\, dA| = -|\rho V_1 A_1|$$

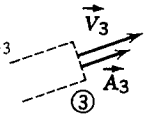


{El signo de $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ es negativo en la superficie ①.}

{Con los signos de valor absoluto indicados, hemos tomado en cuenta las direcciones de $\vec{V}$ y $d\vec{A}$ al tomar el producto punto.}

Puesto que no conocemos la dirección de $\vec{V}_2$, por el momento dejaremos la sección ②.

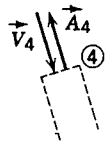
$$\int_{A_3} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_3} |\rho V\, dA| = |\rho V_3 A_3| = \dot{m}_3$$



{El signo de $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ es positivo en la superficie ③, puesto que el flujo sale.}

$$\int_{A_4} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_4} |\rho V\, dA| = -|\rho V_4 A_4|$$
$$= -\rho |V_4 A_4| = -\rho |Q_4|$$

donde Q es la relación de flujo volumétrico.



{El signo de $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ es negativo en la superficie ④.}

De la ecuación 1 anterior,

$$\int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{A_3} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{A_4} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$= +|\rho V_1 A_1| - \dot{m}_3 + \rho |Q_4|$$

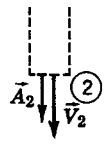
$$= \left| 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times 10 \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times 0.2 \text{ pie}^2 \right| - 3.88 \frac{\text{slug}}{\text{s}} + 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \left| 1.0 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}} \right|$$

$$\int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 1.94 \text{ slug/s}$$

Puesto que ésta es positiva, $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ en la sección (2) es positiva. El flujo es hacia afuera, como se muestra en el dibujo:

$$\int_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_2} |\rho V \, dA| = |\rho V_2 A_2| = 1.94 \text{ slug/s}$$

$$|V_2| = \frac{1.94 \text{ slug/s}}{\rho A_2} = 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{s}} \times \frac{\text{pie}^3}{1.94 \text{ slug}} \times \frac{1}{0.5 \text{ pie}^2} = 2 \text{ pie/s}$$



Como V_2 está en la dirección y negativa, entonces

$$\vec{V}_2 = -2\hat{j} \text{ pie/s}$$

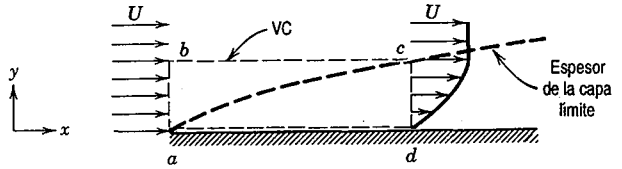
$\vec{V}_2$

Este problema ilustra el procedimiento recomendado para evaluar $\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$.

EJEMPLO 4.2 Relación de flujo másico en la capa límite

El fluido en contacto directo con una frontera sólida estacionaria tiene velocidad cero, es decir, no hay deslizamiento en la frontera. Así, el flujo sobre una placa plana se adhiere a la superficie de la misma y forma una capa límite, como se describe adelante. El flujo adelante de la placa es uniforme con velocidad, $\vec{V} = U\hat{i}$; $U = 30$ m/s. La distribución de velocidad dentro de la capa límite ($0 \leq y \leq \delta$) a lo largo de cd, es aproximadamente $u/U = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$.

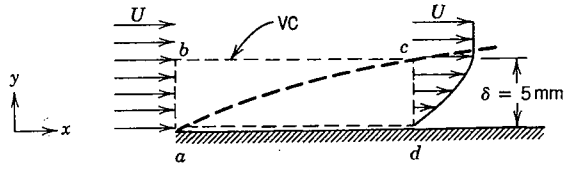
El espesor de la capa límite en esta posición es 5 mm. El fluido es aire con densidad $\rho = 1.24$ kg/m^3. Asumiendo que el ancho de la placa es 0.6 m, calcule la relación de flujo másico a través de la superficie bc del volumen de control $abcd$.



PROBLEMA EJEMPLO 4.2

DATOS: Un flujo estacionario incompresible sobre una placa plana, $\rho = 1.24$ kg/m^3.
Ancho de la placa, $w = 0.6$ m.
Velocidad uniforme en la parte delantera de la placa: $\vec{V} = U\hat{i}$, $U = 30$ m/s.

En $x = x_d$:
$\delta = 5$ mm
$\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$



ENCUENTRE: La relación de flujo másico a través de la superficie bc.

SOLUCIÓN:
El volumen de control fijo se elige como muestran las líneas interrumpidas.

Ecuación básica: $$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones: 1) Flujo estacionario

2) Flujo incompresible
3) Flujo bidimensional; las propiedades son independientes de z

Para flujo estacionario,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall = 0 \qquad \text{y, por tanto,} \qquad \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

Si se supone que no hay flujo en la dirección z, entonces

$$0 = \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{no hay flujo a}\\ \text{través de } da\end{array}\right)$$

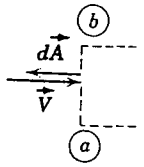
$$0 = \int_{A_{ab}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{A_{bc}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{A_{cd}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{A_{da}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\therefore \dot{m}_{bc} = \int_{A_{bc}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\int_{A_{ab}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} - \int_{A_{cd}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

{Necesitamos evaluar las integrales del lado derecho de la ecuación.}

Para una profundidad w en la dirección z, obtenemos

$$\int_{A_{ab}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\int_{A_{ab}}|\rho u\, dA| = -\int_{y_a}^{y_b}|\rho u w\, dy|$$

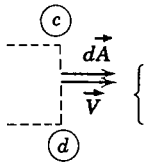


$\left\{\begin{array}{l}\vec{V}\cdot d\vec{A} \text{ es negativo}\\ dA = w\, dy\end{array}\right\}$

$$= -\int_0^{\delta}|\rho u w\, dy| = -\left|\int_0^{\delta}\rho U w\, dy\right| \qquad \{u = U \text{ sobre el área } ab\}$$

$$\int_{A_{ab}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -|[\rho U w y]_0^{\delta}| = -\rho U w\delta$$

$$\int_{A_{cd}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_{cd}}|\rho u\, dA| = \int_{y_d}^{y_c}|\rho u w\, dy|$$



$\left\{\begin{array}{l}\vec{V}\cdot d\vec{A} \text{ es positivo}\\ dA = w\, dy\end{array}\right\}$

$$= \int_0^{\delta}|\rho u w\, dy| = \int_0^{\delta}\left|\rho w U\left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]dy\right|$$

$$\int_{A_{cd}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \left|\rho w U\left[\frac{y^2}{\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2}\right]_0^{\delta}\right| = \left|\rho w U\delta\left[1 - \frac{1}{3}\right]\right| = \frac{2\rho U w\delta}{3}$$

$$\therefore \dot{m}_{bc} = \int_{A_{bc}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\int_{A_{ab}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} - \int_{A_{cd}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \rho U w\delta - \frac{2\rho U w\delta}{3}$$

$$= \frac{\rho U w\delta}{3} = \frac{1}{3}\times 1.24\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\times 0.6\ \text{m}\times 5\ \text{mm}\times\frac{\text{m}}{1000\ \text{mm}}$$

$$\int_{A_{bc}}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0.0372\ \text{kg/s} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{El signo positivo indica flujo hacia afuera}\\ \text{a través de la superficie } bc.\end{array}\right\} \quad \dot{m}_{bc}$$

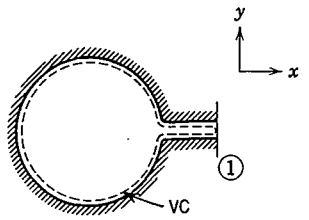
{Este problema ilustra la aplicación de la ecuación de la conservación de la masa para un volumen de control, al caso de un flujo no uniforme en una sección.}

EJEMPLO 4.3 Cambio de la densidad en un tanque de aire comprimido

Un tanque de 0.05 m³ de volumen contiene aire a 800 kPa (absolutos) y 15 C. En $t = 0$, el aire empieza a escapar del tanque a través de una válvula con un área de flujo de 65 mm². El aire que circula a través de la válvula tiene una velocidad de 311 m/s y una densidad de 6.13 kg/m³. Las propiedades en el resto del tanque pueden suponerse uniformes en cada instante. Determine la relación de cambio instantánea de la densidad en el tanque, en $t = 0$.

PROBLEMA EJEMPLO 4.3

DATOS: Tanque de volumen $\forall = 0.05$ m³ que contiene aire a $p = 800$ kPa (absolutos), $T = 15$ C. En $t = 0$, el aire escapa por una válvula. El aire sale con velocidad $V = 311$ m/s y densidad $\rho = 6.13$ kg/m³ a través del área $A = 65$ mm².



ENCUENTRE: La relación de cambio de la densidad del aire en el tanque en $t = 0$.

SOLUCIÓN:
Elija un volumen de control fijo como muestra la línea interrumpida.

Ecuación básica: $$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones: 1) Las propiedades en el tanque son uniformes, pero dependientes del tiempo
2) Flujo uniforme en la sección (1)

Como las propiedades se suponen uniformes en el tanque en cualquier instante, podemos sacar a ρ del integrando del primer término,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_{VC}\int_{VC} d\forall\right] + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Ahora, $\int_{VC} d\forall = \forall$, y por tanto

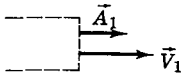
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)_{VC} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

El único lugar en donde la masa cruza la frontera del volumen de control es la superficie (1). Por consiguiente,

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) + \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

En la superficie (1), el signo de $\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ es positivo, por lo que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) + \int_{A_1} |\rho V\, dA| = 0$$



Si se supone que las propiedades son uniformes sobre la superficie (1), entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) + |\rho_1 V_1 A_1| = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) = -|\rho_1 V_1 A_1|$$

Como el volumen, $\forall$, del tanque no es una función del tiempo

$$\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} = -|\rho_1 V_1 A_1| \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{|\rho_1 V_1 A_1|}{\forall}$$

En $t = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -6.13 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 311 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 65 \text{ mm}^2 \times \frac{1}{0.05 \text{ m}^3} \times \frac{\text{m}^2}{10^6 \text{ mm}^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -2.48 \text{ kg/m}^3/\text{s} \qquad \{\text{la densidad está disminuyendo}\} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

{ Este problema ilustra la aplicación de la ecuación de la conservación de la masa para un volumen de control con flujo no estacionario. }

4.4 ECUACIÓN DE MOMENTO PARA EL VOLUMEN DE CONTROL INERCIAL

Deseamos desarrollar una formulación matemática, de la segunda ley de Newton, apropiada para aplicarla a un volumen de control. En esta sección, nuestra deducción se restringirá a un volumen de control inercial, fijo en el espacio relativo al sistema de coordenadas *xyz*, que no está acelerado respecto a un marco de referencia estacionario *XYZ*.

Para obtener la ecuación de la segunda ley de Newton para un volumen de control, el procedimiento es análogo al seguido para obtener la formulación matemática de la conservación de la masa, aplicada a un volumen de control. Empecemos con la formulación matemática para un sistema y luego empleemos la ecuación 4.11 para ir de la formulación del sistema a la de volumen de control.

Recuerde que la segunda ley de Newton para un sistema que se mueve con relación a un sistema inercial de coordenadas, fue dada por la ecuación 4.2a como

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.2a}$$

donde el momento lineal, $\vec{P}$, del sistema está dado por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{V}\, dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} \vec{V} \rho\, d\forall \tag{4.2b}$$

y la fuerza resultante, $\vec{F}$, incluye todas las fuerzas de superficie y másicas que actúan sobre el sistema,

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B$$

Las formulaciones de sistema y volumen de control se relacionan mediante la ecuación 4.11,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta \rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

donde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \eta \, dm = \int_{\forall\text{(sistema)}} \eta \rho \, d\forall \tag{4.6}$$

Para derivar la ecuación de la segunda ley de Newton para un volumen de control, establecemos

$$N = \vec{P} \qquad \text{y} \qquad \eta = \vec{V}$$

De la ecuación 4.11, con esta sustitución, obtenemos

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}\rho \, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.17}$$

De la ecuación 4.2a

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \vec{F}\,)_{\text{en el sistema}} \tag{4.2a}$$

En vista de que, al derivar la ecuación 4.11, el sistema y el volumen de control coincidían en t_0, entonces

$$\vec{F}\,]_{\text{en el sistema}} = \vec{F}\,]_{\text{en el volumen de control}}$$

A la luz de esto, las ecuaciones 4.2a y 4.17 pueden combinarse para producir la ecuación de la segunda ley de Newton para un volumen de control no acelerado

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}\rho \, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.18}$$

Esta ecuación establece que la suma de todas las fuerzas (de superficie y másicas), que actúan sobre un volumen de control no acelerado, es igual a la suma de la relación de cambio de momento, dentro del volumen de control, más la relación neta de flujo del momento que sale a través de la superficie de control.

La deducción de la ecuación de momento para un volumen de control se obtuvo directamente. La aplicación de esta ecuación básica a la solución de problemas no será difícil si usted practica cuidadosamente su empleo.

Al utilizar cualquier ecuación básica para un análisis de volumen de control, el primer paso debe ser dibujar las fronteras del volumen de control y marcar de manera apropiada las direcciones de las coordenadas. En la ecuación 4.18, la fuerza, $\vec{F}$, representa todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control, incluyendo tanto las fuerzas de superficie como las másicas. Si denotamos la fuerza másica por unidad de masa como $\vec{B}$, entonces

$$\vec{F}_B = \int \vec{B} \, dm = \int_{\text{VC}} \vec{B}\rho \, d\forall$$

Cuando la fuerza de gravedad es la única fuerza másica, entonces la fuerza másica por unidad de masa es $\vec{g}$. La fuerza de superficie debida a la presión está determinada por

$$\vec{F}_S = \int_A -p\, d\vec{A}$$

La naturaleza de las fuerzas que actúan sobre el volumen de control afectarán, sin duda, la elección de las fronteras del mismo.

Todas las velocidades, $\vec{V}$, en la ecuación 4.18 se miden respecto al volumen de control. El flujo de momento, $\vec{V}\ \rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A}$, a través de un elemento del área de la superficie de control, $d\vec{A}$, es un vector. El signo del producto escalar, $\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A}$, depende de la dirección del vector de velocidad, $\vec{V}$, relativo al vector de área, $d\vec{A}$. A su vez, el signo del vector de velocidad, $\vec{V}$, depende del sistema de coordenadas elegido.

La ecuación de momento es una ecuación vectorial. Al igual que con todas las ecuaciones vectoriales, puede escribirse mediante tres ecuaciones de componentes escalares. Respecto a un sistema de coordenadas *xyz*, las componentes escalares de la ecuación 4.18 son

$$F_x = F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall + \int_{SC} u\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

$$F_y = F_{S_y} + F_{B_y} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v\rho\, d\forall + \int_{SC} v\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19b)$$

$$F_z = F_{S_z} + F_{B_z} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} w\rho\, d\forall + \int_{SC} w\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19c)$$

Para emplear las ecuaciones escalares, también es necesario seleccionar un sistema de coordenadas al principio. Las direcciones positivas de las componentes de la velocidad, u, v y w, y las componentes de la fuerza, F_x, F_y, F_z, se establecen entonces respecto al sistema de coordenadas seleccionado. Como hemos señalado previamente, el signo del producto escalar, $\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A}$, depende de la dirección del vector de velocidad, $\vec{V}$, relativo al vector de área, $d\vec{A}$. De tal modo, el término de flujo en cualquiera de las ecuaciones 4.18 o 4.19, es un producto de dos cantidades que tienen signos algebraicos. Le recomendamos que proceda en dos pasos para determinar el flujo de momento a través de cualquier porción de una superficie de control:

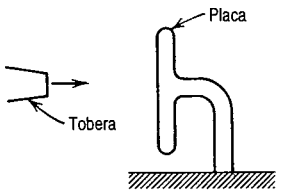
1. El primer paso es determinar el signo de $u\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A}$.

$$\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho|V\, dA|\cos\alpha = \pm|\rho V\, dA\cos\alpha|$$

2. El segundo paso es determinar el signo de cada componente de velocidad, u, v y w. El signo, que dependerá de la elección del sistema de coordenadas, debe ser consistente cuando se sustituyan los valores numéricos en los términos $u\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} = u\{\pm|\rho V\, dA\cos\alpha|\}$, etcétera.

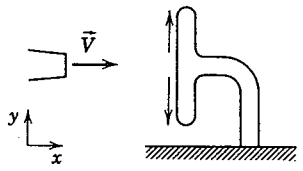
EJEMPLO 4.4 Elección del volumen de control para el análisis de momento

Agua que sale de una tobera fija incide sobre una placa plana, de la manera que se muestra. La velocidad del agua que sale de la tobera es de 15 m/s; el área de la tobera es 0.01 m^2. Suponiendo que el agua se dirige normal a la placa y que fluye a lo largo de la misma, determine la fuerza horizontal sobre el soporte.



PROBLEMA EJEMPLO 4.4

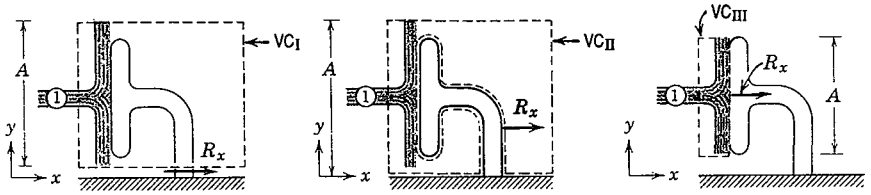
DATOS: Desde una tobera fija se lanza agua en dirección normal a una placa; el flujo subsecuente es paralelo a la placa.



Velocidad del chorro, $\vec{V} = 15\hat{i}$ m/s
Área de la tobera, $A_n = 0.01$ m^2

ENCUENTRE: La fuerza horizontal sobre el soporte.

SOLUCIÓN:
Elegimos un sistema de coordenadas al definir el problema anterior. Ahora debemos escoger un volumen de control apropiado. Varias elecciones posibles se muestran en seguida mediante las líneas punteadas.



En los tres casos, el agua de la tobera cruza la superficie de control a través del área A_1 (supuesta igual al área de la tobera) y se considera que abandona el volumen de control, tangente a la superficie de la placa, en la dirección $+y$ o $-y$. Antes de decidir cuál es el "mejor" volumen de control que puede usarse, escribiremos las ecuaciones básicas.

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

Suposiciones:
1) Flujo estacionario
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en cada sección donde el fluido cruza las fronteras del VC.

Independientemente de nuestra elección del volumen de control, el flujo es estacionario y las ecuaciones básicas se convierten en

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \text{y} \qquad \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

La evaluación del término del flujo de momento conducirá al mismo resultado para todos los volúmenes de control. Debemos escoger el volumen de control que posibilite la evaluación más directa de las fuerzas.

Al aplicar la ecuación del momento, recuerde que la fuerza, $\vec{F}$, representa todas las fuerzas que actúan *sobre* el volumen de control.

Vamos a resolver el problema empleando cada uno de los tres volúmenes de control.

VC$_I$

El volumen de control se ha seleccionado de modo que el área de la superficie izquierda sea igual al área de la superficie derecha. Denote esta área por medio de A.

El volumen de control atraviesa el soporte. Denotamos la fuerza del soporte sobre el volumen de control como R_x y asumimos que será positiva. (La fuerza del volumen de control sobre el soporte es igual y opuesta a R_x.)

Como estamos buscando la fuerza horizontal, escribimos la componente x de la ecuación del momento del flujo estacionario

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}$$

No hay fuerzas másicas en la dirección x, por lo que $F_{B_x} = 0$, y

$$F_{S_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Para evaluar F_{S_x}, debemos incluir todas las fuerzas de superficie que actúan sobre el volumen de control.

$F_{S_x} =$ $p_a A$ (fuerza debida a la presión atmosférica, actúa a la derecha (dirección positiva) sobre la superficie izquierda) $-$ $p_a A$ (fuerza debida a la presión atmosférica, actúa hacia la izquierda (dirección negativa) sobre la superfide derecha) $+$ R_x (fuerza de soporte sobre el volumen de control (supuesta positiva)

Consecuentemente, $F_{S_x} = R_x$, y

$$R_x = \int_{SC} u\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\rho\vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad \{\text{Para la masa que cruza la superficie superior y la del fondo, } u = 0.\}$$

$$= \int_{A_1} u\{-|\rho V_1\, dA|\} \qquad \{\text{En (1), } \rho\vec{V} \cdot d\vec{A} = -|\rho V_1\, dA|, \text{ puesto que la dirección de } \vec{V}_1 \text{ y } d\vec{A}_1 \text{ están separadas 180 °.}\}$$

$$= -u_1|\rho V_1 A_1| \qquad \{\text{propiedades uniformes sobre } A_1\}$$

$$= -\ 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \left| 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.01\ \text{m}^2 \right| \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \qquad \{u_1 = 15\ \text{m/s}\}$$

$R_x = -2.25$ kN $\qquad \{R_x \text{ actúa opuesta a la dirección positiva supuesta.}\}$

La fuerza sobre el soporte es

$K_x = -R_x = 2.25$ kN $\qquad \{\text{la fuerza sobre el soporte actúa hacia la derecha}\}$ Kx.

VC_{II}

El volumen de control se ha elegido de modo que el área de la superficie izquierda sea igual al área de la superficie derecha. Denotemos esta área por medio de A.

El volumen de control no atraviesa el soporte. Sin embargo, está en contacto con el soporte en varias partes del área de la superficie de control. Hay una fuerza ejercida por el soporte sobre la superficie de control. Denotamos la componente x de esta fuerza como R_x.

Luego, para este volumen de control, la componente x de la ecuación del momento conduce directamente (y de la misma manera, paso por paso) a la misma solución que la del volumen de control, VC_I, anterior.

VC_{III}

El volumen de control se ha elegido de manera que las áreas de las superficies izquierda y derecha sean iguales al área de la placa. Denotemos esta área mediante A.

Como en el caso del VC_{II}, la componente x de la fuerza del soporte sobre el VC se denota por medio de R_x.

Entonces, la componente x de la ecuación del momento,

$$F_{S_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

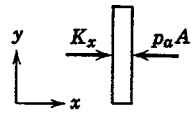
produce

$$F_{S_x} = p_aA + R_x = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\{-|\rho V_1 dA|\} = -2.25 \text{ kN}$$

Luego,

$$R_x = -p_aA - 2.25 \text{ kN} \qquad \text{y} \qquad K_x = -R_x = p_aA + 2.25 \text{ kN}$$

Para determinar la fuerza neta sobre la placa, necesitamos un diagrama de cuerpo libre de la misma:



$F_{neta} = K_x - p_aA$ {puesto que la presión atmosférica actúa en la parte posterior de la placa}

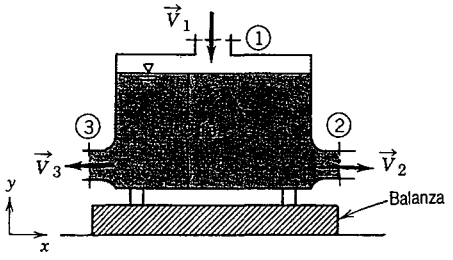
$$F_{neta} = p_aA + 2.25 \text{ kN} - p_aA = 2.25 \text{ kN}$$

{Este problema ilustra la aplicación de la ecuación de momento a un volumen de control inercial, destacando la elección apropiada del volumen de control.}

EJEMPLO 4.5 Tanque sobre una balanza: fuerza másica

Un recipiente metálico de 2 pies de altura, con un área interior de sección transversal de 1 pie^2, pesa 5 lbf cuando está vacío. El recipiente se coloca sobre una balanza y hacia su interior fluye agua a través de una abertura en la parte superior, mientras que hacia el exterior lo hace por medio de dos aberturas laterales de idéntica área, como se muestra en el diagrama. En condiciones de flujo estacionario, la altura del agua en el tanque es 1.9 pies. Determine la lectura sobre la balanza.

$A_1 = 0.1$ pie^2
$\vec{V}_1 = -5\hat{j}$ pie/s
$A_2 = A_3 = 0.1$ pie^2



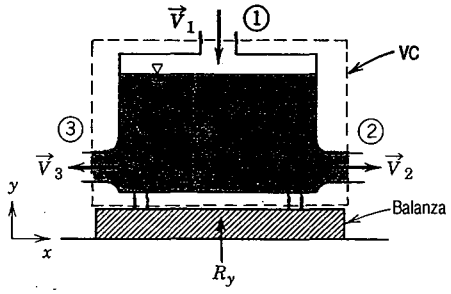
PROBLEMA EJEMPLO 4.5

DATOS: Un recipiente metálico, de 2 pies de altura y área de la sección transversal $A = 1$ pie^2, que pesa 5 lbf cuando está vacío. El recipiente descansa sobre una balanza. En condiciones de flujo estacionario, la profundidad del agua es 1.9 pies. El agua entra verticalmente por la sección ① y sale horizontalmente a través de las secciones ② y ③.

$A_1 = 0.1$ pie^2

$\vec{V}_1 = -5\hat{j}$ pie/s

$A_2 = A_3 = 0.1$ pie^2



ENCUENTRE: La lectura en la balanza.

SOLUCIÓN:

Elija un volumen de control como el mostrado; R_y es la fuerza de la balanza sobre el volumen de control y se considera positiva.

Ecuaciones básicas:
$$\vec{F}_S + \vec{F}_B = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} \vec{V}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo estacionario
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en cada sección donde el fluido cruza las fronteras del VC

Escribimos la componente y de la ecuación del momento

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \int_{SC} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

$F_{S_y} = R_y$ {No hay fuerza neta debida a la presión atmosférica.}

$F_{B_y} = -W_{\text{tanque}} - W_{H_2O}$ {Ambas fuerzas másicas actúan en la dirección y negativa.}

$$W_{H_2O} = \rho g \forall = \gamma A h$$

$$\int_{SC} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} v\{-|\rho_1 V_1\, dA|\} \qquad \left\{\begin{array}{l}\vec{V}\cdot d\vec{A} \text{ es negativa en } ① \\ v = 0 \text{ en las secciones } ② \text{ y } ③.\end{array}\right\}$$

$$= -v_1|\rho_1 V_1 A_1| \qquad \{\text{Estamos suponiendo propiedades uniformes en } ①.\}$$

Sustutuyendo en la ecuación 1, se obtiene

$$R_y - W_{\text{tanque}} - \gamma A h = -v_1\,|\rho_1 V_1 A_1|$$

o

$$R_y = W_{\text{tanque}} + \gamma A h - v_1\,|\rho_1 V_1 A_1|$$

La sustitución de valores numéricos con $v_1 = -5$ pies/s produce

$$R_y = 5 \text{ lbf} + 62.4\frac{\text{lbf}}{\text{pie}^3} \times 1 \text{ pie}^2 \times 1.9 \text{ pie} - \left(-5\frac{\text{pie}}{\text{s}}\right)\left|1.94\frac{\text{slug}}{\text{pie}^3}\left(-5\frac{\text{pie}}{\text{s}}\right)0.1 \text{ pie}^2\right| \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{pie}}$$

$R_y = 128$ lbf {La fuerza de la balanza sobre el VC es hacia arriba.}

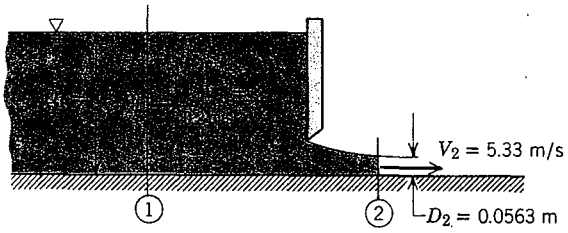
La fuerza del volumen de control en la balanza es $K_y = -R_y = -128$ lbf.

El signo menos indica que la fuerza en la balanza es hacia abajo en nuestro sistema de coordenadas. Por tanto, la lectura en la balanza es 128 lbf. ←

{ Este problema ejemplifica la aplicación de la ecuación del momento a un volumen de control inercial con fuerzas másicas incluidas. }

EJEMPLO 4.6 Flujo bajo una compuerta de esclusa: fuerza de presión hidrostática

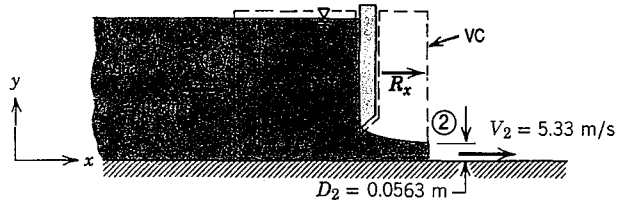
En un canal abierto circula agua por bajo una compuerta de esclusa, como se indica en el dibujo. El flujo es incompresible y uniforme en las secciones ① y ②. Las distribuciones de presión hidrostática pueden considerarse en las secciones ① y ② porque en ellas, las líneas de corriente del flujo son esencialmente rectas. Determine la magnitud y dirección de la fuerza por unidad de ancho, ejercida por el flujo sobre la compuerta.



PROBLEMA EJEMPLO 4.6

DATOS: Un flujo bajo una compuerta de esclusa. Ancho = w.

ENCUENTRE: La fuerza ejercida (por unidad de ancho) sobre la compuerta.



SOLUCIÓN:

Para el análisis, elija el VC y el sistema de coordenadas indicados. Aplique la componente x de la ecuación de momento.

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall + \int_{SC} u\rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

($F_{S_x} = 0$ (2); $F_{B_x} = 0$ (3))

Suposiciones:
1) F_f despreciable (no se considera la fricción en el fondo del canal)
2) $F_{B_x} = 0$

3) Flujo estacionario
4) Flujo incompresible
5) Flujo uniforme en cada sección
6) Distribuciones de presión hidrostática en ① y ②

Por tanto,

$$F_{S_x} = u_1\{-|\rho V_1 w D_1|\} + u_2\{|\rho V_2 w D_2|\}$$

Las fuerzas de superficie que actúan sobre el VC se deben a la presión y a la fuerza desconocida, R_x. De la suposición 6),

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \qquad p = p_0 + \rho g(y_0 - y) = p_{\text{atm}} + \rho g(D - y)$$

La evaluación de F_{S_x} da como resultado

$$\begin{aligned} F_{S_x} &= \int_0^{D_1} p_1\, dA_1 - \int_0^{D_2} p_2\, dA_2 - p_{\text{atm}}(D_1 - D_2)w + R_x \\ &= \int_0^{D_1} [p_{\text{atm}} + \rho g(D_1 - y)]w\, dy \\ &\quad - \int_0^{D_2} [p_{\text{atm}} + \rho g(D_2 - y)]w\, dy - p_{\text{atm}}(D_1 - D_2)w + R_x \end{aligned}$$

$$F_{S_x} = \cancel{p_{\text{atm}} D_1 w} + \frac{\rho g D_1^2}{2} w - \cancel{p_{\text{atm}} D_2 w} - \frac{\rho g D_2^2}{2} w - \cancel{p_{\text{atm}} D_1 w} + \cancel{p_{\text{atm}} D_2 w} + R_x$$

o

$$F_{S_x} = R_x + \frac{\rho g w}{2}(D_1^2 - D_2^2)$$

Sustituyendo en la ecuación del momento, con $u_1 = V_1$ y $u_2 = V_2$, se obtiene

$$R_x + \frac{\rho g w}{2}(D_1^2 - D_2^2) = -V_1|\rho V_1 w D_1| + V_2|\rho V_2 w D_2|$$

o

$$R_x = \rho w(V_2^2 D_2 - V_1^2 D_1) - \frac{\rho g w}{2}(D_1^2 - D_2^2)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{R_x}{w} &= \rho(V_2^2 D_2 - V_1^2 D_1) - \frac{\rho g}{2}(D_1^2 - D_2^2) \\ &= 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left[(5.33)^2(0.0563) - (0.2)^2(1.5)\right]\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\,\text{m} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \times 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left[(1.5)^2 - (0.0563)^2\right]\text{m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} \\ \frac{R_x}{w} &= -9.47\ \text{kN/m} \end{aligned}$$

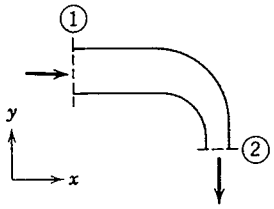
R_x es la fuerza externa desconocida que actúa *sobre* el volumen de control, siendo aplicada mediante la compuerta. En consecuencia, la fuerza de todos los fluidos *sobre* la compuerta es K_x, donde $K_x = -R_x$. Por consiguiente,

$$\frac{K_x}{w} = -\frac{R_x}{w} = 9.47\ \text{kN/m} \qquad \{\text{aplicada a la derecha}\} \qquad \frac{K_x}{w} \longleftarrow$$

Este problema ejemplifica la aplicación de la ecuación del momento a un volumen de control en el que la presión no es uniforme en toda la superficie de control.

EJEMPLO 4.7 Flujo a través de un codo reductor: usando las de presiones manométricas

A través del codo reductor de 90° que se muestra en el diagrama, fluye agua estacionariamente. En la entrada del codo, la presión absoluta es 221 kPa y el área de la sección transversal es 0.01 m². En la salida, el área de la sección transversal es 0.0025 m² y la velocidad, 16 m/s. La presión en la salida es la atmosférica. Determine la fuerza requerida para mantener fijo el codo.

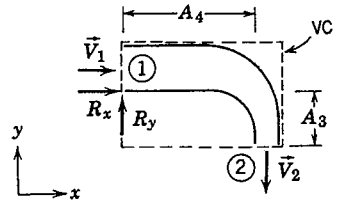


PROBLEMA EJEMPLO 4.7

DATOS: Flujo de agua estacionario a través de un codo reductor de 90°.

$p_1 = 221$ kPa (abs) $\quad A_1 = 0.01$ m²

$\vec{V}_2 = -16\hat{j}$ m/s $\quad A_2 = 0.0025$ m²



ENCUENTRE: La fuerza requerida para mantener fijo el codo.

SOLUCIÓN:

Elija el volumen de control según indica la línea interrumpida.

R_x y R_y son las componentes de la fuerza requerida para mantener fijo el codo. (Se suponen positivas y son fuerzas que actúan en el VC.)

A_3 es el área de los lados verticales del VC, excluyendo A_1; $A_{\text{lados verticales}} = A_1 + A_3$.

A_4 es el área de los lados horizontales del VC, excluyendo A_2, $A_{\text{lados horizontales}} = A_2 + A_4$.

Ecuaciones básicas:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho\, d\forall}_{=0(4)} + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall}_{=0(4)} + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo uniforme en cada sección
2) Presión atmosférica, $p_a = 101$ kPa
3) Flujo incompresible
4) Flujo estacionario

Escribir la componente x de la ecuación del momento da como resultado

$$F_{S_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{F_{B_x} = 0 \text{ y } u_2 = 0\}$$

$$p_1A_1 + p_aA_3 - p_a(A_1 + A_3) + R_x = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{La presión sobre el lado derecho}\\ \text{es } p_a\text{. La presión sobre el lado izquierdo}\\ \text{es } p_1 \text{ sobre } A_1 \text{ y } p_a \text{ sobre } A_3.\end{array}\right\}$$

$$(p_1 - p_a)A_1 + R_x = \int_{A_1} u\{-|\rho V_1\, dA|\} \qquad \{\vec{V}\cdot d\vec{A} \text{ es negativa en } A_1.\}$$

$$R_x = -p_{1_g}A_1 - u_1|\rho V_1 A_1| \qquad \{p_1 - p_a = p_{1_{\text{manométrica}}}\}$$

Para encontrar V_1, se emplea la ecuación de continuidad:

$$\int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0 = \int_{A_1}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{A_2}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\therefore 0 = -\int_{A_1}|\rho V\, dA| + \int_{A_2}|\rho V\, dA| = -|\rho V_1A_1| + |\rho V_2A_2|$$

y

$$|V_1| = |V_2|\frac{A_2}{A_1} = 16\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{0.0025}{0.01} = 4\ \text{m/s} \qquad \therefore \vec{V}_1 = 4\hat{i}\ \text{m/s}$$

$$R_x = -p_{1_g}A_1 - u_1|\rho V_1A_1|$$

$$= -\left|1.20\times 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 0.01\ \text{m}^2 - 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right|999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.01\ \text{m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\Bigg|$$

$$R_x = -1.36\ \text{kN} \qquad \{R_x \text{ para mantener el codo actúa a la izquierda}\}\ R_x \longleftarrow$$

Escribiendo la componente y de la ecuación del momento, se obtiene

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \int_{SC} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_2} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{v_1 = 0\}$$

$$p_aA_4 + p_aA_2 - p_aA_4 - p_aA_2 + F_{B_y} + R_y = \int_{A_2} v\{|\rho V\, dA|\} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{La presión es } p_a \text{ sobre la parte}\\ \text{superior y el fondo del VC.}\\ \vec{V}\cdot d\vec{A} \text{ es positiva en } ②.\end{array}\right\}$$

$$F_{B_y} + R_y = v_2|\rho V_2A_2|$$

$$R_y = -F_{B_y} + v_2|\rho V_2A_2| \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Puesto que no conocemos el volumen o la}\\ \text{masa del codo, no podemos evaluar } F_{B_y}.\end{array}\right\}$$

Al sustituir los valores numéricos, admitiendo que $\vec{V}_2 = -16\hat{j}$ m/s, entonces $v_2 = -16$ m/s.

$$R_y = -F_{B_y} + \left(-16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left|999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(-16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)0.0025\ \text{m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}\right|$$

$$R_y = -F_{B_y} - 639\ \text{N}$$

La omisión de F_{B_y} da como resultado

$$R_y = -639\ \text{N} \qquad \{R_y \text{ para mantener al codo actúa hacia abajo}\}\ R_y \longleftarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Este problema ilustra la aplicación de la ecuación del momento a un volumen de control inercial}\\ \text{en el cual la presión no es la atmosférica a través de toda la superficie de control.}\end{array}\right\}$$

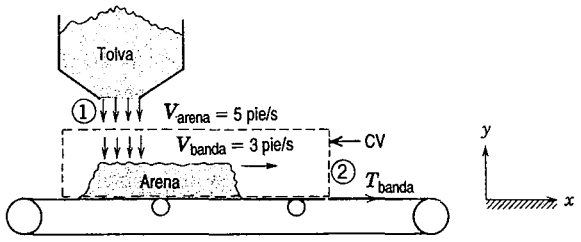
Puesto que las fuerzas de presión sobre toda la superficie de control deben incluirse en el análisis, el empleo de presiones manométricas sobre todas las superficies brinda resultados correctos (y con frecuencia más directos).

EJEMPLO 4.8 Llenado de una banda transportadora: relación de cambio del momento en el volumen de control

Una banda transportadora horizontal que se mueve a 3 pies/s, recibe arena de una tolva. La arena cae verticalmente desde la tolva hasta la banda, a una velocidad de 5 pies/s y una relación de flujo de 500 lbm/s (la densidad de la arena es aproximadamente 2700 lbm/yarda cúbica). Inicialmente, la banda transportadora está vacía, pero poco a poco empieza a llenarse con arena. Si la fricción en el sistema de accionamiento y los rodillos es despreciable, encuentre la tensión requerida para tirar de la banda mientras se está llenando.

PROBLEMA EJEMPLO 4.8

DATOS: La banda transportadora y la tolva mostradas en el diagrama.



ENCUENTRE: T_{banda} en el instante indicado.

SOLUCIÓN:

Utilice el volumen de control y las coordenadas que se muestran. Aplique la componente x de la ecuación del momento.

Ecuaciones básicas:

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(2)} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall + \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) $F_{S_x} = T_{banda} = T$
2) $F_{B_x} = 0$
3) Flujo uniforme en la sección ①
4) Toda la arena sobre la banda se mueve con $V_{banda} = V_b$

Por tanto,

$$T = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall + u_1\{-|\rho V_1 A_1|\} + u_2\{|\rho V_2 A_2|\}$$

Puesto que $u_1 = 0$ y no hay flujo en la sección (2), entonces $T = \dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{VC} u\,\rho\,d\forall$

De la suposición 4), en el interior del VC, $u = V_b$ = constante, y por consiguiente,

$$T = V_b \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall = V_b \frac{\partial M_s}{\partial t}$$

donde M_s es la masa de la arena sobre la banda (dentro del volumen de control).

De la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} M_s = -\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{m}_s = 500 \text{ lbm/s}$$

Por tanto,

$$T = V_b \dot{m}_s = 3 \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times 500 \frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{\text{slug}}{32.2 \text{ lbm}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$$T = 46.6 \text{ lbf} \longleftarrow T$$

Este problema ejemplifica una aplicación de la ecuación del momento a un caso en el que la relación de cambio del momento dentro del volumen de control, no es igual a cero.

**4-4.1 Análisis del volumen de control diferencial

Hemos considerado varios ejemplos en los cuales las ecuaciones de la conservación de la masa y del momento se han aplicado a volúmenes de control finitos. El volumen de control elegido para el análisis no necesita ser de tamaño finito.

La aplicación de las ecuaciones básicas a un volumen de control diferencial conduce a ecuaciones diferenciales que describen las relaciones entre las propiedades en el campo de flujo. En algunos casos, la ecuación diferencial puede resolverse para brindar información detallada acerca de las variaciones de la propiedad en el campo de flujo. En el caso de flujo estacionario, incompresible y sin fricción a lo largo de una línea de corriente, la integración de una de tales ecuaciones diferenciales lleva a una relación útil entre la velocidad, la presión y la elevación en un campo de flujo. Este caso se presenta para ilustrar el empleo de volúmenes de control diferenciales.

Aplicaremos las ecuaciones de continuidad y momento a un flujo incompresible estacionario sin fricción, como se muestra en la figura 4.4. El volumen de control elegido está fijo en el espacio y delimitado por líneas de corriente de flujo y es, por consiguiente, un elemento de un tubo de corriente. La longitud del volumen de control es ds.

Debido a que el volumen de control está delimitado por líneas de corriente, el único flujo a través de las superficies límite se presenta en las secciones extremas. Éstas se localizan en las coordenadas s y $s + ds$, medidas a lo largo de la línea de corriente central.

A las propiedades en la sección de entrada se les asignan valores simbólicos arbitrarios. Las propiedades en la sección de salida supuestamente aumentan por una cantidad diferencial. De modo que en $s + ds$, la velocidad de flujo se supone que será $V_s + dV_s$, y así sucesivamente. Se considera

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

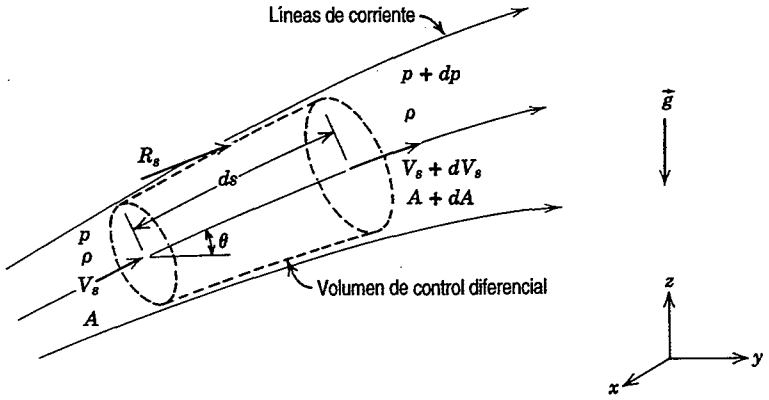


Fig. 4.4 Volumen de control diferencial para el análisis del momento de un flujo a través de un tubo de corriente.

que los cambios diferenciales, dp, dV_s y dA, serán positivos en la formulación del problema. (Como en el análisis de cuerpo libre en estática o dinámica, el signo algebraico real de cada cambio diferencial será determinado a partir de los resultados del análisis.)

Después de esto aplicaremos la ecuación de continuidad y la componente s de la ecuación del momento, al volumen de control de la figura 4.4.

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones:
1) Flujo estacionario
2) No hay flujo a través de las líneas frontera de corriente
3) Flujo incompresible, ρ = constante

Entonces

$$0 = \{-|\rho V_s A|\} + \{|\rho(V_s + dV_s)(A + dA)|\}$$

y

$$\rho V_s A = \rho(V_s + dV_s)(A + dA) \tag{4.20a}$$

Al desarrollar el lado derecho y simplificar, obtenemos

$$0 = V_s dA + A dV_s + dA dV_s$$

Pero $dA dV_s$ es un producto de diferenciales que puede omitirse, si se compara con $V_s\, dA$ o $A dV_s$. En consecuencia,

$$0 = V_s\, dA + A\, dV_s \tag{4.20b}$$

b. Ecuación de momento para una línea de corriente

Ecuación básica: $$F_{S_s} + F_{B_s} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_s \rho \, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} u_s \rho \vec{V} \tag{4.21}$$

Suposición: 4) No hay fricción: $R_s = 0$ y F_{S_s} se debe solamente a las fuerzas de presión

La fuerza de presión tendrá tres términos:

$$F_{S_s} = pA - (p + dp)(A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA \tag{4.22a}$$

El primero y segundo términos, en la ecuación 4.22a, son las fuerzas de presión que actúan sobre las caras de los extremos de la superficie de control. El tercer término es la fuerza de presión que actúa en la dirección s, sobre la superficie de corriente límite del volumen de control. Su magnitud es el producto de la presión promedio que actúa sobre la superficie de corriente, $p + \frac{1}{2}dp$, y la componente de área de la superficie de corriente, en la dirección s, dA. La ecuación 4.22a se simplifica en

$$F_{S_s} = -A\,dp - \tfrac{1}{2}dp\,dA \tag{4.22b}$$

La componente de fuerza másica, en la dirección s, es

$$F_{B_s} = \rho g_s \, d\forall = \rho(-g \operatorname{sen}\theta)\left(A + \frac{dA}{2}\right) ds$$

Pero $\operatorname{sen}\theta ds = dz$, por lo que

$$F_{B_s} = -\rho g \left(A + \frac{dA}{2}\right) dz \tag{4.22c}$$

El flujo del momento será

$$\int_{SC} u_s \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = V_s\{-|\rho V_s A|\} + (V_s + dV_s)\{|\rho(V_s + dV_s)(A + dA)|\}$$

puesto que no hay flujo másico a través de las superficies de corriente. Los términos entre corchetes son iguales debido a la continuidad, ecuación 4.20a, de modo que

$$\int_{SC} u_s \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = V_s(-\rho V_s A) + (V_s + dV_s)(\rho V_s A) = \rho V_s A\, dV_s \tag{4.23}$$

La sustitución de las ecuaciones 4.22b, 4.22c y 4.23 en la ecuación del momento, da como resultado

$$-A\,dp - \tfrac{1}{2}dp\,dA - \rho g A\,dz - \tfrac{1}{2}\rho g\,dA\,dz = \rho V_s A\,dV_s$$

Dividiendo entre ρA y notando que los productos de las diferenciales son despreciables comparados con los términos restantes, obtenemos

$$-\frac{dp}{\rho} - g\,dz = V_s\,dV_s = d\left(\frac{V_s^2}{2}\right)$$

o

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V_s^2}{2}\right) + g\,dz = 0 \tag{4.24}$$

Para un flujo incompresible, esta ecuación puede integrarse para obtener

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz = \text{constante}$$

u omitiendo el subíndice s,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{4.25}$$

Esta ecuación está sujeta a las siguientes restricciones:

1. Flujo estacionario.
2. Flujo sin fricción.
3. Flujo a lo largo de una línea de corriente.
4. Flujo incompresible.

Al aplicar la ecuación del momento a un volumen de control de tubo de corriente infinitesimal, para un flujo estacionario e incompresible sin fricción, hemos obtenido una relación entre la presión, la velocidad y la altitud. Esta relación es muy eficaz y útil. Por ejemplo, se podría haber usado para evaluar la presión en la entrada del codo reductor, analizado en el problema ejemplo 4.7, o para determinar la velocidad del agua que sale de la compuerta de esclusa del problema ejemplo 4.6. En estas dos situaciones de flujo, las restricciones necesarias para obtener la ecuación 4.25 son idealizaciones razonables del comportamiento real del flujo. Las restricciones deben subrayarse fuertemente porque no siempre forman un modelo realista del comportamiento del flujo; en consecuencia, deben justificarse con todo cuidado cada vez que la ecuación 4.25 se aplique.

La ecuación 4.25 es una forma de la ecuación de Bernoulli. Se deducirá otra vez en detalle en el capítulo 6 debido a que es una herramienta muy útil en el análisis del flujo. Además, una deducción alternativa brindará evidencia adicional respecto a la necesidad de tener cuidado al aplicar la ecuación.

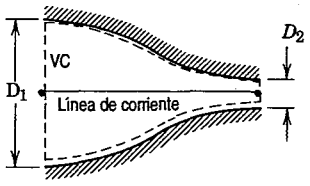
EJEMPLO 4.9 Flujo en tobera: aplicación de la ecuación de Bernoulli

Por una tobera horizontal, fluye agua establemente descargándose a la atmósfera. En la entrada de la tobera, el diámetro es D_1; en la salida, D_2. Obtenga una expresión para la presión manométrica mínima que se requiere en la entrada de la tobera para producir un flujo de volumen determinado, Q. Evalúe la presión manométrica de la entrada si $D_1 = 3.0$ pulg, $D_2 = 1.0$ pulg y el flujo volumétrico es 7 pie^3/s.

PROBLEMA EJEMPLO 4.9

DATOS: Un flujo estacionario de agua, a través de una tobera horizontal, que se descarga a la atmósfera.

$D_1 = 3.0$ pulg. $D_2 = 1.0$ pulg. $p_2 = p_{atm}$



ENCUENTRE: *a*) p_{1g} como función del flujo volumétrico, Q.
b) Evalúe para $Q = 0.7$ pies^3/s.

SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas:
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$
$$= 0 \quad (1)$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo estacionario
2) Flujo incompresible
3) Flujo sin fricción
4) Flujo a lo largo de una línea de corriente
5) $z_1 = z_2$
6) Flujo uniforme en las secciones (1) y (2)

Aplique la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente entre los puntos (1) y (2) para evaluar p_1. Por tanto,

$$p_{1_g} = p_1 - p_{atm} = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho}{2}V_1^2\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right]$$

Aplique la ecuación de continuidad

$$0 = \{-|\rho V_1 A_1|\} + \{|\rho V_2 A_2|\} \quad \text{o} \quad V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q$$

por lo que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{y} \quad V_1 = \frac{Q}{A_1}$$

Entonces

$$p_{1_g} = \frac{\rho Q^2}{2A_1^2}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$$

Como $A = \pi D^2/4$, entonces

$$p_{1_g} = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 D_1^4}\left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1\right]$$

Con $D_1 = 3.0$ pulg, $D_2 = 1.0$ pulg y $\rho = 1.94$ slug/pie^3,

$$p_{1_g} = \frac{8}{\pi^2} \times 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times 1\frac{1}{(3)^4 \text{ pulg.}^4} \times Q^2 \, [(3.0)^4 - 1] \, \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}} \times 144 \frac{\text{pulg.}^2}{\text{pie}^2}$$

$$p_{1_g} = 224Q^2 \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{pulg.}^2 \cdot \text{pie}^6} \longleftarrow p_{1_g}$$

Con $Q = 0.7$ pies^3/s, entonces $p_{1_g} = 110$ lbf/pulg^2

Este problema ejemplifica la aplicación de la ecuación de Bernoulli a un flujo donde las restricciones de estabilidad, incompresibilidad y ausencia de fricción a lo largo de una línea de corriente son un modelo de flujo razonable.

4-4.2 Volumen de control moviéndose con velocidad constante

En los problemas anteriores, los cuales ilustran las aplicaciones de la ecuación del momento a volúmenes de control inerciales, solamente hemos considerado volúmenes de control estacionarios. Un volumen de control (fijo en relación con un marco de referencia *xyz*) moviéndose con una velocidad constante, $\vec{V}_{rf}$, relativa a un marco de referencia fijo (inercial) *XYZ*, también es inercial, puesto que no tiene aceleración respecto a *XYZ*.

La ecuación 4.11, que expresa las derivadas del sistema en términos de variables de volumen de control, es válida para cualquier sistema de coordenadas *xyz* en movimiento (fijo al volumen de control), siempre que:

1. Todas las velocidades se miden *relativas* al volumen de control.
2. Todas las derivadas respecto al tiempo se miden *relativas* al volumen de control.

Para subrayar este punto, reescribimos la ecuación 4.11 como

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.26}$$

Puesto que todas las derivadas con respecto al tiempo deben medirse relativas al volumen de control, al emplear esta ecuación para obtener la ecuación del momento para un volumen de control inercial, a partir de la formulación de sistema, debemos establecer

$$N = \vec{P}_{xyz} \qquad \text{y} \qquad \eta = \vec{V}_{xyz}$$

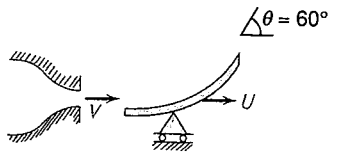
La ecuación del volumen de control se escribe entonces como

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.27}$$

La ecuación 4.27 es la formulación de la segunda ley de Newton aplicada a cualquier volumen de control inercial (estacionario o moviéndose con velocidad constante). Es idéntica a la ecuación 4.18 excepto en que hemos incluido el subíndice *xyz* para acentuar que las cantidades deben medirse relativas al volumen de control. (Es útil imaginar que las velocidades son aquellas que vería un observador moviéndose a velocidad constante con el volumen de control.) La ecuación del momento se aplica a un volumen de control inercial moviéndose con velocidad constante, en el problema ejemplo 4.10.

EJEMPLO 4.10 Álabe moviéndose con velocidad constante

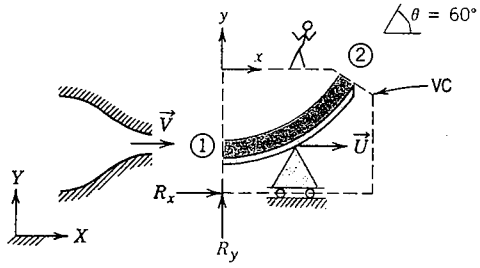
El diagrama muestra un álabe con un ángulo de desvío de 60°. El álabe se mueve a velocidad constante, U = 10 m/s, y recibe un chorro de agua que sale de una tobera estacionaria con velocidad V = 30 m/s. La tobera tiene un área de salida de 0.003 m². Determine la fuerza que debe aplicarse para mantener la velocidad del álabe constante.



PROBLEMA EJEMPLO 4.10

DATOS: Un álabe, con ángulo de desvío $\theta = 60°$, que se mueve con velocidad constante, $\vec{U} = 10\hat{i}$ m/s. Por el álabe fluye agua de una tobera de área constante, $A = 0.003$ m², con velocidad $\vec{V} = 30\hat{i}$ m/s, como se muestra.

ENCUENTRE: La fuerza que debe aplicarse para mantener constante la velocidad del álabe.



SOLUCIÓN:

Elija un volumen de control que se mueva con el álabe a velocidad constante, $\vec{U}$, como muestran las líneas interrumpidas. R_x y R_y son las componentes de la fuerza requerida para mantener la velocidad del volumen de control a $10\hat{i}$ m/s.

El volumen de control es inercial, puesto que no se está acelerando (U = constante). Recuerde que todas las velocidades deben medirse relativas al volumen de control al aplicarse las ecuaciones básicas.

Ecuaciones básicas:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:

1) El flujo es estacionario con respecto al álabe
2) La magnitud de la velocidad relativa a lo largo del álabe es constante: $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V - U$
3) Las propiedades son uniformes en las secciones ① y ②
4) $F_{B_x} = 0$
5) Flujo incompresible

La componente x de la ecuación del momento es

$$F_{S_x} + \underbrace{\cancel{F_{B_x}}}_{=0(4)} = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\cancel{\int_{VC}}}_{=0(1)} u_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{SC} u_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

No hay fuerza neta de presión, puesto que p_{atm} actúa sobre todos los lados del VC. De tal modo,

$$R_x = \int_{A_1} u\{-|\rho V\, dA|\} + \int_{A_2} u\{|\rho V\, dA|\} = -u_1|\rho V_1 A_1| + u_2|\rho V_2 A_2|$$

(Todas las velocidades se miden en relación con *xyz*.) De la ecuación de continuidad,

$$0 = \int_{A_1} \{-|\rho V\, dA|\} + \int_{A_2} |\rho V\, dA| = -|\rho V_1 A_1| + |\rho V_2 A_2|$$

o

$$|\rho V_1 A_1| = |\rho V_2 A_2|$$

Por tanto,

$$R_x = (u_2 - u_1)|\rho V_1 A_1|$$

Todas la velocidades deben medirse relativas al VC; por lo que observamos que

$$V_1 = V - U \qquad V_2 = V - U$$

$$u_1 = V - U \qquad u_2 = (V - U)\cos\theta$$

La sustitución produce

$$R_x = [(V-U)\cos\theta - (V-U)]|\rho(V-U)A_1| = (V-U)(\cos\theta - 1)|\rho(V-U)A_1|$$

$$= (30-10)\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ (0.50-1)\left|999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ (30-10)\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.003\ \text{m}^2\right| \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$R_x = -599\ \text{N} \qquad \{\text{hacia la izquierda}\}$$

Al escribir la componente *y* de la ecuación del momento, obtenemos

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} v_{xyz}\rho\, d\forall}_{=0(1)} + \int_{\text{SC}} v_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Al denotar la masa del VC como *M*,

$$R_y - Mg = \int_{\text{SC}} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_2} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{v_1 = 0\} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Todas las velocidades}\\ \text{se miden relativas}\\ \text{a } xyz.\end{array}\right\}$$

$$= \int_{A_2} v|\rho V\, dA| = v_2|\rho V_2 A_2| = v_2|\rho V_1 A_1| \quad \{\text{Recuerde } |\rho V_2 A_2| = |\rho V_1 A_1|.\}$$

$$= (V-U)\,\text{sen}\,\theta|\rho(V-U)A_1|$$

$$= (30-10)\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ (0.866)\left|999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ (30-10)\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.003\ \text{m}^2\right| \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$R_y - Mg = 1.04\ \text{kN} \qquad \{\text{hacia arriba}\}$$

En consecuencia, la fuerza vertical (además del peso del álabe y del agua dentro del VC) requerida para mantener el movimiento es

$$R_y = 1.04\ \text{kN} \qquad \{\text{hacia arriba}\}$$

Entonces la fuerza neta requerida para mantener constante la velocidad del álabe es

$$\vec{R} = -0.599\hat{i} + 1.04\hat{j} \text{ kN} \longleftarrow \vec{R}$$

Este problema ejemplifica el hecho de que al aplicar la ecuación del momento a un volumen de control inercial, todas las velocidades deben medirse con relación al volumen de control.

4-5 ECUACIÓN DEL MOMENTO PARA EL VOLUMEN DE CONTROL CON ACELERACIÓN RECTILÍNEA

Para un volumen de control inercial (que no tiene aceleración relativa a un marco de referencia estacionario), la formulación apropiada de la segunda ley de Newton está dada por la ecuación 4.27,

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.27}$$

No todos los volúmenes de control son inerciales; un cohete debe acelerarse si va a despegar del suelo. Como nos interesa analizar volúmenes de control que puedan acelerarse con relación a coordenadas inerciales, es lógico preguntar si puede emplearse la ecuación 4.27 en el caso de un volumen de control acelerado. Para responder esta pregunta, vamos a repasar brevemente los dos elementos principales utilizados en el desarrollo de la ecuación 4.27.

Primero, al relacionar las derivadas del sistema con la formulación del volumen de control (ecuación 4.26 o 4.11), éste se encontraba fijo respecto a *xyz*; el campo de flujo, $\vec{V}(x, y, z, t)$, se especificó respecto a las coordenadas *x, y* y *z*. No se impuso restricción sobre el movimiento del marco de referencia *xyz*. En consecuencia, la ecuación 4.26 es válida en todo instante para cualquier movimiento arbitrario de las coordenadas *x, y* y *z*, siempre que todas las derivadas respecto al tiempo y las velocidades en la ecuación se midan relativas al volumen de control.

Segundo, la ecuación del sistema

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.2a}$$

donde el momento lineal, $\vec{P}$, del sistema está determinado por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{V}\, dm = \int_{\forall\ \text{(sistema)}} \vec{V}\rho\, d\forall \tag{4.2b}$$

es válida sólo para velocidades medidas respecto a un marco de referencia inercial. Por consiguiente, si denotamos el marco de referencia inercial mediante *XYZ*, la segunda ley de Newton establece que

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}_{XYZ}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.28}$$

Como las derivadas respecto al tiempo de $\vec{P}_{XYZ}$ y $\vec{P}_{xyz}$ no son iguales para un sistema que se

acelera en relación a un marco de referencia inercial, la ecuación 4.27 no es válida para un volumen de control acelerado.

Para desarrollar la ecuación del momento para un volumen de control que se acelera linealmente, es necesario relacionar el $\vec{P}_{XYZ}$ del sistema con el $\vec{P}_{xyz}$ del sistema. La derivada del sistema $d\vec{P}_{xyz}/dt$ puede relacionarse con las variables del volumen de control por medio de la ecuación 4.26. Empezamos escribiendo la segunda ley de Newton para un sistema, recordando que la aceleración debe medirse relativa a un marco de referencia inercial que hemos designado *XYZ*. Escribimos

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{XYZ}}{dt}\bigg)_{\text{sistema}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{masa (sistema)}} \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{\text{masa (sistema)}} \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\, dm$$

$$\vec{F} = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{a}_{XYZ}\, dm \tag{4.29}$$

El único problema ahora es obtener una expresión adecuada de $\vec{a}_{XYZ}$, para el caso especial en que el marco de coordenadas *xyz* esté sujeto a una traslación pura, sin rotación, relativa al marco inercial *XYZ*.

Puesto que el movimiento de *xyz* es una traslación pura, sin rotación, relativa al marco de referencia inercial *XYZ*, entonces

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{a}_{rf} \tag{4.30}$$

donde

$\vec{a}_{XYZ}$ es la aceleración rectilínea del sistema relativa al marco de referencia inercial *XYZ*,
$\vec{a}_{xyz}$ es la aceleración rectilínea del sistema relativa al marco de referencia no inercial *xyz* y
$\vec{a}_{rf}$ es la aceleración rectilínea del marco de referencia no inercial *xyz* relativa al marco inercial *XYZ*.

En este caso, escribimos la ecuación del sistema como

$$\vec{F} = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{a}_{XYZ}\, dm = \int_{\text{masa (sistema)}} (\vec{a}_{xyz} + \vec{a}_{rf})\, dm$$

Alternativamente,

$$\vec{F} - \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{a}_{rf}\, dm = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{a}_{xyz}\, dm$$

Puesto que

$$\vec{a}_{xyz} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}$$

entonces

$$\vec{F} - \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{a}_{rf}\, dm = \int_{\text{masa (sistema)}} \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\, dm$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\text{masa (sistema)}} \vec{V}_{xyz}\, dm = \frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\bigg)_{\text{sistema}}$$

Como $dm = \rho\, d\forall$, la ecuación del sistema puede escribirse como

$$\vec{F} - \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.31a}$$

donde el momento lineal, $\vec{P}_{xyz}$, del sistema está dado por

$$\vec{P}_{xyz})_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{V}_{xyz}\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall \tag{4.31b}$$

y la fuerza, $\vec{F}$, incluye todas las fuerzas de superficie y másicas que actúan en el sistema.

La formulación del sistema se relaciona con la formulación para un volumen de control en movimiento mediante la ecuación 4.26,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.26}$$

donde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \eta\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \eta\rho\, d\forall \tag{4.6}$$

Para obtener la ecuación de la segunda ley de Newton para un volumen de control, establecemos

$$N = \vec{P}_{xyz} \qquad \text{y} \qquad \eta = \vec{V}_{xyz}$$

De la ecuación 4.26, con esta sustitución, obtenemos

$$\left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.32}$$

De la ecuación del sistema,

$$\left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \vec{F}_{\text{en el sistema}} - \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall \tag{4.31c}$$

Como el sistema y el volumen de control coinciden en t_0, entonces,

$$\vec{F}_{\text{en el sistema}} - \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall = \vec{F}_{\text{en VC}} - \int_{\text{VC}} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall$$

A la luz de esto, las ecuaciones 4.31c y 4.32 pueden combinarse para producir la ecuación de la segunda ley de Newton para un volumen de control acelerado, sin rotación, respecto a un marco de referencia inercial:

$$\vec{F} - \int_{\text{VC}} \vec{a}_{rf}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.33}$$

Puesto que $\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B$, la ecuación 4.33 se convierte en

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{VC} \vec{a}_{rf} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V}_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{SC} \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.34}$$

Al comparar la ecuación del momento para un volumen de control con aceleración rectilínea, ecuación 4.34, con la del volumen de control no acelerado, ecuación 4.27, vemos que la única diferencia es la presencia de un término adicional en la ecuación 4.34. Cuando el volumen de control no se está acelerando respecto a un marco de referencia inercial *XYZ*, entonces $\vec{a}_{rf} = 0$ y la ecuación 4.34 se reduce a la ecuación 4.27.

Las precauciones relativas al empleo de la ecuación 4.27 se aplican también al de la ecuación 4.34. Antes de intentar aplicar cualquiera de las ecuaciones, es necesario dibujar las fronteras del volumen de control y marcar las direcciones de coordenadas apropiadas. En un volumen de control acelerado, deben marcarse dos sistemas de coordenadas: uno (*xyz*), en el volumen de control y el otro (*XYZ*), en el marco de referencia inercial.

En la ecuación 4.34, $\vec{F}_S$ representa todas las fuerzas de superficie que actúan sobre el volumen de control. Puesto que la masa dentro del volumen de control puede variar con el tiempo, es posible que los dos términos restantes en el lado izquierdo de la ecuación sean funciones del tiempo. Además, la aceleración, $\vec{a}_{rf}$, del marco de referencia *xyz* relativo a un marco inercial, será en general una función del tiempo.

Todas las velocidades en la ecuación 4.34 se miden en relación con el volumen de control. El flujo de momento, $\vec{V}_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$, a través de un elemento del área de la superficie de control, $d\vec{A}$, es un vector. El signo del producto escalar, $\rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$,depende de la dirección del vector de velocidad, $\vec{V}_{xyz}$, relativo al vector del área, $d\vec{A}$. A su vez, el signo del vector de velocidad, $\vec{V}_{xyz}$, depende del sistema de coordenadas elegido.

La ecuación del momento es vectorial y al igual que todas las ecuaciones vectoriales, puede escribirse mediante tres ecuaciones componentes escalares. Las componentes escalares de la ecuación 4.34 son

$$F_{S_x} + F_{B_x} - \int_{VC} a_{rf_x} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{SC} u_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.35a}$$

$$F_{S_y} + F_{B_y} - \int_{VC} a_{rf_y} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} v_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{SC} v_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.35b}$$

$$F_{S_z} + F_{B_z} - \int_{VC} a_{rf_z} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} w_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{SC} w_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.35c}$$

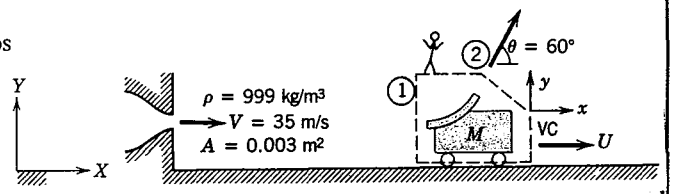
EJEMPLO 4.11 Álabe que se mueve con aceleración rectilínea

Un álabe, con ángulo de desvío $\theta = 60°$, está unido a un carrito. Juntos conforman una masa $M =$ 75 kg y ruedan sobre una pista nivelada. La fricción y la resistencia del aire pueden despreciarse. El álabe recibe un chorro de agua que sale horizontalmente de una tobera estacionaria a $V = 35$ m/s. El área de salida de la tobera es $A = 0.003$ m^2. Determine la velocidad del carrito como función del tiempo y grafique los resultados.

PROBLEMA EJEMPLO 4.11

DATOS: Álabe y carrito en la forma que se dibujan, con $M = 75$ kg.

ENCUENTRE: *a*) $U(t)$.
b) Grafique los resultados.



SOLUCIÓN:
Elija el volumen de control y el sistema de coordenadas mostrados para el análisis. Advierta que *XY* es un marco fijo, en cambio el marco *xy* se mueve con el carrito. Aplique la componente *x* de la ecuación del momento.

Ecuación básica:
$$\overset{=0(1)}{F_{S_x}} + \overset{=0(2)}{F_{B_x}} - \int_{VC} a_{rf_x}\rho\, d\forall = \overset{\simeq 0(3)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_{xyz}\rho\, d\forall} + \int_{SC} u_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) $F_{S_x} = 0$ puesto que no hay resistencia
2) $F_{B_x} = 0$
3) Desprecie la masa y la relación de cambio de u_{xyz} para el agua en contacto con el álabe comparada con la masa del carrito

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_{xyz}\rho\, d\forall \simeq 0$$

4) Flujo uniforme en las secciones (1) y (2)
5) El flujo del agua no es disminuido por la fricción sobre el álabe, por lo que $|\vec{V}_{xyz_1}| = |\vec{V}_{xyz_2}|$
6) $A_2 = A_1 = A$

Entonces

$$-\int_{VC} a_{rf_x}\rho\, d\forall = u_{xyz_1}\{-|\rho V_{xyz_1}A_1|\} + u_{xyz_2}\{|\rho V_{xyz_2}A_2|\}$$

donde todas las velocidades deben medirse relativas al marco *xyz*. Eliminando los subíndices *rf* y *xyz*, obtenemos

$$-\int_{VC} a_x\rho\, d\forall = u_1\{-|\rho V_1A_1|\} + u_2\{|\rho V_2A_2|\} \tag{1}$$

La evaluación por separado de estos términos resulta en

$$-\int_{VC} a_x\rho\, d\forall = -a_xM_{VC} = -a_xM = -\frac{dU}{dt}M$$

$$u_1\{-|\rho V_1A_1|\} = (V-U)\{-|\rho(V-U)A|\} = -\rho(V-U)^2A$$

$$u_2\{|\rho V_2A_2|\} = (V-U)\cos\theta\{|\rho(V-U)A|\} = \rho(V-U)^2A\cos\theta$$

Los signos de valor absoluto se han omitido de los términos de flujo, ya que $V \geq U$. La sustitución en la ecuación 1 produce

$$-M\frac{dU}{dt} = -\rho(V-U)^2A + \rho(V-U)^2A\cos\theta$$

o

$$-M\frac{dU}{dt} = (\cos\theta - 1)\rho(V-U)^2A$$

Separando variables, obtenemos

$$\frac{dU}{(V-U)^2} = \frac{(1-\cos\theta)\rho A}{M}dt = b\,dt \qquad \text{donde } b = \frac{(1-\cos\theta)\rho A}{M}$$

Advierta que como V = constante, $dU = d(V-U)$. Integrando entre los límites $U = 0$ en $t = 0$ y $U = U$ en $t = t$,

$$\int_0^U \frac{dU}{(V-U)^2} = \int_0^U \frac{-d(V-U)}{(V-U)^2} = \frac{1}{(V-U)}\Bigg]_0^U = \int_0^t b\,dt = bt$$

o

$$\frac{1}{(V-U)} - \frac{1}{V} = \frac{U}{V(V-U)} = bt$$

Resolviendo para U, obtenemos

$$\frac{U}{V} = \frac{Vbt}{1+Vbt}$$

La evaluación del término Vb produce

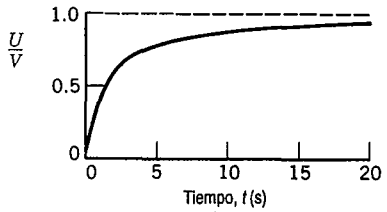
$$Vb = V\frac{(1-\cos\theta)\rho A}{M}$$

$$Vb = 35\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{(1-0.5)}{75\ \text{kg}} \times 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.003\ \text{m}^2 = 0.699\ \text{s}^{-1}$$

Por consiguiente,

$$\frac{U}{V} = \frac{0.699t}{1+0.699t} \qquad (t \text{ en s}) \qquad U(t)$$

Grafique:



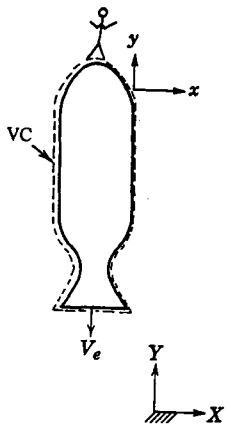
Conforme la velocidad del álabe, U, se acerca a la velocidad del chorro, V, el flujo másico que cruza la superficie de control se va reduciendo a cero. La gráfica muestra la disminución correspondiente de la aceleración del álabe.

EJEMPLO 4.12 Cohete dirigido verticalmente

Un pequeño cohete, con una masa inicial de 400 kg, va a ser lanzado verticalmente. En la ignición, el cohete consume combustible a una proporción de 5 kg/s y expulsa gas a presión atmosférica con una velocidad de 3500 m/s relativa al cohete. Determine la aceleración inicial del cohete y su velocidad después de 10 s, si se desprecia la resistencia del aire.

PROBLEMA EJEMPLO 4.12

DATOS: Un pequeño cohete que se acelera verticalmente desde el reposo.
La resistencia del aire puede ser despreciada.
El consumo de combustible, $\dot{m}_{\text{salida}} = 5$ kg/s.
Velocidad de escape, $V_e = 3500$ m/s, relativa al cohete, a presión atmosférica.



ENCUENTRE: *a*) Aceleración inicial del cohete.
b) Velocidad del cohete después de 10 s.

SOLUCIÓN:
Elija un volumen de control como indica la línea interrumpida. Debido a que el volumen de control está acelerado, defina un sistema de coordenadas inercial XY y un sistema de coordenadas xy unidos al VC. Aplique la componente y de la ecuación del momento.

Ecuación básica:

$$F_{S_y} + F_{B_y} - \int_{VC} a_{rf_y} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} v_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{SC} v_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) La presión atmosférica actúa en todas las superficies del VC; como la resistencia del aire se desprecia, entonces $F_{S_y} = 0$
2) La gravedad es la única fuerza másica; g es constante
3) El flujo que sale del cohete es uniforme y V_e es constante

De acuerdo con estas suposiciones, la ecuación del momento se reduce a

$$F_{B_y} - \int_{VC} a_{rf_y} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} v_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{SC} v_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Detengámonos a revisar la ecuación término por término:

Ⓐ $F_{B_y} = -\int_{VC} g \rho \, d\forall = -g \int_{VC} \rho \, d\forall = -g M_{VC}$ {puesto que g es constante}

La masa del VC será una función del tiempo ya que sale del VC a una proporción $\dot{m}_e$. Para determinar M_{VC} como una función del tiempo, utilizamos la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall = -\int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\int_{A_e}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\int_{A_e}\{|\rho V\, dA|\} = -|\dot{m}_e|$$

El signo menos indica que la masa del VC está disminuyendo con el tiempo; puesto que la masa del VC sólo es función del tiempo, podemos escribir

$$\frac{dM_{VC}}{dt} = -|\dot{m}_e|$$

Para encontrar la masa del VC en cualquier tiempo, t, integramos

$$\int_{M_0}^{M} dM_{VC} = -\int_0^t |\dot{m}_e|dt \qquad \text{donde en } t = 0, M_{VC} = M_0, \quad \text{y en} \quad t = t, M_{VC} = M$$

Entonces, $M - M_0 = -|\dot{m}_e|t$, o $M = M_0 - \dot{m}_e t$.
{Como $\dot{m}_e$ es positiva, hemos omitido el signo de valor absoluto.}

Sustituyendo la expresión para M en el término Ⓐ, obtenemos

$$F_{B_y} = -\int_{VC} g\rho\, d\forall = -gM_{VC} = -g(M_0 - \dot{m}_e t)$$

Ⓑ $\quad -\int_{VC} a_{rf_y}\rho\, d\forall$

La aceleración, a_{rf_y}, del VC es la que ve un observador en el sistema de coordenadas XY. De esta manera a_{rf_y} no es función de las coordenadas xyz y

$$-\int_{CV} a_{rf_y}\rho\, d\forall = -a_{rf_y}\int_{VC}\rho\, d\forall = -a_{rf_y}M_{VC} = -a_{rf_y}(M_0 - \dot{m}_e t)$$

Ⓒ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v_{xyz}\rho\, d\forall$

es la relación de cambio en el tiempo del momento en y del fluido en el volumen de control, medida en relación con el mismo.

Aun cuando el momento en y del fluido dentro del VC, medido respecto a éste, es un número grande, no cambia de manera apreciable con el tiempo. Para ver esto, debemos admitir que:

1) El combustible no quemado y la estructura del cohete tienen momento cero respecto al cohete.
2) La velocidad del gas a la salida de la tobera permanece constante en el tiempo como ocurre con la velocidad en diferentes puntos de la tobera.

En consecuencia, es razonable suponer

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v_{xyz}\rho\, d\forall \approx 0$$

Ⓓ $\quad \int_{SC} v_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} = \int_{A_e} v_{xyz}|\rho V_{xyz}\, dA| = v_{xyz}|\dot{m}_e|$

Como $\vec{V}_e = -V_e\hat{j}$, entonces

$$v_{xyz}|\dot{m}_e| = -V_e|\dot{m}_e| = -V_e\dot{m}_e$$

Sustituyendo los términos de Ⓐ a Ⓓ en la ecuación 1, obtenemos

$$-g(M_0 - \dot{m}_e t) - a_{rf_y}(M_0 - \dot{m}_e t) = -V_e \dot{m}_e$$

o

$$a_{rf_y} = \frac{V_e \dot{m}_e}{M_0 - \dot{m}_e t} - g \tag{2}$$

En el tiempo $t = 0$,

$$a_{rf_y})_{t=0} = \frac{V_e \dot{m}_e}{M_0} - g = 3500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 5 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times \frac{1}{400 \text{ kg}} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{rf_y})_{t=0} = 33.9 \text{ m/s}^2 \longleftarrow a_{rf_y})_{t=0}$$

La aceleración del VC es por definición

$$a_{rf_y} = \frac{dV_{VC}}{dt}$$

Sustituyendo de la ecuación 2,

$$\frac{dV_{VC}}{dt} = \frac{V_e \dot{m}_e}{M_0 - \dot{m}_e t} - g$$

La separación de variables y la integración producen

$$V_{VC} = \int_0^{V_{VC}} dV_{VC} = \int_0^t \frac{V_e \dot{m}_e \, dt}{M_0 - \dot{m}_e t} - \int_0^t g \, dt = -V_e \ln\left[\frac{M_0 - \dot{m}_e t}{M_0}\right] - gt$$

En $t = 10$ s,

$$V_{VC} = -3500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \ln\left[\frac{350 \text{ kg}}{400 \text{ kg}}\right] - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 10 \text{ s}$$

$$V_{VC} = 369 \text{ m/s} \longleftarrow V_{VC})_{t=10 \text{ s}}$$

Este problema ejemplifica la aplicación de la ecuación del momento a un volumen de control que se acelera linealmente.

** 4-6 ECUACIÓN DEL MOMENTO PARA EL VOLUMEN DE CONTROL CON ACELERACIÓN ARBITRARIA

En la sección 4-5, formulamos la ecuación del momento para un volumen de control con aceleración rectilínea. El objetivo de esta sección es extender la formulación para incluir la rotación y aceleración angular del volumen de control, además de la traslación y la aceleración rectilínea.

Primero, desarrollemos una expresión para la segunda ley de Newton en un sistema de coordenadas no inercial y arbitrario. Luego, utilicemos la ecuación 4.26 para completar la

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

formulación para un volumen de control. La segunda ley de Newton para un sistema que se mueve con relación a un sistema de coordenadas inercial está dada por

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{XYZ}}{dt}\bigg)_{\text{sistema}}$$

Como

$$\vec{P}_{XYZ})_{\text{sistema}} = \int_{M\,(\text{sistema})} d\vec{V}_{XYZ}\, dm$$

y M(sistema) es constante, entonces

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{M\,(\text{sistema})} \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{M\,(\text{sistema})} \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\, dm$$

o

$$\vec{F} = \int_{M\,(\text{sistema})} \vec{a}_{XYZ}\, dm \tag{4.36}$$

El problema básico es relacionar $\vec{a}_{XYZ}$ con la aceleración $\vec{a}_{xyz}$, medida respecto a un sistema de coordenadas no inercial. Para este propósito, considere el marco de referencia no inercial, *xyz*, mostrado en la figura 4-5.

El marco no inercial, *xyz*, se localiza mediante el vector de posición, $\vec{R}$, relativo al marco fijo. El marco no inercial gira con velocidad angular $\vec{\omega}$.[2] La partícula se ubica en relación con el marco móvil por medio del vector de posición $\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$. Respecto al marco de referencia inercial, *XYZ*, la posición de la partícula se denota mediante el vector de posición $\vec{X}$. De la geometría de la figura, $\vec{X} = \vec{R} + \vec{r}$.

La velocidad de la partícula, relativa a un observador en un sistema *XYZ*, es

$$\vec{V}_{XYZ} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{rf} + \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4.37}$$

Debemos ser cuidadosos al evaluar $d\vec{r}/dt$ porque tanto la magnitud, $|\vec{r}|$, como la orientación de los vectores unitarios, $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, son funciones del tiempo. Así,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \hat{i}\frac{dx}{dt} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \tag{4.38a}$$

Los términos dx/dt, dy/dt y dz/dt son las componentes de velocidad de la partícula, relativas a *xyz*. Por tanto,

$$\vec{V}_{xyz} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} \tag{4.38b}$$

[2] Advierta que cualquier movimiento arbitrario puede descomponerse en una traslación más una rotación.

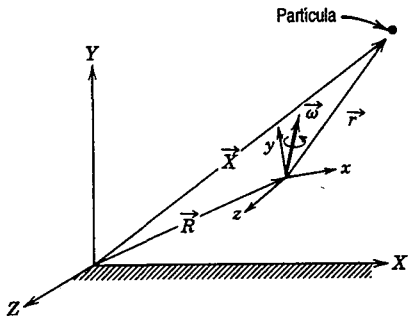


Fig. 4.5 Localización de una partícula en marcos de referencia inercial (*XYZ*) y no inercial (*xyz*).

Tal vez recuerde usted de la dinámica (véase el problema ejemplo 4.13), que en un sistema de coordenadas en rotación,

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \tag{4.38c}$$

Combinando las ecuaciones 4.38a, 4.38b y 4.38c, obtenemos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{4.38d}$$

Al sustituir en la ecuación 4.37, encontramos

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{4.39}$$

La aceleración de la partícula relativa a un observador en el sistema *XYZ* es

$$\vec{a}_{XYZ} = \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{rf}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

o

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{rf} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{4.40}$$

Tanto $\vec{V}_{xyz}$ como $\vec{r}$ se miden en relación a *xyz*, por lo que se aplica la misma cautela observada en el desarrollo de la ecuación 4.38d. De tal modo,

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} = \vec{a}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} \tag{4.41a}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}$$

o

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{4.41b}$$

Con la sustitución de las ecuaciones 4.41a y 4.41b en la ecuación 4.40, obtenemos

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{rf} + \vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \tag{4.42}$$

El significado físico de cada término en la ecuación 4.42 es

$\vec{a}_{XYZ}$	:	Aceleración rectilínea absoluta de una partícula relativa al marco de referencia fijo *XYZ*
$\vec{a}_{rf}$	:	Aceleración rectilínea absoluta del marco de referencia en movimiento *xyz* relativa al marco fijo *XYZ*
$\vec{a}_{xyz}$	:	Aceleración rectilínea de una partícula *relativa* al marco de referencia en movimiento *xyz* (esta aceleración sería la que vería un observador en el marco en movimiento *xyz*)
$2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$	:	Aceleración de Coriolis debida al movimiento de una partícula *dentro* del marco en movimiento *xyz*
$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$	:	Aceleración centrípeta debida a la rotación del marco en movimiento *xyz*
$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$	:	Aceleración tangencial debida a la aceleración angular del marco de referencia en movimiento *xyz*

Al sustituir $\vec{a}_{XYZ}$, de acuerdo con la ecuación 4.42, en la 4.36, encontramos

$$\vec{F}_{\text{sistema}} = \int_{M\,(\text{sistema})} [\vec{a}_{rf} + \vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm$$

o

$$\vec{F} - \int_{M\,(\text{sistema})} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm = \int_{M\,(\text{sistema})} \vec{a}_{xyz}\, dm \tag{4.43a}$$

Pero

$$\int_{M\,(\text{sistema})} \vec{a}_{xyz}\, dm = \int_{M\,(\text{sistema})} \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\, dm = \frac{d}{dt} \int_{M\,(\text{sistema})} \vec{V}_{xyz}\, dm = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.43b}$$

donde todas las derivadas respecto al tiempo son las que ve un observador fijo en el marco no inercial *xyz*. Combinando las ecuaciones 4.43a y 4.43b, obtenemos

$$\vec{F} - \int_{M\,(\text{sistema})} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}}$$

o

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{\forall\,(\text{sistema})} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\rho\, d\forall = \left.\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.44}$$

La ecuación 4.44 es un enunciado de la segunda ley de Newton para un sistema. La derivada de sistema, $d\vec{P}_{xyz}/dt$, representa la relación de cambio del momento, $\vec{P}_{xyz}$, del sistema medido en relación a *xyz*, de acuerdo con un observador en *xyz*. Esta derivada del sistema puede relacionarse con las variables del volumen de control mediante la ecuación 4.26,

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\rho\, \vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.26}$$

Para obtener la formulación del volumen de control, establecemos $N = \vec{P}_{xyz}$ y $\eta = \vec{V}_{xyz}$. Luego entonces, las ecuaciones 4.26 y 4.44 pueden combinarse para producir

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{VC} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}]\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.45}$$

La ecuación 4.45 es la ecuación más general de la segunda ley de Newton para un volumen de control. Al comparar la ecuación del momento para un volumen de control que se mueve con aceleración arbitraria, ecuación 4.45, con la de un volumen de control que lo hace con aceleración rectilínea, ecuación 4.34, vemos que la única diferencia es la presencia de tres términos adicionales en el lado izquierdo de la ecuación 4.45. Estos términos son producto del movimiento angular del marco de referencia no inercial, *xyz*. Advierta que la ecuación 4.45 se reduce a la 4.34, cuando los términos angulares son cero y a la ecuación 4.27, para un volumen de control inercial.

Las precauciones referentes al empleo de las ecuaciones 4.27 y 4.34 se aplican también al uso de la ecuación 4.45. Antes de intentar aplicar esta ecuación, es necesario dibujar las fronteras del volumen de control y marcar las direcciones de coordenadas apropiadas. En el caso de un volumen de control que se mueve con aceleración arbitraria, debe marcarse un sistema de coordenadas (*xyz*) en el volumen de control y un marco de referencia inercial (*XYZ*).

EJEMPLO 4.13 Velocidad en marcos de referencia fijos y no inerciales

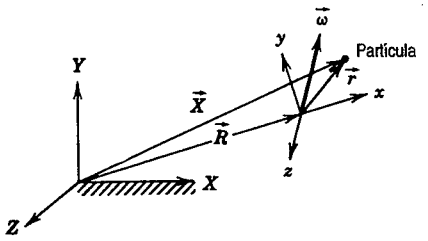
Un marco de referencia, *xyz*, se mueve arbitrariamente con respecto a un marco fijo, *XYZ*. Una partícula se desplaza con velocidad $\vec{V}_{xyz} = (dx/dt)\hat{i} + (dy/dt)\hat{j} + (dz/dt)\hat{k}$, relativa al marco *xyz*. Demuestre que la velocidad absoluta de la partícula está dada por

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

PROBLEMA EJEMPLO 4.13

DATOS: Los marcos fijos y no inerciales que se muestran.

ENCUENTRE: $\vec{V}_{XYZ}$ en términos de $\vec{V}_{xyz}$, $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ y $\vec{V}_{rf}$.



SOLUCIÓN:

De la geometría del dibujo, $\vec{X} = \vec{R} + \vec{r}$, por lo que

$$\vec{V}_{XYZ} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{rf} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

(4.26)

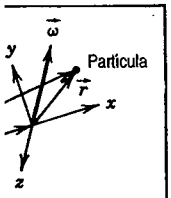
= $\vec{V}_{xyz}$. Luego

(4.45)

ra un volumen
se mueve con
on aceleración
nos adicionales
nto angular del
.34, cuando los
cial.
también al uso
as fronteras del
de un volumen
rdenadas (*xyz*)

les

fijo, *XYZ*. Una
a al marco *xyz*.



entonces

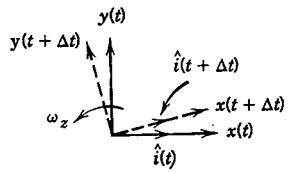
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

o

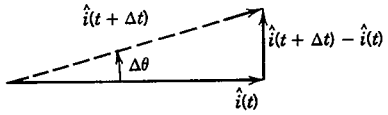
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{xyz} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

El problema ahora es evaluar $d\hat{i}/dt$, $d\hat{j}/dt$ y $d\hat{k}/dt$, las que son resultado del movimiento angular del marco *xyz*. Para evaluar estas derivadas, debemos considerar la rotación de cada vector unitario debida a las tres componentes de la velocidad angular, $\vec{\omega}$, del marco *xyz*.

Considere el vector unitario $\hat{i}$. Girará en el plano *xy* debido a ω_z, como sigue:



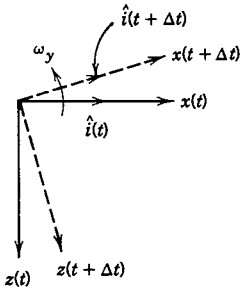
Dibujo amplificado:



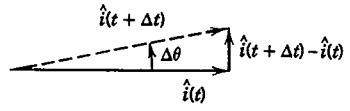
Después de esto,

$$\left.\frac{d\hat{i}}{dt}\right]_{\text{debido a } \omega_y} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\hat{i}(t+\Delta t)-\hat{i}(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(1)\Delta\theta\,\hat{j}}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(1)\omega_z\Delta t\,\hat{j}}{\Delta t}\right] = \hat{j}\omega_z$$

De modo similar, $\hat{i}$ girará en el plano *xz* debido a ω_y.



Dibujo amplificado:



Entonces

$$\left.\frac{d\hat{i}}{dt}\right]_{\text{debido a } \omega_y} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\hat{i}(t+\Delta t)-\hat{i}(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(1)\Delta\theta(-\hat{k})}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(1)\omega_y\Delta t(-\hat{k})}{\Delta t}\right]$$

$$\left.\frac{d\hat{i}}{dt}\right]_{\text{debido a } \omega_y} = -\hat{k}\omega_y$$

La rotación en el plano yz, resultado de ω_x, no afecta a $\hat{i}$. Al combinar términos,

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \omega_z \hat{j} - \omega_y \hat{k}$$

Mediante un razonamiento similar,

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \omega_x \hat{k} - \omega_z \hat{i} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \omega_y \hat{i} - \omega_x \hat{j}$$

Por tanto,

$$x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} = (z\omega_y - y\omega_z)\hat{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\hat{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\hat{k}$$

Pero,

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z)\hat{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\hat{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\hat{k}$$

Mediante la combinación de estos resultados, obtenemos

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{V}_{XYZ}$$

** 4-7 EL PRINCIPIO DEL MOMENTO ANGULAR

A continuación, desarrollaremos una expresión del principio del momento angular para un volumen de control. Empezamos con el enunciado matemático para un sistema y utilizamos la ecuación 4.11 con el fin de completar la formulación correspondiente a un volumen de control fijo (inercial) (sección 4-7.1). Para obtener la formulación de volumen de control referente a uno giratorio (no inercial) (sección 4-7.2), desarrollamos primero una expresión adecuada para el principio del momento angular aplicado a un sistema en movimiento general. Finalmente, empleamos la ecuación 4.26 para terminar la formulación para un volumen de control.

4-7.1 Ecuación para el volumen de control fijo

El principio del momento angular para un sistema es

$$\vec{T} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.3a}$$

donde $\vec{T}$ = momento de torsión total ejercido sobre el sistema por sus alrededores y
$\vec{H}$ = momento angular del sistema,

$$\vec{H} = \int_{M\,(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V} \rho\, d\forall \tag{4.3b}$$

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

Todas las cantidades en la ecuación del sistema deben formularse con respecto a un marco de referencia inercial. Los marcos de referencia que están en reposo o en movimiento con velocidad lineal constante, son inerciales y es posible utilizar directamente la ecuación 4.3b para desarrollar el principio del momento angular para un volumen de control. (Los marcos de referencia en rotación son no inerciales y se tratarán en la sección 4-7.2.)

El vector de posición, $\vec{r}$, sitúa cada elemento de masa o de volumen del sistema con respecto al sistema de coordenadas. El momento de torsión, $\vec{T}$, aplicado a un sistema puede escribirse

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{M\,(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{flecha}} \tag{4.3c}$$

La relación entre las formulaciones de sistema y de volumen de control fijo es

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

donde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M\,(\text{sistema})} \eta\, dm$$

Si establecemos que $N = \vec{H}$, entonces $\eta = \vec{r} \times \vec{V}$ y

$$\left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.46}$$

Al combinar las ecuaciones 4.3a, 4.3c y 4.46, obtenemos

$$\vec{r}\times\vec{F}_s + \int_{M\,(\text{sistema})} \vec{r}\times\vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{flecha}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

En vista de que el sistema y el volumen de control coinciden en el tiempo t_0,

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \vec{T}_{\text{VC}}$$

y

$$\vec{r}\times\vec{F}_s + \int_{\text{VC}} \vec{r}\times\vec{g}\rho\, d\forall + \vec{T}_{\text{flecha}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \vec{r}\times\vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.47}$$

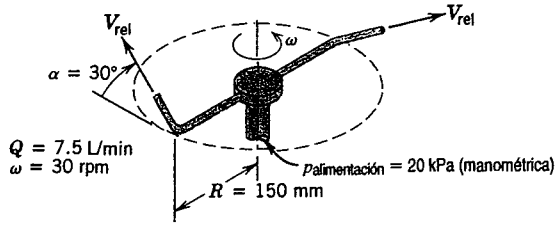
La ecuación 4.47 es una formulación general del principio del momento angular para un volumen de control inercial. El lado izquierdo de la ecuación es una expresión para todos los momentos de torsión que actúan sobre el volumen de control. Los términos a la derecha expresan la relación de cambio del momento angular dentro del volumen de control y la relación neta de flujo del momento angular proveniente del volumen de control. Todas las velocidades en la ecuación 4.47 se miden relativas a un volumen de control fijo.

Para el análisis de maquinaria hidráulica, la ecuación 4.47 se utiliza a menudo en forma escalar considerando sólo la componente dirigida a lo largo del eje de rotación. Esta aplicación se ilustra en el capítulo 11.

La aplicación de la ecuación 4.47 al análisis de un simple irrigador de césped, se ilustra en el problema ejemplo 4.14. Este mismo problema se considera en el problema ejemplo 4.15, utilizando la formulación del principio del momento angular para un volumen de control rotatorio.

EJEMPLO 4.14 Irrigador de césped: análisis de un volumen de control fijo

En el dibujo siguiente se muestra un pequeño irrigador de césped. A una presión manométrica de entrada de 20 kPa, el flujo total de volumen de agua a través del irrigador, que gira a 30 rpm, es de 7.5 litros por minuto. El diámetro de cada chorro es de 4 mm. Calcule la velocidad relativa del chorro en cada tobera del irrigador. Evalúe el momento de torsión de fricción en el pivote del irrigador.

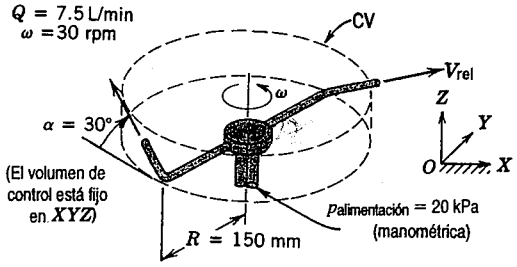


PROBLEMA EJEMPLO 4.14

DATOS: El pequeño irrigador de césped que se muestra.

ENCUENTRE: *a*) La velocidad relativa del chorro en cada tobera.

b) El momento de torsión de fricción en el pivote.



SOLUCIÓN:

Aplique las ecuaciones de continuidad y de momento angular empleando el volumen de control fijo que encierra los brazos del irrigador.

Ecuaciones básicas:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (= 0(1))$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{VC} \vec{r} \times \vec{g}\rho\, d\forall + \vec{T}_{flecha} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

donde todas las velocidades se miden con relación a las coordenadas inerciales *XYZ*.

Suposiciones:
1) Flujo incompresible
2) Flujo uniforme en cada sección
3) $\vec{\omega}$ = constante

De la continuidad, la velocidad relativa del chorro en la tobera está dada por

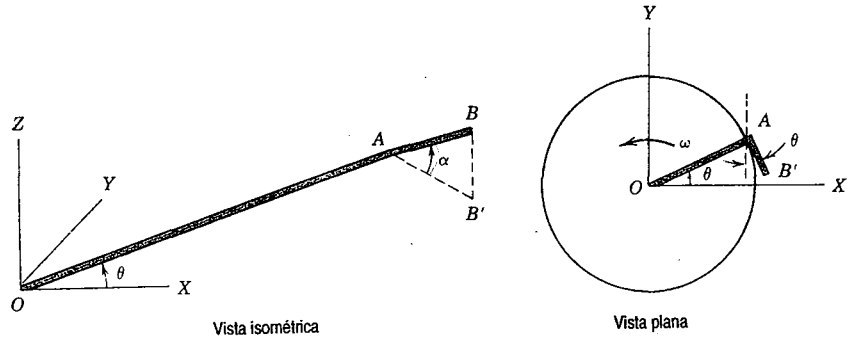
$$V_{rel} = \frac{Q}{2A_{chorro}} = \frac{Q}{2}\frac{4}{\pi D_{chorro}^2}$$
$$= \frac{1}{2} \times 7.5\ \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{4}{\pi}\frac{1}{(4)^2 \text{mm}^2} \times \frac{\text{m}^3}{1000\ \text{L}} \times 10^6\ \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}}$$

$$V_{rel} = 4.97\ \text{m/s} \longleftarrow V_{rel}$$

Considere por separado los términos en la ecuación del momento angular. Como la presión atmosférica actúa sobre toda la superficie de control y la fuerza de la presión en la entrada no provoca momento en torno a O, entonces $\vec{r} \times \vec{F}_S = 0$. El momento de la fuerza másica en cada uno de los brazos es igual y opuesto y, por tanto, el segundo término del lado izquierdo de la ecuación es cero. El único momento de torsión externo que actúa sobre el VC es la fricción en el pivote. Ésta se opone al movimiento, por lo que

$$\vec{T}_{flecha} = -T_f \hat{K} \tag{2}$$

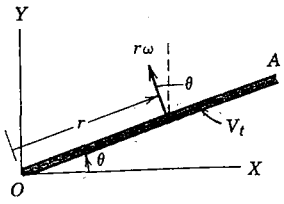
Antes de que podamos evaluar la integral del volumen de control en el lado derecho de la ecuación 1, necesitamos desarrollar expresiones para el vector de posición, $\vec{r}$, y el vector de velocidad $\vec{V}$ (medidos respecto al sistema de coordenadas fijo, XYZ) de cada elemento de fluido en el volumen de control.



OA yace en el plano XY; AB está inclinada a un ángulo α con respecto al plano XY; el punto B' es la proyección del punto B sobre el plano XY.

Suponemos que la longitud, L, de la punta AB es pequeña comparada con la longitud, R, del brazo horizontal OA. Consecuentemente, omitimos el momento angular del fluido en las puntas comparado con el momento angular en los brazos horizontales.

Considere el flujo en el tubo horizontal OA de longitud R. Denote la posición radial a partir de O mediante la distancia r. En cualquier punto en el tubo, la velocidad relativa del fluido a las coordenadas fijas XYZ es la suma de la velocidad en el tubo y la velocidad angular $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Por consiguiente,



$$\vec{V} = \hat{I}(V_t \cos\theta - r\omega \operatorname{sen}\theta) + \hat{J}(V_t \operatorname{sen}\theta + r\omega \cos\theta)$$

El vector de posición $\vec{r} = \hat{I}\, r \cos\theta + \hat{J}\, r \operatorname{sen}\theta$, y

$$\vec{r} \times \vec{V} = \hat{K}(r^2\omega \cos^2\theta + r^2\omega \operatorname{sen}^2\theta) = \hat{K} r^2 \omega$$

Entonces

$$\int_{\forall_{OA}} \vec{r} \times \vec{V} \rho \, d\forall = \int_O^R \hat{K} r^2 \omega \, \rho A \, dr = \hat{K} \frac{R^3 \omega}{3} \rho A$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_{OA}} \vec{r} \times \vec{V} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{K} \frac{R^3 \omega}{3} \rho A \right] = 0 \tag{3}$$

donde A es el área de la sección transversal del tubo horizontal. Se obtienen resultados idénticos para el otro tubo horizontal en el volumen de control.

Para evaluar el flujo del momento angular a través de la superficie de control necesitamos una expresión para $\vec{r}_{\text{chorro}} = \vec{r}_B$ y para la velocidad del chorro, $\vec{V}_j$, medida respecto al sistema de coordenadas fijo XYZ. De la geometría del brazo OAB,

$$\vec{r}_B = \hat{I}(R\cos\theta + L\cos\alpha \operatorname{sen}\theta) + \hat{J}(R\operatorname{sen}\theta - L\cos\alpha\cos\theta) + \hat{K} L \operatorname{sen}\alpha$$

Para L $\ll R$, entonces

$$\vec{r}_B = \hat{I}\ R\cos\theta + \hat{J}\ R\operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{V}_j = \vec{V}_{\text{rel}} + \vec{V}_{\text{punta}} = \hat{I}\, V_{\text{rel}} \cos\alpha \operatorname{sen}\theta - \hat{J}\, V_{\text{rel}} \cos\alpha\cos\theta + \hat{K}\, V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha - \hat{I}\ \omega R \operatorname{sen}\theta + \hat{J}\ \omega R\cos\theta$$

$$\vec{V}_j = \hat{I}(V_{\text{rel}} \cos\alpha - \omega R) \operatorname{sen}\theta - \hat{J}(V_{\text{rel}} \cos\alpha - \omega R)\cos\theta + \hat{K}\, V_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha$$

$$\vec{r}_B \times \vec{V}_j = \hat{I}\, RV_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta - \hat{J}\, RV_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \hat{K}\, R(V_{\text{rel}} \cos\alpha - \omega R)(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\vec{r}_B \times \vec{V}_j = \hat{I}\, RV_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta - \hat{J}\, RV_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \hat{K}\ R(V_{\text{rel}} \cos\alpha - \omega R)$$

La integral de flujo se evalúa para el flujo que cruza la superficie de control. En el brazo OAB,

$$\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_j \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\hat{I} RV_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta - \hat{J} RV_{\text{rel}} \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \hat{K} R(V_{\text{rel}} \cos\alpha - \omega R) \right] \rho \frac{Q}{2}$$

Los vectores de velocidad y de radio para el flujo en el brazo izquierdo deben describirse en términos de los mismos vectores unitarios utilizados para el brazo derecho. En el brazo izquierdo, las componentes $\hat{I}$ y $\hat{J}$ del producto cruz son de signo opuesto, ya que $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$. De este modo, para el VC completo,

$$\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_j \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\hat{K} R(V_{\text{rel}} \cos\alpha - \omega R)\rho Q \tag{4}$$

En la línea de alimentación, $\vec{r} \times \vec{V} = 0$ y por tanto el término 4) representa el flujo de momento angular total a través de la superficie de control.

Sustituyendo los términos 2), 3) y 4) en la ecuación 1, obtenemos

$$-T_f \hat{K} = -\hat{K} R(V_{\text{rel}} \cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

o

$$T_f = R(V_{\text{rel}} \cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

De los datos sumunistrados

$$\omega R = \frac{30 \text{ rev}}{\text{min}} \times 150 \text{ mm} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{m}}{1000 \text{ mm}} = 0.471 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La sustitución produce

$$T_f = 150 \text{ mm}\left(4.97 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30^\circ - 0.471 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 7.5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{\text{m}^3}{1000 \text{ L}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \times \frac{\text{m}}{1000 \text{ mm}}$$

$$T_f = 0.0718 \text{ N} \cdot \text{m} \longleftarrow T_f$$

Se ha incluido este problema con el fin de ilustrar el empleo del principio del momento angular para un volumen de control inercial. Advierta que al utilizar la ecuación 4.47, el momento angular, $\vec{r} \times \vec{V}$, debe medirse respecto a un marco de referencia inercial. El problema volverá a trabajarse empleando un volumen de control no inercial, como en el problema ejemplo 4.15.

4-7.2 Ecuación para el volumen de control rotatorio

En problemas que implican elementos en rotación, tales como el irrigador giratorio del problema ejemplo 4.14, a menudo conviene expresar todas las velocidades de fluido en relación con el componente rotatorio. El volumen de control más conveniente es uno no inercial que gira con la componente. En esta sección, desarrollaremos una formulación del principio del momento angular para un volumen de control no inercial que gira en torno a un eje fijo en el espacio.

Los marcos de referencia inercial y no inercial se relacionaron en la sección 4.6; la figura 4.5 mostró la notación utilizada. Para un sistema,

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \tag{4.3a}$$

El momento angular de un sistema en movimiento general debe especificarse respecto a un marco de referencia inercial. Mediante el empleo de la notación de la figura 4.5,

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} (\vec{R} + \vec{r}) \times \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} (\vec{R} + \vec{r}) \times \vec{V}_{XYZ} \rho\, d\forall$$

Con $\vec{R} = 0$ y el marco *xyz* restringido a rotar alrededor de *XYZ*, la ecuación se transforma en

$$\vec{H}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ} \rho\, d\forall$$

por lo que

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \frac{d}{dt} \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{XYZ}\, dm$$

Como la masa de un sistema es constante,

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}_{XYZ})\, dm$$

o

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V}_{XYZ} + \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} \right) dm \tag{4.48}$$

Del análisis de la sección 4-6,

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{rf} + \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4.37}$$

Con *xyz* limitado a rotación pura, $\vec{V}_{rf} = 0$. El primer término de la integral, en el lado derecho de la ecuación 4.48, es entonces

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Así, la ecuación 4.48 se reduce a

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} dm = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{a}_{XYZ}\, dm \tag{4.49}$$

De la ecuación 4.42 con $\vec{a}_{rf} = 0$ (puesto que *xyz* no se traslada),

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

Al sustituir en la ecuación 4.49, obtenemos

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{system})} \vec{r} \times [\vec{a}_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm$$

o

$$\vec{T}_{\text{sistema}} - \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times [2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}]\, dm$$

$$= \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{a}_{xyz}\, dm = \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} dm \tag{4.50}$$

Utilizando la relación de cambio en el tiempo según se observa desde el sistema, podemos escribir el último término como

$$\int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}\, dm = \left. \frac{d\vec{H}_{xyz}}{dt} \right)_{\text{sistema}} \tag{4.51}$$

El momento de torsión sobre el sistema está dado por

$$\vec{T}_{\text{sistema}} = \vec{r} \times \vec{F}_S + \int_{M(\text{sistema})} \vec{r} \times \vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{flecha}} \tag{4.3c}$$

La relación entre las formulaciones de sistema y de volumen de control es

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho\, d\forall + \int_{SC} \eta\rho \vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.26}$$

donde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M\,(\text{sistema})} \eta\, dm$$

Al fijar N igual a $\vec{H}_{xyz)\text{sistema}}$ y $\eta = \vec{r} \times \vec{V}_{xyz}$ resulta

$$\left.\frac{d\vec{H}_{xyz}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.52}$$

Con la combinación de las ecuaciones 4.50, 4.51, 4.52 y 4.3c, obtenemos

$$\vec{r}\times\vec{F}_S + \int_{M\,(\text{sistema})} \vec{r}\times\vec{g}\, dm + \vec{T}_{\text{flecha}} - \int_{M\,(\text{sistema})} \vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}]dm = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

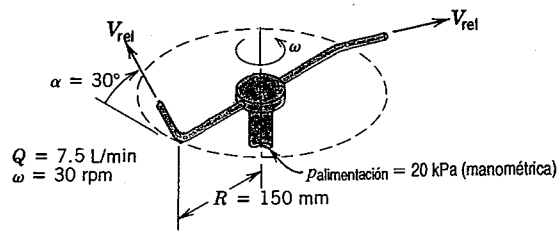
Puesto que el sistema y el volumen de control coincidieron en t_0,

$$\vec{r}\times\vec{F}_S + \int_{VC} \vec{r}\times\vec{g}\rho\, d\forall + \vec{T}_{\text{flecha}} - \int_{VC} \vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}]\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall + \int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \tag{4.53}$$

La ecuación 4.53 es la formulación del principio del momento angular para un volumen de control (no inercial) que gira en torno de un eje fijo en el espacio. Todas las velocidades y las relaciones de cambio del fluido en la ecuación 4.53, se evalúan respecto al volumen de control. La aplicación de la ecuación a un irrigador rotatorio se muestra en el problema ejemplo 4.15.

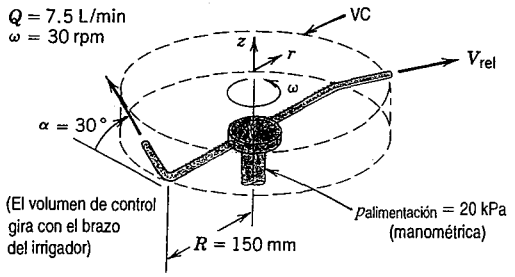
EJEMPLO 4.15 Irrigador de césped: análisis de un volumen de control giratorio

En el dibujo que sigue se muestra un pequeño irrigador de césped. A una presión manométrica de entrada de 20 kPa, el flujo total de volumen del agua a través del irrigador, que gira a 30 rpm, es de 7.5 litros por minuto. El diámetro de cada chorro es 4 mm. Calcule la velocidad relativa del chorro en cada tobera del irrigador. Evalúe el momento de torsión de fricción en el pivote del irrigador.



PROBLEMA EJEMPLO 4.15

DATOS: Un pequeño irrigador de césped como el que se muestra.



ENCUENTRE: *a*) La velocidad relativa del chorro en cada tobera.

b) El momento de torsión de fricción en el pivote.

SOLUCIÓN:

Aplique las ecuaciones de continuidad y del momento angular utilizando el volumen de control giratorio que encierra los brazos del irrigador.

Ecuaciones básicas:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

$$\vec{r}\times\vec{F}_S + \int_{VC}\vec{r}\times\vec{g}\,\rho\, d\forall + \vec{T}_{\text{flecha}} \quad \underbrace{\int_{VC}\vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}]\rho\, d\forall}_{=0(3)}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo estacionario relativo al VC giratorio
2) Flujo uniforme en cada sección
3) $\vec{\omega}$ = constante

De acuerdo con la continuidad,

$$V_{rel} = \frac{Q}{2A_{chorro}} = \frac{Q}{2}\frac{4}{\pi D^2_{chorro}}$$

$$= \frac{1}{2}\times 7.5\ \frac{L}{min}\times\frac{4}{\pi}\frac{1}{(4)^2\ mm^2}\times\frac{m^3}{1000\ L}\times 10^6\ \frac{mm^2}{m^2}\times\frac{min}{60\ s}$$

$$V_{rel} = 4.97\ m/s \longleftarrow V_{rel}$$

Considere por separado los términos en la ecuación del momento angular. Como en el problema ejemplo

4.14, el único momento de torsión que actúa sobre el VC es la fricción en el pivote. Ésta se opone al movimiento, de modo que

$$\vec{T}_{\text{flecha}} = -Tf\hat{k} \qquad (1)$$

La integral a la izquierda se evalúa para el flujo *dentro* del VC. Sean la velocidad y el área dentro de los tubos del irrigador V_{VC} y A_{VC}, respectivamente. Entonces, para *un lado*, el primer término es

$$\begin{aligned}\int_{VC} \vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz}]\rho\, d\forall &= \int_0^R r\hat{e}_r\times[2\omega\hat{k}\times V_{VC}\hat{e}_r]\rho A_{VC}\, dr \\ &= \int_0^R r\hat{e}_r\times 2\omega V_{VC}\hat{e}_\theta\rho A_{VC}\, dr \\ &= \int_0^R 2\omega V_{VC}\rho A_{VC} r\, dr\hat{k} = \omega R^2\rho V_{VC}A_{VC}\hat{k} \qquad \{\text{un lado}\}\end{aligned}$$

(El flujo en la parte curvada del tubo no tiene componente r de velocidad, así que no contribuye a la integral.)

De la continuidad, $Q = 2V_{VC}A_{VC}$, por lo que *ambos lados* de la integral se convierten en

$$\int_{VC} \vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz}]\rho\, d\forall = \omega R^2\rho Q\hat{k} \qquad (2)$$

El segundo término en la integral se evalúa como

$$\begin{aligned}\int_{VC} \vec{r}\times[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\rho\, d\forall &= \int_{VC} r\hat{e}_r\times[\omega\hat{k}\times(\omega\hat{k}\times r\hat{e}_r)]\rho\, d\forall \\ &= \int_{VC} r\hat{e}_r\times[\omega\hat{k}\times\omega r\hat{e}_\theta]\rho\, d\forall = \int_{VC} r\hat{e}_r\times\omega^2 r(-\hat{e}_r)\rho\, d\forall = 0\end{aligned}$$

por lo que no contribuye con ningún momento de torsión.

La integral a la derecha se evalúa para el flujo que cruza la superficie de control. Respecto al lado derecho,

$$\begin{aligned}\int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} &= R\hat{e}_r\times V_{rel}[\cos\alpha(-\hat{e}_\theta) + \text{sen}\,\alpha\hat{k}]\{+\rho V_{rel}A_{chorro}\} \\ &= RV_{rel}[\cos\alpha(-\hat{k}) + \text{sen}\,\alpha(-\hat{e}_\theta)]\rho\frac{Q}{2}\end{aligned}$$

Los vectores de velocidad y de radio correspondientes al flujo en el brazo izquierdo, deben describirse en términos de los mismos vectores unitarios utilizados para el brazo derecho. En el brazo izquierdo del irrigador, la componente θ tiene la misma magnitud pero signo opuesto, de modo que se cancela. Para el VC completo,

$$\int_{SC} \vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} = -RV_{rel}\cos\alpha\rho Q\hat{k} \qquad (3)$$

Al combinar los términos 1), 2) y 3), obtenemos

$$-T_f\hat{k} - \omega R^2\rho Q\hat{k} = -RV_{rel}\cos\alpha\rho Q\hat{k}$$

o

$$T_f = R(V_{rel}\cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

De acuerdo con los datos proporcionados,

$$\omega R = \frac{30 \text{ rev}}{\text{min}} \times 150 \text{ mm} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{m}}{1000 \text{ mm}} = 0.471 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La sustitución da como resultado

$$T_f = 150 \text{ mm} \left(4.97 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30° - 0.471 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 7.5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{\text{m}^3}{1000 \text{ L}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \times \frac{\text{m}}{1000 \text{ mm}}$$

$$T_f = 0.0718 \text{ N} \cdot \text{m} \longleftarrow T_f$$

Este problema se ha presentado para ejemplificar el uso de la ecuación del momento angular para un volumen de control giratorio (no inercial). El resultado es idéntico al obtenido empleando el análisis del volumen de control fijo del problema ejemplo 4.14.

4-8 LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

La primera ley de la termodinámica es un enunciado de la conservación de la energía. Recuerde que en la formulación de sistemas, la primera ley fue

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left. \frac{dE}{dt} \right)_{\text{sistema}} \tag{4.4a}$$

donde la energía total del sistema es

$$E_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} e \, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} e \rho \, d\forall \tag{4.4b}$$

y

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

En la ecuación 4.4a, la relación de transferencia de calor, $\dot{Q}$, es positiva cuando los alrededores entregan calor al sistema; la relación de trabajo, $\dot{W}$, es positiva cuando el sistema realiza trabajo sobre sus alrededores.

Las formulaciones de sistema y de volumen de control se relacionan por medio de

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho \, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

donde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta \, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \eta \rho \, d\forall \tag{4.6}$$

Para derivar la formulación de volumen de control de la primera ley de la termodinámica, establecemos

$$N = E \qquad \text{y} \qquad \eta = e$$

De la ecuación 4.11, con esta sustitución, obtenemos

$$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} e\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.54}$$

Al deducir la ecuación 4.11, el sistema y el volumen de control coincidieron en t_0, por lo que

$$[\dot{Q} - \dot{W}]_{\text{sistema}} = [\dot{Q} - \dot{W}]_{\text{volumen de control}}$$

De acuerdo con esto, las ecuaciones 4.4a y 4.54 producen la ecuación de la primera ley de la termodinámica para un volumen de control,

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} e\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.55}$$

donde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Advierta que en el caso de flujo estacionario, el primer término en el lado derecho de la ecuación 4.55 es cero. ¿La ecuación 4.55 es la forma de la primera ley utilizada en termodinámica? Incluso para flujo estacionario, la ecuación 4.55 no es realmente la misma forma utilizada al aplicar la primera ley en problemas de volumen de control. Para obtener una formulación adecuada y conveniente en la solución de problemas, analizaremos de cerca el término de trabajo, $\dot{W}$.

4-8.1 Relación de trabajo efectuado por un volumen de control

El término $\dot{W}$, en la ecuación 4.55, tiene un valor numérico positivo cuando el volumen de control efectúa trabajo sobre los alrededores. La relación de trabajo realizado sobre el volumen de control es de signo opuesto al trabajo realizado por él.

La relación de trabajo realizado por el volumen de control se subdivide de manera conveniente en cuatro clasificaciones,

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{\text{normal}} + \dot{W}_{\text{corte}} + \dot{W}_{\text{de otro tipo}}$$

Vamos a considerarlas por separado:

1. Trabajo de flecha

Designamos al trabajo de flecha W_s y por tanto, la relación de trabajo transferida hacia afuera a través de la superficie de control por el trabajo de flecha se designa $\dot{W}_s$.

2. Trabajo efectuado por esfuerzos normales a la superficie de control

Recuerde que el trabajo requiere que una fuerza se desplace a lo largo de una distancia. Por consiguiente, al moverse una fuerza, $\vec{F}$, una distancia infinitesimal, $d\vec{s}$, el trabajo efectuado está determinado por

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Para obtener la relación a la cual la fuerza efectúa el trabajo, dividimos entre el incremento de tiempo, Δt, y tomamos el límite cuando $\Delta t \to 0$. De tal modo, la relación del trabajo efectuado por la fuerza, $\vec{F}$, está dada por

$$\dot{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta t} \qquad \text{o} \qquad \dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

La relación de trabajo realizada por esfuerzos normales sobre un elemento de área, $d\vec{A}$, de la superficie de control, es

$$d\vec{F} \cdot \vec{V} = \sigma_{nn} d\vec{A} \cdot \vec{V}$$

Como el trabajo externo a través de las fronteras del volumen de control es el negativo del trabajo efectuado sobre el volumen de control, la relación total de trabajo externo, del volumen de control, debido a esfuerzos normales, está determinada por

$$\dot{W}_{\text{normal}} = -\int_{SC} \sigma_{nn}\, d\vec{A} \cdot \vec{V} = -\int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

3. Trabajo efectuado por esfuerzos de corte en la superficie de control

Del mismo modo que los esfuerzos normales efectúan trabajo en las fronteras del volumen de control, también es posible que los esfuerzos de corte realicen trabajo.

La fuerza de corte que actúa sobre un elemento de área de la superficie de control es

$$d\vec{F} = \vec{\tau}\, dA$$

donde el vector de esfuerzo de corte, $\vec{\tau}$, es el esfuerzo de corte que actúa en el plano de dA.

La relación de trabajo efectuado por los esfuerzos de corte sobre toda la superficie de control está dada por

$$\dot{W}_{\text{corte}} = \int_{SC} \vec{\tau}\, dA \cdot \vec{V} = \int_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Puesto que el trabajo externo a través de las fronteras del volumen de control es el negativo del trabajo realizado sobre éste mismo, entonces la relación de trabajo externo del volumen de control debida a esfuerzos de corte es igual a

$$\dot{W}_{\text{corte}} = -\int_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Esta integral se expresa mejor mediante tres términos

$$\dot{W}_{\text{corte}} = -\int_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

$$= -\int_{A(\text{flecha})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA - \int_{A(\text{superficie sólida})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA - \int_{A(\text{puertos})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, dA$$

Ya hemos explicado el primer término, puesto que previamente incluimos $\dot{W}_{\text{flecha}}$. En superficies sólidas, $\vec{V} = 0$, por lo que el segundo término es cero (para un volumen de control fijo). Así,

$$\dot{W}_{\text{corte}} = -\int_{A(\text{puertos})} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, da$$

Este último término puede hacerse cero mediante la elección adecuada de las superficies de control. Si escogemos una superficie de control que atraviese cada puerto perpendicular al flujo, entonces $d\vec{A}$ es paralelo a $\vec{V}$. En cambio $\vec{\tau}$ se encuentra en el plano de dA y por lo tanto, es perpendicular a $\vec{V}$. Por consiguiente, para una superficie de control perpendicular a $\vec{V}$,

$$\vec{\tau} \cdot \vec{V} = 0 \qquad \text{y} \qquad \dot{W}_{\text{flecha}} = 0$$

4. Trabajo de otro tipo

Energía eléctrica podría agregarse al volumen de control. También podría presentarse una absorción de energía electromagnética, por ejemplo, en haces de radar o láser. En la mayor parte de los problemas, no aparecerán tales contribuciones, pero debemos indicarlas en nuestra formulación general.

Con todos los términos evaluados en $\dot{W}$, obtenemos

$$\dot{W} = \dot{W}_s - \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} + \dot{W}_{\text{flecha}} + \dot{W}_{\text{otro}} \tag{4.56}$$

4-8.2 Ecuación del volumen de control

Sustituyendo la expresión para $\dot{W}$, de la ecuación 4.56, en la 4.55, se obtiene

$$\dot{Q} - \dot{W}_s + \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otro}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} e\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Al rearreglar esta ecuación resulta

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otro}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} e\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Como $\rho = 1/v$, donde v es el *volumen específico*, entonces

$$\int_{SC} \sigma_{nn} \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{SC} \sigma_{nn} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

En consecuencia,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otro}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} (e - \sigma_{nn} v) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Los efectos viscosos pueden diferenciar al esfuerzo normal, σ_{nn}, del negativo de la presión termodinámica, $-p$. Sin embargo, para la mayoría de los flujos de interés común en ingeniería, $\sigma_{nn} \simeq -2$. Por tanto,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otro}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Por último, sustituyendo $e = u + V^2/2 + gz$ en el último término, obtenemos la forma familiar de la formulación de la primera ley para un volumen de control,

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otro}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho d\forall + \int_{SC}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

Cada término de trabajo en la ecuación 4.57 representa la relación de trabajo efectuado por el volumen de control sobre los alrededores.

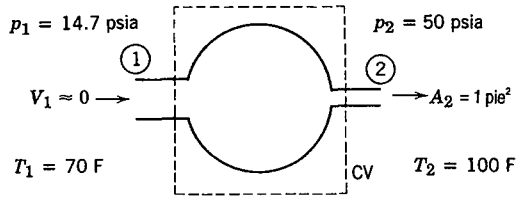
EJEMPLO 4.16 Compresor: análisis de la primera ley

Aire a 14.7 psia, 70 F y velocidad despreciable entra en un compresor, descargándose a 50 psia y a 100 F por un tubo con 1 pie² de área. El flujo másico es 20 lbm/s, la entrada de potencia al compresor, 600 hp. Determine la relación de transferencia de calor.

PROBLEMA EJEMPLO 4.16

DATOS: Aire entra en un compresor por ① y sale por ② en las condiciones indicadas. El flujo másico de aire es 20 lbm/s y la entrada de potencia al compresor es de 600 hp.

ENCUENTRE: La relación de transferencia de calor.



SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas:

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \overbrace{\dot{W}_{\text{corte}}}^{=0(4)} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo estacionario
2) Propiedades uniformes en las secciones de entrada y de salida
3) Se trata al aire como un gas ideal, $p = \rho RT$

4) El área de VC en ① y ② es perpendicular a la velocidad, por lo que $\dot{W}_{\text{corte}} = 0$
5) $z_1 = z_2$
6) La energía cinética en la entrada es despreciable

De acuerdo con las suposiciones listadas, la primera ley se convierte en

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{SC} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{SC} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \{h \equiv u + pv\}$$

o

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \int_{SC} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

En el caso de propiedades uniformes (suposición 2), podemos escribir

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)\{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)\{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

($\frac{V_1^2}{2} \approx 0$ (6))

Para flujo estacionario, de la conservación de la masa,

$$\int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

En consecuencia $-|\rho_1 V_1 A_1| + |\rho_2 V_2 A_2| = 0$, o $|\rho_1 V_1 A_1| = |\rho_2 V_2 A_2| = \dot{m}$. Por tanto, es posible escribir

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}\left[(h_2 - h_1) + \frac{V_2^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right]$$

($g(z_2 - z_1) = 0$ (5))

Suponga que el aire se comporta como un gas ideal con c_p constante. Entonces $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$, y

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}\left[c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2}{2}\right]$$

A partir de la continuidad, $|V_2| = \dot{m}/\rho_2 A_2$. Puesto que $p_2 = \rho_2 R T_2$, entonces

$$|V_2| = \frac{\dot{m}}{A_2}\frac{RT_2}{p_2} = 20\ \frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{1}{1\ \text{pie}^2} \times 53.3\ \frac{\text{pie}\cdot\text{lbf}}{\text{lbm}\cdot\text{R}} \times 560\ \text{R} \times \frac{\text{pulg}^2}{50\ \text{lbf}} \times \frac{\text{pie}^2}{144\ \text{pulg}^2}$$

$$|V_2| = 82.9\ \text{pie/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m}c_p(T_2 - T_1) + \dot{m}\frac{V_2^2}{2}$$

Advierta que la entrada de potencia es *hacia* el VC, de modo que $W_s = -600$ hp, y

$$\dot{Q} = -600\ \text{hp} \times 500\ \frac{\text{pie}\cdot\text{lbf}}{\text{hp}\cdot\text{s}} \times \frac{\text{Btu}}{778\ \text{pie}\cdot\text{lbf}} + 20\ \frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times 0.24\ \frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot\text{R}} \times 30\ \text{R}$$

$$+ 20\ \frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{(82.9)^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{pie}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{slug}}{32.2\ \text{lbm}} \times \frac{\text{Btu}}{778\ \text{pie}\cdot\text{lbf}} \times \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{pie}}$$

$\dot{Q} = -227$ Btu/s ← $\dot{Q}$ {calor rechazado}

{Además de demostrar la aplicación directa de la primera ley, este problema ilustra la necesidad de mantener correctas las unidades.}

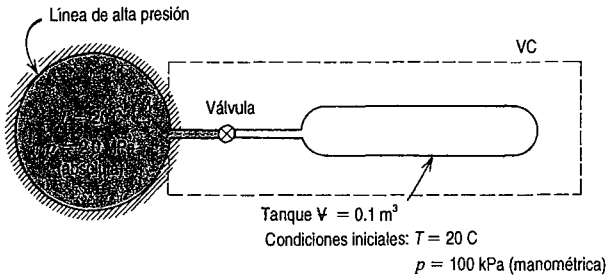
EJEMPLO 4.17 Llenado de un tanque: análisis de la primera ley

Un tanque de 0.1 m³ de volumen se conecta a una línea de aire de alta presión; tanto la línea como el tanque, al principio se encuentran a una temperatura uniforme de 20 C. La presión manométrica inicial del tanque es 100 kPa, la presión absoluta de la línea, 2.0 MPa; la línea es lo suficientemente larga para que su temperatura y presión puedan suponerse constantes. La temperatura del tanque se monitorea por medio de un termopar de respuesta rápida. En el instante posterior a la apertura de la válvula, la temperatura del tanque aumenta a una tasa de 0.05 C/s. Determine la relación instantánea de flujo de aire hacia el tanque si se desprecia la transferencia de calor.

PROBLEMA EJEMPLO 4.17

DATOS: La tubería de alimentación de aire y el tanque que se muestran. En $t = 0^+$, $\partial T/\partial t = 0.05$ C/s.

ENCUENTRE: $\dot{m}$ en $t = 0^+$.



SOLUCIÓN:

Elija el VC mostrado y aplique la ecuación de la energía.

Ecuación básica:
$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otro}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$
$$= 0(1) \quad = 0(2) \quad = 0(3) \quad = 0(4)$$
$$\simeq 0(5) \quad \simeq 0(6)$$
$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Suposiciones:
1) $\dot{Q} = 0$ (dado)
2) $\dot{W}_s = 0$
3) $\dot{W}_{\text{corte}} = 0$
4) $\dot{W}_{\text{otro}} = 0$
5) Las velocidades en la línea y en el tanque son pequeñas
6) Se desprecia la energía potencial
7) Flujo uniforme a la entrada del tanque
8) Propiedades uniformes en el tanque
9) Gas ideal, $p = \rho RT$, $du = c_v\, dT$

Entonces

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_{tanque}\,\rho\,d\forall + (u_{línea} + pv)\{-|\rho VA|\}$$

Pero inicialmente T es uniforme, por lo que $u_{tanque} = u_{línea} = u$, y

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\,d\forall + (u + pv)\{-|\rho VA|\}$$

Como las propiedades del tanque son uniformes, $\partial/\partial t$ puede sustituirse por d/dt, y

$$0 = \frac{d}{dt}[uM] - (u + pv)\dot{m}$$

o

$$0 = u\frac{dM}{dt} + M\frac{du}{dt} - u\dot{m} - pv\dot{m} \tag{1}$$

El término dM/dt puede evaluarse de la continuidad:

Ecuación básica: $$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\,d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \frac{dM}{dt} + \{-|\rho VA|\} \quad \text{o} \quad \frac{dM}{dt} = \dot{m}$$

Al sustituir en la ecuación 1, se obtiene

$$0 = \cancel{u\dot{m}} + M\frac{du}{dt} \cancel{- u\dot{m}} - pv\dot{m} = Mc_v\frac{dT}{dt} - pv\dot{m}$$

o

$$\dot{m} = \frac{Mc_v(dT/dt)}{pv} = \frac{\rho\forall c_v(dT/dt)}{pv} = \frac{\rho\forall c_v(dT/dt)}{RT} \tag{2}$$

Pero en $t = 0$, $p_{tanque} = 100$ kPa (manométrica), y

$$\rho = \rho_{tanque} = \frac{p_{tanque}}{RT} = (1.00 + 1.01)10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{293\ \text{K}} = 2.39\ \text{kg/m}^3$$

Al sustituir en la ecuación 2, resulta

$$\dot{m} = \frac{2.39\ \text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.1\ \text{m}^3 \times \frac{717\ \text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times \frac{0.05\ \text{K}}{\text{s}} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{293\ \text{K}} \times \frac{1000\ \text{g}}{\text{kg}}$$

$$\dot{m} = 0.102\ \text{g/s} \longleftarrow \dot{m}$$

{ Este problema ejemplifica la aplicación de la ecuación de la energía a una situación de flujo no estacionario. }

4-9 LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Recuerde que la ecuación de la segunda ley para un sistema es

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{sistema} \geq \frac{1}{T}\dot{Q} \tag{4.5a}$$

donde la entropía total del sistema está dada por

$$S_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} s\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} s\rho\, d\forall \tag{4.5b}$$

La relación entre las formulaciones de sistema y de volumen de control es

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} \eta\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.11}$$

donde

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta\, dm = \int_{\forall(\text{sistema})} \eta\rho\, d\forall \tag{4.6}$$

Para deducir la ecuación de la segunda ley de la termodinámica para un volumen de control, establecemos

$$N = S \qquad \text{y} \qquad \eta = s$$

De la ecuación 4.11, con esta sustitución, obtenemos

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} s\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} s\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.58}$$

De la ecuación 4.5a,

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{\text{sistema}} \geq \frac{1}{T}\dot{Q}$$

El sistema y el volumen de control coinciden en t_0; consecuentemente,

$$\left.\frac{1}{T}\dot{Q}\right)_{\text{sistema}} = \left.\frac{1}{T}\dot{Q}\right)_{\text{VC}} = \int_{\text{SC}} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right)dA$$

De acuerdo con esto, las ecuaciones 4.5a y 4.58 producen la ecuación de la segunda ley de la termodinámica para un volumen de control

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{VC}} s\rho\, d\forall + \int_{\text{SC}} s\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \geq \int_{\text{SC}} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right)dA \tag{4.59}$$

En la ecuación 4.59, el término $(\dot{Q}/A)$ representa el flujo de calor por unidad de área hacia el volumen de control, a través del elemento de área dA. Para evaluar el término

$$\int_{\text{SC}} \frac{1}{T}\left(\frac{\dot{Q}}{A}\right)dA,$$

tanto el flujo de calor local, $(\dot{Q}/A)$, como la temperatura local, T, deben conocerse para cada elemento de área de la superficie de control.

4-10 RESUMEN

Des

1.

2.

3.

4.

5.

** 6.

7.

** 8.

** 9.

10.

11.

12.

PROBLEMAS

4.1

4.2

** Es

4-10 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 4, usted debe ser capaz de efectuar lo siguiente:

1. Escribir cada una de las cinco leyes básicas (conservación de la masa, segunda ley de Newton, principio del momento angular, la primera ley de la termodinámica y la segunda ley de la termodinámica) para un sistema, como una ecuación de flujo.
2. Si la propiedad extensiva en las ecuaciones de flujo del objetivo 1 se designa N, definir la propiedad intensiva correspondiente, designada η, en cada una de las ecuaciones básicas.
3. Escribir la ecuación que relaciona la variación de cambio de cualquier propiedad extensiva arbitraria, N, de un sistema, con las variaciones de la propiedad asociadas al volumen de control. Indicar el significado físico de cada cantidad en la ecuación.
4. Escribir la ecuación de la conservación de la masa para un volumen de control y establecer el significado físico de cada término en la ecuación. Aplicar la ecuación a la solución de problemas de flujo.
5. Escribir la formulación de volumen de control de la ecuación del momento para un volumen de control inercial y enunciar el significado físico de cada término en la ecuación. Aplicar la ecuación a la solución de problemas de flujo.

** 6. Establecer la relación entre las propiedades de fluido (la ecuación de Bernoulli) que resulta de la aplicación de la ecuación del momento a un volumen de control diferencial. Listar las restricciones en el uso de la ecuación de Bernoulli.

7. Escribir la formulación de la ecuación del momento para un volumen de control con aceleración rectilínea y enunciar el significado físico de cada término en la ecuación. Aplicar ésta a la solución de problemas de flujo.

** 8. Escribir la formulación de la ecuación del momento para un volumen de control con aceleración arbitraria y enunciar el significado físico de cada término en la ecuación. Aplicar la ecuación en la solución de problemas de flujo.

** 9. Escribir la ecuación del principio del momento angular para un volumen de control para *a*) un volumen de control fijo y *b*) uno rotatorio. Enunciar el significado físico de cada término en la ecuación. Aplicar la ecuación en la solución de problemas de flujo.

10. Escribir la ecuación de la primera ley de la termodinámica para un volumen de control y enunciar el significado físico de cada término en la ecuación. Aplicar la ecuación a la solución de problemas de flujo.
11. Escribir la ecuación de la segunda ley de la termodinámica para un volumen de control y enunciar el significado físico de cada término en la ecuación. Aplicar la ecuación a la solución de problemas de flujo.
12. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionan con el material que usted ha estudiado.

PROBLEMAS

4.1 Una persona con 75 kg de masa total sube por el elevador de un edificio alto. Calcule la fuerza ejercida por la persona sobre el piso del elevador durante aceleraciones uniformes de *a*) 3 m/s^2 hacia arriba y *b*) 2 m/s^2 hacia abajo.

4.2 Calcule la cantidad mínima de trabajo requerida para acelerar un automóvil de 1500 kg, desde el reposo hasta una velocidad de 25 m/s en una autopista plana, si se desprecian la resistencia del aire y las pérdidas mecánicas.

** Estos objetivos se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

4.3 Aire se expande isotérmicamente en un proceso sin flujo desde condiciones iniciales de 170 C, 276 kPa (abs) y 0.05 m^3 hasta un volumen final de 0.1 m^3. Determine el calor transferido.

4.4 Para enfriar un paquete de 6 latas lo más rápido posible, el paquete se coloca en una congeladora por un periodo de 1 hr. Si la temperatura ambiente es de 25 C y la bebida enfriada alcanza una temperatura final de 5 C, determine el cambio en la entropía específica de la bebida.

4.5 Un cuerpo de masa M se encuentra en reposo sobre un plano horizontal. En $t = 0$, el cuerpo está sujeto a una fuerza constante, F_1, de 10 lbf. La fuerza se aplica por un periodo de 5 s. Inmediatamente después de que se elimina esta fuerza, actúa sobre el cuerpo otra fuerza constante, F_2, de 3 lbf en la dirección opuesta. No hay fricción. Determine el intervalo de tiempo de acción de F_2 requerido para llevar el cuerpo al reposo.

4.6 Una investigación policiaca de marcas de llanta mostró que un automóvil que viajaba a lo largo de una calle recta plana derrapó, después de aplicar los frenos, una distancia total de 50 m antes de detenerse. Se estima el coeficiente de fricción entre las llantas y el pavimento como $\mu = 0.6$. ¿Cuál era la velocidad mínima probable del automóvil cuando se aplicaron los frenos?

4.7 Un avión de transporte, jet Boeing 727-200, pesa 190 000 lbf completamente cargado. El piloto lleva los tres motores, de 15 500 lbf cada uno, hasta el máximo empuje de despegue antes de soltar los frenos. Despreciando la resistencia aerodinámica y de rodado, estime la mínima longitud de la pista y el tiempo necesario para alcanzar una velocidad de despegue de 140 mph. Suponga que el empuje del motor permanece constante durante el recorrido sobre la pista.

4.8 Una bala de pistola disparada horizontalmente en el aire experimenta una fuerza de arrastre aerodinámica que es proporcional al cuadrado de su velocidad, $F_D = kV^2$. Los datos balísticos, medidos en la boca y en un rango de 50 m, indican que $V_0 = 260$ m/s en la boca y $V = 240$ m/s a 50 m. Estime el valor de k si la masa de la bala es 15.6 g.

4.9 Una pequeña bola de acero, de radio r, colocada encima de una esfera más grande de radio R, empieza a rodar ante la influencia de la gravedad. La resistencia al rodado y al aire son despreciables. A medida que aumenta la velocidad de la bola, ésta abandona la superficie de la esfera y se convierte en un proyectil. Determine la posición en la cual la bola pierde contacto con la esfera.

4.10 La relación promedio de pérdida de calor hacia los alrededores, proveniente de una persona que no está trabajando activamente, es aproximadamente de 300 Btu/hr. Suponga que en un auditorio con un volumen cercano a 1.2×10^7 $pies^3$, en donde hay 6000 personas, falla el sistema de ventilación. ¿Cómo aumenta la energía interna del aire en el auditorio durante los primeros 15 min después de la falla? Considere el auditorio y las personas como un sistema. Suponiendo que no hay transferencia térmica a los alrededores, ¿qué tanto cambia la energía interna del sistema? ¿Cómo explicaría usted el hecho de que la temperatura del aire aumenta? Estime la relación del aumento de temperatura en estas condiciones.

4.11 Aire a 20 C y a una presión absoluta de 1 atm se comprime adiabáticamente, sin fricción, hasta una presión absoluta de 3 atm. Determine el cambio en la energía interna.

4.12 El sistema de enfriamiento de un automóvil contiene 20 litros de refrigerante. El auto se arranca en una fría mañana invernal cuando la temperatura es −10 C. Durante el calentamiento, el motor entrega calor al refrigerante a una relación de 5 kW. Estime el tiempo mínimo necesario para que el refrigerante alcance 15 C, si su capacidad calorífica es la del agua.

4.13 Una lata de aluminio de refresco se va a enfriar en un refrigerador donde la temperatura es $T_r = 5$ C. La relación de transferencia de calor de la lata es $\dot{Q} = -k(T - T_r)$, donde $k = 0.25$ W/C. Calcule la energía que debe extraerse si la masa de la lata, incluyendo su contenido, es equivalente a 390 g de agua y su temperatura inicial es 25 C. Estime el tiempo requerido para enfriar la lata hasta 7 C.

4.14 Un automóvil de 1500 kg tiene un tren motriz que suministra 50 kW a las ruedas motrices. Determine el tiempo y la distancia mínimos que se requieren para acelerar el vehículo desde el reposo hasta 25 m/s sobre una carretera plana, despreciando la resistencia al aire y al rodamiento.

4.15 Los más modernos autos de carreras dependen en gran medida de las características de diseño

4.1

4.1

4.1

4.19

4.20

4.21

aerodinámicas para poder generar una fuerza descendente, que aumente la carga sobre las llantas y consecuentemente, las velocidades en las curvas. Un carro de carreras que corre en la pista de Indianápolis, tiene una masa de 800 kg. Sus dispositivos aerodinámicos producen una fuerza descendente de 8 kN a las velocidades de competencia. Cada vuelta en Indianápolis tiene un radio efectivo de 250 m y está peraltada a 9.2°. Para estas condiciones, calcule la máxima aceleración radial y la velocidad correspondiente que un carro de Indianápolis puede alcanzar en estas vueltas. Suponga que el coeficiente de fricción para las llantas de carreras es 1.2.

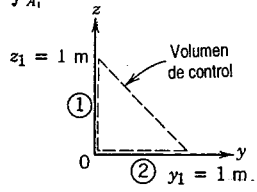
4.16 La masa de una lata de aluminio que contiene refresco es de 20 g. Su diámetro y su altura son 65 y 120 mm, respectivamente. Cuando está llena, la lata contiene 354 mililitros de líquido con DR = 1.05. Determine la altura del centro de gravedad de la lata como función del nivel del líquido. ¿A qué nivel probablemente se voltearía la lata al estar sujeta a una aceleración lateral uniforme? Calcule el coeficiente mínimo de fricción estática para el cual la lata se voltearía, en lugar de deslizar sobre la superficie horizontal.

4.17 Un volante, compuesto de un disco de acero de 20 mm de espesor y 0.6 m de diámetro, gira a 20 000 rpm. El volante está montado en un vagón de transporte colectivo con su eje de rotación ubicado en dirección de la longitud. El vagón, viajando a una velocidad de 15 m/s, recorre una curva de 80 m de radio. Determine el momento de torsión de reacción ejercido por el arreglo del volante sobre el vagón.

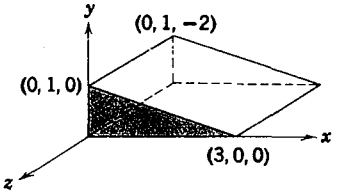
4.18 Un experimento de laboratorio de mecánica de fluidos consta de un tanque cilíndrico que contiene agua y que está montado sobre una mesa giratoria, como en el ejemplo 3.9. El diámetro del cilindro es 0.2 m; la profundidad inicial del agua, h_0, es 40 mm. Las mediciones indican que cuando la mesa giratoria se desactiva a una velocidad de 78 rpm, todo movimiento del líquido cesa 180 s después. Determine el momento de torsión promedio aplicado al agua durante este intervalo.

4.19 El campo de velocidad en la región que se muestra está determinado por $\vec{V} = az\hat{j} + b\hat{k}$, donde $a = 10\ s^{-1}$ y $b = 5$ m/s. Para una profundidad w perpendicular al diagrama, un elemento del área ① puede representarse mediante $w\,dz(-\hat{j})$ y un elemento del área ②, por medio de $w\,dy(-\hat{k})$. (Nótese que ambos se dibujan *hacia afuera* desde el volumen de control, lo que explica los signos negativos.)

a) Encuentre una expresión para $\vec{V} \cdot d\vec{A}_1$.
b) Evalúe $\int_{A_1} \vec{V} \cdot d\vec{A}_1$.
c) Encuentre una expresión para $\vec{V} \cdot d\vec{A}_2$.
d) Encuentre una expresión para $\vec{V}(\vec{V} \cdot d\vec{A}_2)$.
e) Evalúe $\int_{A_1} \vec{V}(\vec{V} \cdot d\vec{A}_3)$.



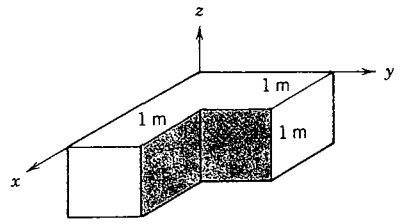
P4.19



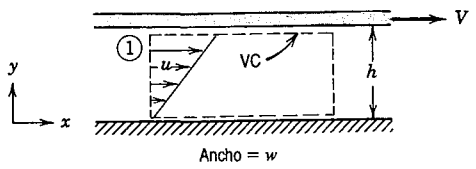
P4.20

4.20 Un campo de flujo está dado por $\vec{V} = ay\hat{i} + b\hat{k}$, donde $a = 2\ s^{-1}$ y $b = 1$ pie/s. Evalúe el flujo volumétrico a través de la superficie sombreada. Todas las dimensiones están dadas en pies.

4.21 El área sombreada que se muestra está en un flujo donde el campo de velocidad está dado por $\vec{V} = ax\hat{i} - by\hat{j}$; $a = b = 1\ s^{-1}$. Evalúe las integrales $\int \vec{V} \cdot d\vec{A}$ y $\int \vec{V}\ (\vec{V} \cdot d\vec{A})$ sobre el área sombreada.



P4.21



P4.22

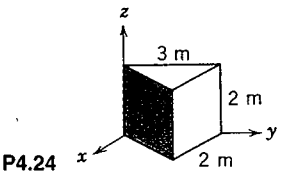
4.22 Evalúe el flujo de momento en la dirección x, $\int (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$, para la sección transversal ① del volumen de control que se muestra en el diagrama. 4.3

4.23 La distribución de velocidad para el flujo laminar en un largo tubo circular de radio R, está dada por la expresión unidimensional,

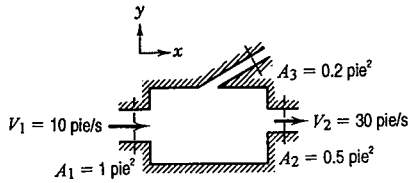
$$\vec{V} = u\hat{i} = u_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\hat{i}$$

Para este perfil, evalúe *a)* $\int \vec{V} \cdot d\vec{A}$ y *b)* $\int \vec{V}(\vec{V} \cdot d\vec{A})$ para la sección transversal del tubo.

4.24 El área sombreada que se muestra se encuentra en un flujo en el que el campo de velocidad está dado por $\vec{V} = -ax\hat{i} + by\hat{j} + c\hat{k}$; $a = b = 1\ s^{-1}$ y $c = 1$ m/s. Escriba una expresión vectorial para un elemento del área sombreada. Evalúe las integrales $\int \vec{V} \cdot d\vec{A}$ y $\int \vec{V}(\vec{V} \cdot d\vec{A})$ sobre el área sombreada. 4.31



P4.24

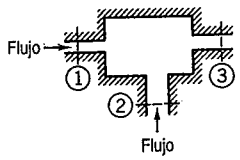


P4.25

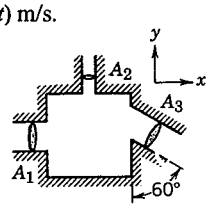
4.25 Considere el flujo estacionario e incompresible que pasa por el dispositivo mostrado. Determine la magnitud y dirección del flujo de volumétrico a través del puerto 3. 4.32

4.26 Aire en condiciones atmosféricas estándar entra en un compresor a una relación de 20 m³/min, descargándose a 800 kPa (abs) y 60 C. Si la velocidad en la línea de descarga debe limitarse a 20 m/s, calcule el diámetro requerido de la línea.

4.27 En el flujo incompresible que pasa por el dispositivo mostrado, las velocidades pueden considerarse uniformes sobre las secciones de entrada y salida. Si el fluido que corre es agua, obtenga una expresión para el flujo másico en la sección ③. Se conocen las siguientes condiciones: $A_1 = 0.1$ m², $A_2 = 0.2$ m², $A_3 = 0.15$ m², $V_1 = 5$ m/s y $V_2 = 10 + 5\cos(4\pi t)$ m/s. 4.33



P4.27



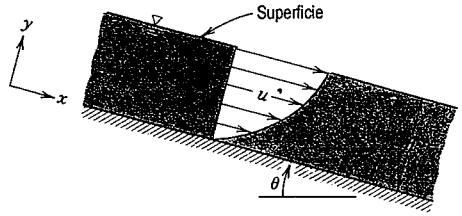
P4.28

4.28 Un fluido con densidad de 1050 kg/m³ fluye estacionariamente a través de la caja rectangular que se muestra. Dadas $A_1 = 0.05$ m², $A_2 = 0.01$ m², $A_3 = 0.06$ m², $\vec{V}_1 = 4\hat{i}$ m/s y $\vec{V}_2 = -8\hat{j}$ m/s, determine la velocidad $\vec{V}_3$. 4.34

4.29 En una capa delgada, fluye aceite de manera estacionaria descendiendo sobre un plano inclinado. El perfil de velocidad es

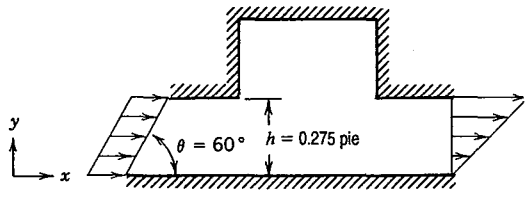
$$u = \frac{\rho g \operatorname{sen}\theta}{2\mu}\left[hy - \frac{y^2}{2}\right]$$

Exprese el flujo másico por unidad de ancho en términos de ρ, μ, g, θ y h.



P4.29

4.30 Un fluido incompresible fluye a través del dispositivo que se muestra. El flujo de entrada es uniforme con $V_1 = 2.0$ pies/s. El perfil de salida es lineal, $V_2 = ky$. El ancho del dispositivo es $w = 1.25$ pies. Encuentre k si el flujo es estacionario.



P4.30

4.31 Por un canal rectangular de 2 h altura, entra agua con una velocidad uniforme de 5 m/s. En la salida del canal la distribución de velocidad está dada por

$$\frac{u}{u_{máx}} = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2$$

donde y se mide desde la línea central del canal. Determine la velocidad de la línea central de salida, $u_{máx}$.

4.32 Un fluido incompresible fluye estacionariamente a través de un canal plano divergente. En la entrada, la altura es H, el flujo es uniforme con magnitud V_1. En la salida, la altura es $2H$, el perfil de velocidad es

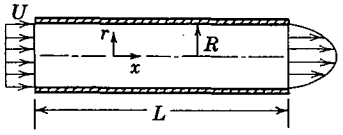
$$V_2 = V_m \cos\left(\frac{\pi y}{2H}\right)$$

donde y se mide desde la línea central del canal. Exprese V_m en términos de V_1.

4.33 Agua fluye estacionariamente a través de un tubo de longitud L y radio $R = 3$ pulg. Calcule la velocidad uniforme de entrada, U, si la distribución de velocidad a través de la salida está dada por

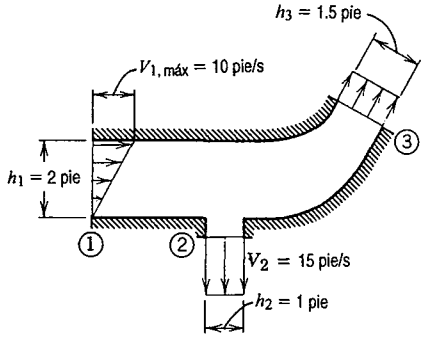
$$u = u_{máx}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

y $u_{máx} = 10$ pie/s.

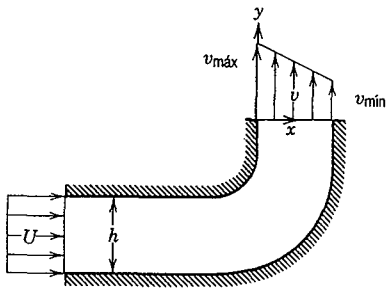


P4.33

4.34 Un codo reductor bidimensional tiene un perfil de velocidad lineal en la sección ①. El flujo es uniforme en las secciones ② y ③. El fluido es incompresible y el flujo es estacionario. Encuentre la magnitud y dirección de la velocidad uniforme en la sección ③.



P4.34



P4.35

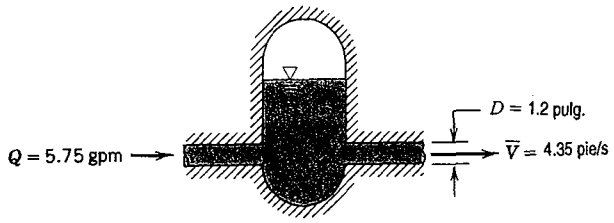
4.35 Por un canal bidimensional de ancho constante, h, entra agua con una velocidad uniforme, U. El canal forma un codo de 90° que distorsiona el flujo para producir el perfil de velocidad lineal que se muestra a la salida ($v_{máx} = 2\ v_{mín}$). Evalúe $v_{mín}$.

4.36 Un tubo redondo poroso de $D = 60$ mm conduce agua. La velocidad de entrada es uniforme ($V_1 = 7.0$ m/s). El agua fluye radialmente y axisimétricamente a través de las paredes porosas con distribución de velocidad

$$v = V_0\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

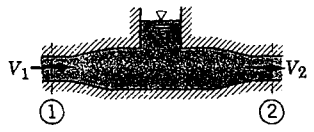
donde $V_0 = 0.03$ m/s y $L = 0.950$ m. Calcule el flujo másico dentro del tubo en $x = L$.

4.37 Un *acumulador hidráulico* se diseña para reducir las pulsaciones de presión en el sistema hidráulico de una máquina herramienta. Para el instante mostrado, determine el flujo de aceite hidráulico que el acumulador ganará o perderá.



P4.37

4.38 La sección de una tubería que conduce agua contiene una cámara de expansión con una superficie libre cuya área es 2 m^2. Los tubos de entrada y de salida son ambos de igual área, 1 m^2. En un instante determinado, la velocidad en la sección (1) es de 3 m/s hacia la cámara. El agua fluye hacia afuera en la sección (2) a 4 m^3/s. Ambos flujos son uniformes. Encuentre la relación de cambio del nivel de la superficie libre en el instante determinado. Indique si el nivel asciende o desciende.



P4.38

4.39 Un tanque rectangular utilizado para suministrar agua en un experimento de flujo de Reynolds tiene 230 mm de profundidad. Su ancho y longitud son $W = 150$ mm y $L = 230$ mm. El agua fluye del tubo de salida (diámetro interior $D = 6.35$ mm) a un número de Reynolds $Re = 2000$, cuando el tanque está a la mitad. La válvula de alimentación está cerrada. Encuentre la relación del cambio de nivel de agua en el tanque para este instante.

4.40 Un líquido viscoso de un tanque circular de diámetro $D = 300$ mm, se extrae a través de un tubo circular largo de radio $R = 50$ mm. El perfil de velocidad en la descarga del tubo es

$$u = u_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Demuestre que la velocidad promedio del flujo en el tubo de drenaje es $\overline{V} = \frac{1}{2}u_{máx}$. Evalúe la relación de cambio del nivel de líquido en el tanque, en el instante en que $u_{máx} = 1.5$ m/s.

4.41 Un tanque de 0.5 m^3 de volumen contiene aire comprimido. Una válvula se abre y el aire escapa con una velocidad de 300 m/s a través de una abertura de 130 mm^2 de área. La temperatura del aire que atraviesa la abertura es −15 C y la presión absoluta es 350 kPa. Encuentre la relación de cambio de la densidad del aire en el tanque en este momento.

4.4

4.43

4.44

4.45

4.46

4.47

4.48

4.49 Ag
co

Eva

4.42 Aire entra a un tanque a través de un área de 0.2 pies^2 con una velocidad de 15 pies/s y una densidad de 0.03 slug/pie^3. El aire sale con una velocidad de 5 pies/s y una densidad igual a la del interior del tanque. La densidad inicial del aire en el tanque es 0.02 slug/pie^3. El volumen total del tanque es 20 pies^3 y el área de salida es 0.4 pies^2. Encuentre la relación inicial de cambio de la densidad en el tanque.

4.43 Un tanque cilíndrico, de 0.3 m de diámetro, se vacía a través de un agujero en su fondo. En el instante en que la profundidad del agua es 0.6 m, se observa que el flujo del tanque es igual a 4 kg/s. Determine la relación de cambio en el nivel de agua en este instante.

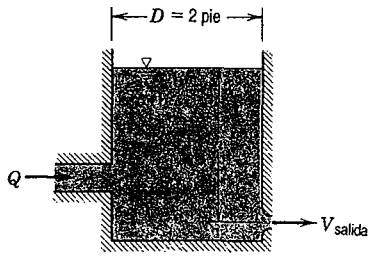
4.44 Un tanque cilíndrico, de diámetro $D = 50$ mm, se vacía a través de una abertura, $d = 5$ mm, en su fondo. La velocidad del líquido que sale del tanque es aproximadamente $V = \sqrt{2gy}$, donde y es la altura desde el fondo del tanque hasta la superficie libre. Si inicialmente el tanque está lleno con agua a $y_0 = 0.4$ m, determine la profundidad del agua en $t = 12$ s.

4.45 Para las condiciones del problema 4.44, estime el tiempo requerido para vaciar el tanque hasta una profundidad $y = 20$ mm.

4.46 Un embudo cónico de semiángulo $\theta = 15°$, con diámetro máximo $D = 70$ mm, se vacía a través de un agujero (diámetro $d = 3.12$ mm) en su fondo. La velocidad del líquido que sale del embudo es aproximadamente $V = (2gy)^{1/2}$, donde y es la altura de la superficie libre del líquido sobre el agujero. Encuentre la relación de cambio del nivel de la superficie en el embudo, en el instante en el que $y = H/2$.

4.47 Un frasco cónico, de diámetro $D = 29.4$ mm, contiene agua hasta una altura $H = 36.8$ mm. El agua se saca a través de un agujero redondo y liso, de diámetro $d = 7.35$ mm, en el ápice del cono. La velocidad del flujo a la salida es aproximadamente $V = (2gy)^{1/2}$, donde y es la altura de la superficie libre del líquido que se encuentra encima del agujero. Una corriente de agua fluye hacia la parte superior del frasco con un flujo volumétrico constante, $Q = 3.75 \times 10^{-7}$ m^3/hr. Encuentre el flujo volumétrico que sale del fondo del frasco. Evalúe la dirección y relación de cambio del nivel de la superficie del agua en el frasco, en este instante.

4.48 Agua entra al tanque a través de un tubo con un $Q = 0.35$ pies^3/s. El agua también sale del tanque por una tobera redondeada y lisa de 2 pulg de diámetro. La velocidad de salida a través de este agujero, que depende de la altura, h, del nivel del agua sobre el agujero, es $V_{\text{salida}} = \sqrt{2gh}$. En $t = 0$, $h = 9$ pies. Obtenga una ecuación para h (t) cuando $h > 4$ pies. Para $4 < h < 9$ pies, ¿dh/dt es mayor, menor o igual a cero?

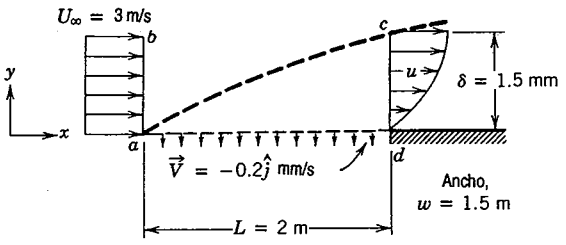


P4.48

4.49 Agua fluye estacionariamente por delante de una placa plana porosa. Si se aplica una succión constante a lo largo de la sección porosa y el perfil de velocidad en la sección *cd* es

$$\frac{u}{U_\infty} = 3\left[\frac{y}{\delta}\right] - 2\left[\frac{y}{\delta}\right]^{1.5}$$

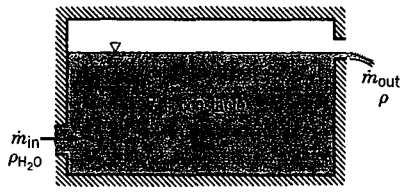
Evalúe el flujo másico a través de la sección *bc*.



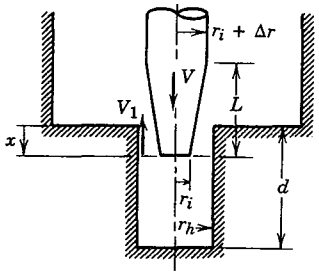
P4.49

4.50 Un embudo cónico de semiángulo θ se vacía a través de un pequeño agujero de área A en el vértice. La velocidad del líquido saliendo del embudo es aproximadamente $V = \sqrt{2gy}$, donde y es la superficie libre del líquido sobre el agujero. Inicialmente, el embudo está lleno hasta una altura y_0. Obtenga una expresión para el tiempo, t, requerido para vaciar el embudo. Exprese el resultado en términos del volumen inicial, $\forall_0$, del líquido en el embudo y el flujo volumétrico inicial, $Q_0 = A\sqrt{2gy_0} = AV_0$.

4.51 Un tanque de volumen fijo contiene salmuera con una densidad inicial, ρ_i, mayor que la del agua. Entra agua pura al tanque de manera estacionaria y se mezcla completamente con la salmuera que está dentro. El nivel de líquido en el tanque permanece constante. Obtenga expresiones para *a*) la relación de cambio de la densidad de la mezcla líquida en el tanque y *b*) el tiempo requerido para que la densidad alcance el valor ρ_f, donde $\rho_i > \rho_f > \rho_{H_2O}$.



P4.51



P4.52

4.52 El movimiento de un cilindro hidráulico se amortigua al final de su carrera mediante un pistón que entra al agujero en la forma que se indica. La cavidad y el cilindro se llenan con fluido hidráulico de densidad uniforme, ρ. Obtenga una expresión como una función del desplazamiento del pistón, x, para la velocidad, V_1, a la cual el fluido hidráulico escapa del agujero cilíndrico.

‡**4.53** Con el tiempo, el aire se filtra a través de los poros en el hule de las llantas de alta presión de bicicleta. Una afirmación común dice que una llanta pierde presión a una proporción de "una libra [1 psi] por día". La proporción verdadera de pérdida de presión no es constante; en vez de eso, el flujo másico de fuga instantánea es proporcional a la densidad del aire en la llanta y a la presión manométrica en la misma, $\dot{m} \cong \rho p$. Debido a que el flujo másico de fuga es lento, el aire en la llanta es casi isotérmico. Considere una llanta que inicialmente está inflada a 0.6 MPa (manométrica). Suponiendo que la relación inicial de la pérdida de presión es 1 psi por día, estime la presión que permanece en la llanta después de 30 días. ¿Qué tan precisa es la afirmación "una libra por día" durante el periodo completo de 30 días?

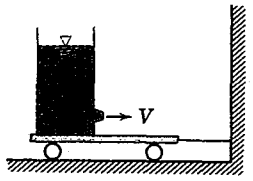
4.54 Evalúe el flujo neto de momento externo a través de la superficie de control del problema 4.28.

4.55 De acuerdo con las condiciones del problema 4.31, evalúe el cociente entre el flujo de momento en la dirección x a la salida del canal y el correspondiente a la entrada del mismo.

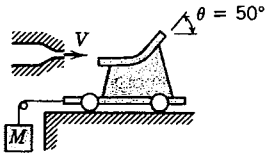
‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obeliscos.

4.56 De acuerdo con las condiciones del problema 4.33, evalúe el cociente entre el flujo de momento en la dirección x en la salida del tubo y el correspondiente a la entrada del mismo.

4.57 Un gran tanque se coloca sobre un carrito como se indica. Desde el tanque, se emite agua a través de una tobera de 600 mm^2 a una velocidad de 10 m/s. El nivel del agua en el tanque se mantiene constante agregando agua por medio de un tubo vertical. Determine la tensión en el alambre que mantiene al carrito estacionario.



P4.57



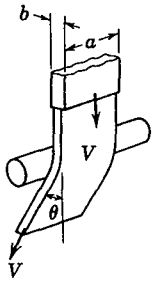
P4.58, 4.59

4.58 Un chorro de agua emitido desde una tobera estacionaria a 15 m/s ($A_j = 0.05$ m^2) incide sobre un álabe montado sobre un carrito en la forma indicada. El álabe desvía el chorro a un ángulo $\theta = 50°$. Determine el valor de M requerido para mantener el carrito estacionario.

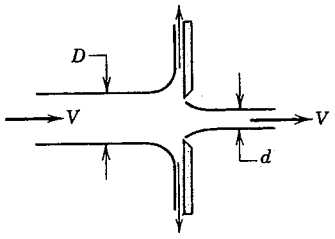
‡**4.59** Si el ángulo del álabe, θ, del problema 4.58 es ajustable, grafique la masa, M, necesaria para mantener el carrito estacionario contra θ para $0 \leq \theta \leq 180°$.

4.60 Un cilindro circular insertado en una corriente de agua que fluye, desvía la corriente en un ángulo θ, como se indica. (Esto recibe el nombre de "efecto Coanda".) Para $a = 0.5$ pulg, $b = 0.1$ pulg, $V = 10$ pies/s y $\theta = 20°$, determine la componente horizontal de la fuerza sobre el cilindro debida al agua que fluye.

4.61 Una placa vertical tiene un orificio de borde afilado en su centro. Un chorro de agua de velocidad V golpea la placa concéntricamente. Obtenga una expresión para la fuerza externa necesaria para mantener fija la placa, si el chorro que sale del orificio también tiene velocidad V. Evalúe la fuerza



P4.60



P4.61

para $V = 5$ m/s, $D = 100$ mm y $d = 25$ mm.

4.62 Cemento de secado rápido se empaqueta en sacos de 90 lb; su densidad es 100 lbm/pie^3. Los sacos se soportan mediante tarimas a medida que se mueven por una máquina automática para el llenado. Si el tiempo de llenado es 4 s y la velocidad vertical del cemento es 10 pies/s, determine la máxima fuerza vertical sobre la tarima.

4.63 Un granjero compra 675 kg de grano suelto en la cooperativa local. El grano es cargado en su camioneta con la ayuda de una tolva con un diámetro de salida de 0.3 m. El operador que realiza el proceso determina la carga útil observando la masa bruta del camión como función del tiempo. El flujo de grano desde la tolva ($\dot{m} = 40$ kg/s) se termina cuando la lectura de la balanza alcanza la masa bruta deseada. Si la densidad del grano es 600 kg/m^3, determine la carga verdadera.

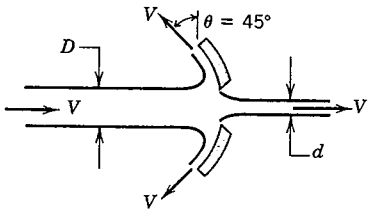
‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obeliscos.

4.64 Un tanque muy grande se emplea para calibrar un medidor de flujo, utilizando el método de pesada, en donde se efectúan mediciones del peso como función del tiempo. El agua ingresa al tanque verticalmente desde el sistema de medición del flujo a una velocidad de 20 pies/s a través de un tubo de 1.5 pulg de diámetro. Si el peso del tanque vacío es 50 lbf, determine la lectura del medidor en $t = 10$ s. ¿Cuál es el peso real del agua y el tanque en $t = 10$ s?

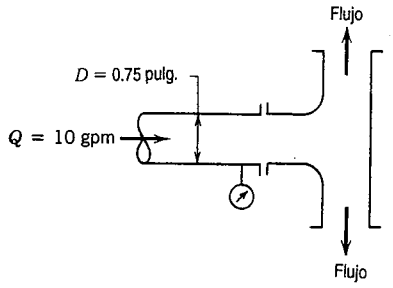
4.65 Fluye agua estacionariamente por una manguera contra incendio y por su tobera. La manguera tiene 75 mm de diámetro interior, y el correspondiente a la punta de la tobera es de 25 mm; la presión manométrica del agua en la manguera es de 510 kPa y la corriente que sale de la tobera es uniforme. La velocidad y la presión de salida son 32 m/s y la atmosférica, respectivamente. Encuentre la fuerza transmitida en el acoplamiento entre la tobera y la manguera. Indique si el acoplamiento es de tensión o compresión.

4.66 Fluye agua de un pozo a través de una tobera que se encuentra en el extremo de una tubería de 50 mm de diámetro. El diámetro de salida de la tobera es 25 mm. El flujo de agua es de 53.0 m^3/hr y la presión, inmediatamente aguas arriba, de la tobera es 522 kPa (abs). Encuentre la fuerza transmitida en el acoplamiento entre la tobera y la tubería. Indique si el acoplamiento es de tensión o compresión.

4.67 Un plato hondo circular tiene un orificio de borde afilado en su centro. Un chorro de agua, de velocidad V, golpea el plato concéntricamente. Obtenga una expresión para la fuerza externa necesaria para mantener el plato en su lugar, si el chorro emitido desde el orificio también tiene velocidad V. Evalúe la fuerza para $V = 5$ m/s, $D = 100$ mm y $d = 20$ mm.



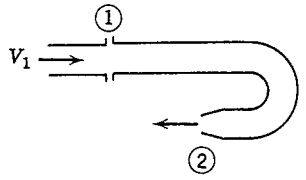
P4.67



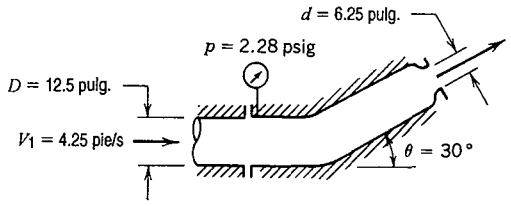
P4.68

4.68 Agua fluye estacionariamente, con un flujo de 10 gpm, por una T horizontal hasta descargarse en la atmósfera. La presión, justo aguas arriba, de la T es 15.0 psia. Determine la fuerza ejercida por la T sobre la línea.

4.69 Agua está fluyendo estacionariamente a través del codo de 180° que se muestra. A la entrada del codo, la presión manométrica es 96 kPa. El agua se descarga a la presión atmosférica. Suponga que las propiedades son uniformes sobre las áreas de entrada y de salida; $A_1 = 2600$ mm^2, $A_2 = 650$ mm^2 y $V_1 = 3.05$ m/s. Encuentre la componente horizontal de la fuerza requerida para mantener el codo en su lugar.



P4.69



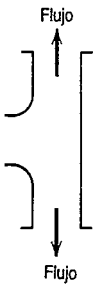
P4.70

4.70 Agua fluye estacionariamente por la tobera que se muestra, descargándose a la atmósfera. Calcule la componente horizontal de la fuerza en la brida de unión. Indique si la brida está en tensión o compresión.

método de pesada,
ingresa al tanque
a través de un tubo
ctura del medidor

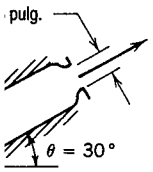
La manguera tiene
25 mm; la presión
obera es uniforme.
Encuentre la fuerza
liento es de tensión

una tubería de 50
de 53.0 m³/hr y la
fuerza transmitida
sión o compresión.
horro de agua, de
la fuerza externa
icio también tiene



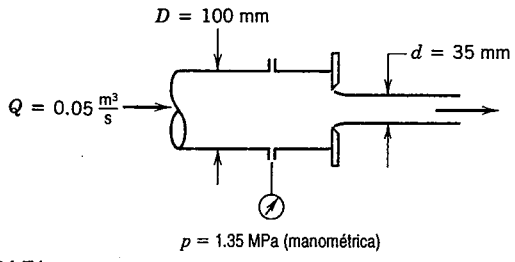
a descargarse en la
za ejercida por la T

a. A la entrada del
érica. Suponga que
m^2, $A_2 = 650\ mm^2$
a mantener el codo

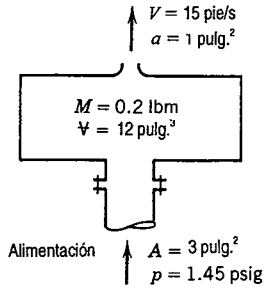


atmósfera. Calcule
a está en tensión o

4.71 Un orificio de placa plana tiene 50 mm de diámetro y se localiza en el extremo de una tubería de 100 mm de diámetro. El agua fluye por la tubería y el orificio a 0.05 m^3/s. El diámetro del chorro de agua abajo del orificio es 35 mm. Calcule la fuerza externa requerida para mantener el orificio en su lugar. Desprecie la fricción sobre la pared de la tubería.



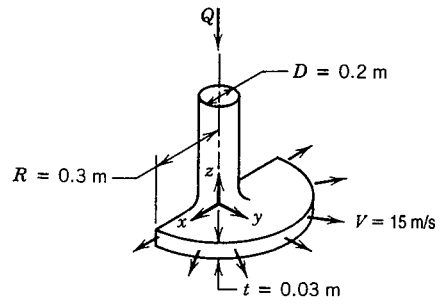
P4.71



P4.72

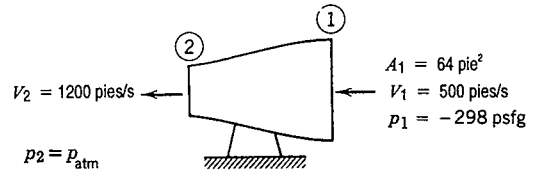
4.72 Un sistema de rociado se muestra en el diagrama. El agua se alimenta a $p = 1.45$ psig, a través de la apertura bridada de área $A = 3\ pulg^2$. El agua sale en un chorro libre estacionario a presión atmosférica. El área y la velocidad del chorro son $a = 1.0\ pulg^2$ y $V = 15$ pies/s. La masa del sistema de rociado es 0.2 lbm y contiene $\forall = 12\ pulg^3$ de agua. Encuentre la fuerza ejercida por el sistema de rociado sobre la tubería de alimentación.

4.73 La tobera mostrada descarga una capa de agua a través de un arco de 180°. La velocidad del agua es de 15 m/s y el espesor del chorro de 30 mm a una distancia radial de 0.3 m de la línea central de la tubería de alimentación. Encuentre *a*) el flujo volumétrico del agua en la capa del chorro y *b*) la componente *y* de la fuerza requerida para mantener fija la tobera.



P4.73

4.74 Un banco de pruebas típico de motores de reacción se muestra en la figura, junto con algunos datos de una prueba. El combustible entra verticalmente en la parte superior del motor a una proporción igual al 2 por ciento del flujo másico del aire de entrada. En las condiciones dadas, calcule el flujo de aire a través del motor y estime el empuje.



P4.74

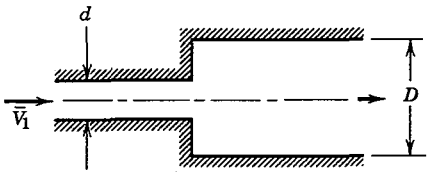
4.75 A empuje nominal, el motor de un cohete de combustible líquido consume 180 lbm/s de ácido nítrico como oxidante y 70 lbm/s de anilina como combustible. El flujo sale axialmente a 6000 pies/s respecto a la tobera y a 16.5 psia. El diámetro de salida de la tobera es $D = 2$ pies. Calcule el empuje producido por el motor sobre el soporte de prueba a la presión estándar del nivel del mar.

4.76 El diseñador de un dispositivo fluídico desea desviar 30° un chorro de aire, con un flujo másico $\dot{m}_1$ y área de sección transversal A_1. El diseñador se propone realizar lo anterior con un chorro de aire más pequeño, de área de sección transversal A_2, orientado perpendicularmente al chorro original. ¿Qué flujo másico, $\dot{m}_2$, se necesita en el chorro más pequeño para efectuar esta tarea? Suponga flujo incompresible de aire estándar y desprecie la gravedad.

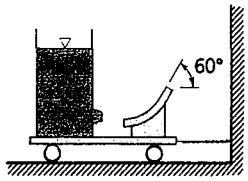
4.77 Considere el flujo que pasa a través de la expansión súbita que se indica. Si el flujo es incompresible y se desprecia la fricción, demuestre que el aumento de presión, $\Delta p = p_2 - p_1$, está dado por

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho \bar{V}_1^2} = 2\left(\frac{d}{D}\right)^2\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$$

Sugerencia: Suponga que la presión sobre la superficie vertical de la expansión es uniforme e igual a p_1.



P4.77

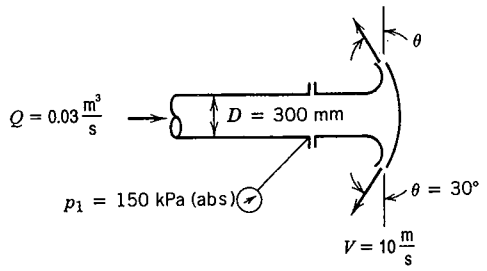


P4.78, 4.79

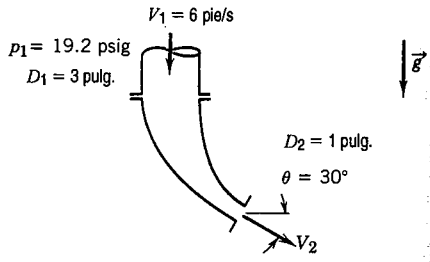
4.78 Un álabe, que desvía el agua 60°, se une al carrito bajo las condiciones del problema 4.57. Determine la tensión en el alambre que mantiene al carrito fijo y la fuerza del álabe sobre él.

4.79 Si el álabe giratorio del problema 4.78 desvía el agua 90°, determine la tensión en el alambre que mantiene al carrito fijo y la fuerza que el álabe ejerce sobre él.

4.80 Un rociador cónico se muestra en la figura. El fluido es agua y la corriente de salida es uniforme. Evalúe *a*) el espesor de la película del rocío a un radio de 400 mm y *b*) la fuerza axial ejercida por el rociador sobre la tubería de alimentación.



P4.80



P4.81

4.81 Se muestra un arreglo de tobera curva que descarga su contenido a la atmósfera. La tobera pesa 10 lbf y su volumen interno es de 150 pulg^3. El fluido es agua. Determine la fuerza de reacción ejercida por la tobera sobre la brida con la tubería de entrada.

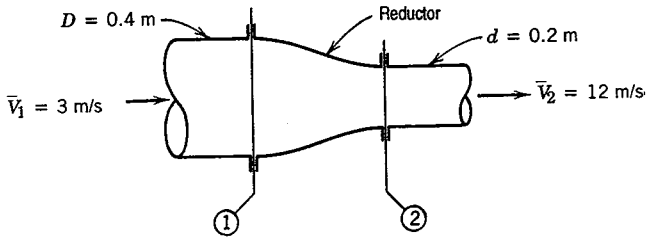
4.82 Se tiene una reducción en el sistema de tubos de la figura. El volumen interno del reductor es 0.2 m^3 y su masa es de 25 kg. Evalúe la fuerza total que deben proporcionar los tubos a la reducción para mantenerla en su lugar. El fluido es gasolina.

4.8

4.84

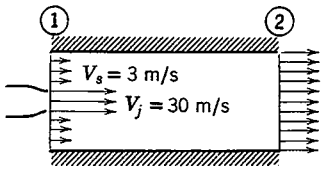
4.85

4.86



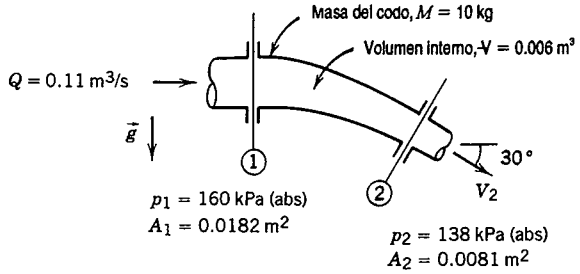
P4.82 $p_1 = 58.7$ kPa (manométrica) $p_2 = 109$ kPa (abs)

4.83 Una bomba de chorro de agua tiene un área y una velocidad de chorro de 0.01 m^2 y 30 m/s, respectivamente. El chorro se encuentra dentro de una corriente secundaria de agua con velocidad $V_s = 3$ m/s. El área total del ducto (la suma de las áreas del chorro y la corriente secundaria) es 0.075 m^2. El agua está completamente mezclada y sale de la bomba de chorro en una corriente uniforme. Las presiones del chorro y de la corriente secundaria son iguales en la entrada de la bomba. Determine la velocidad en la salida de la bomba y el aumento de presión, $p_2 - p_1$.



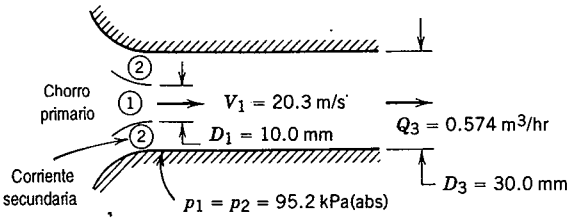
P4.83

4.84 Se muestra un codo reductor de 30°. El fluido es agua. Evalúe las componentes de la fuerza que debe ser suministrada por los tubos adyacentes para evitar que el codo se mueva.



P4.84

4.85 Se muestra una bomba de chorro en operación. El chorro primario es descargado dentro de un compartimiento con diámetro interior constante; el agua sale por la sección (3). Las presiones del chorro y de la corriente secundaria en las secciones (1) y (2) son las mismas. Desprecie la fricción entre el agua y el compartimiento. Calcule la magnitud y dirección del flujo volumétrico en la corriente secundaria para la región anular entre el chorro primario y el compartimiento. Evalúe la presión a la salida de la bomba de chorro.



P4.85

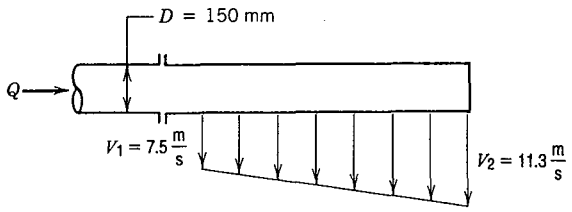
4.86 Considere el flujo, adiabático estacionario, de aire a través de una tubería recta larga con 0.5 pie^2 de área de sección transversal. En la entrada, el aire está a 30 psia, 140 F y tiene una velocidad de 500

pies/s. En la salida, el aire se encuentra a 11.3 psia y tiene una velocidad de 985 pies/s. Calcule la fuerza axial del aire sobre la tubería. (Asegúrese de marcar claramente la dirección.)

4.87 Una caldera monotubo está compuesta por un tramo de tubería de 20 pies de largo y 0.375 pulg de diámetro interior. Entra agua a un flujo de 0.3 lbm/s a 500 psia. Sale vapor a 400 psig con 0.024 slug/pie^3 de densidad. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida por el fluido que circula en el tubo.

4.88 Un gas fluye estacionariamente a través de un tubo poroso calentado cuya área, de sección transversal, es constante y mide 0.2 m^2. En la entrada del tubo, la presión absoluta es 340 kPa, la densidad es 5.1 kg/m^3 y la velocidad media es 152 m/s. El fluido que pasa por la pared porosa sale en una dirección normal al eje del tubo, y el gasto másico total a través de la pared porosa es 29.2 kg/s. En la salida del tubo, la presión absoluta es 280 kPa y la densidad es 2.6 kg/m^3. Determine la fuerza axial del fluido sobre el tubo.

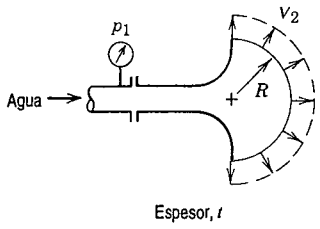
4.89 Se descarga agua a partir de una estrecha ranura en una tubería de 150 mm de diámetro. El chorro bidimensional y horizontal que resulta, tiene 1 m de largo y 15 mm de espesor, pero su velocidad no es uniforme. La presión en la sección de entrada es 30 kPa (manométrica). Calcule *a*) el caudal de volumen en la sección de entrada y *b*) las fuerzas requeridas en la unión para mantener fijo el rociador. Desprecie la masa de la tubería y el agua que contiene.



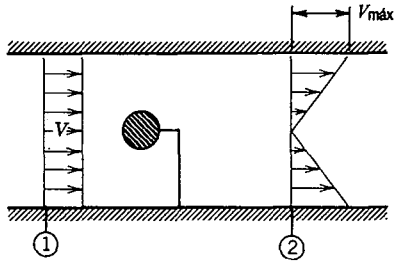
P4.89

4.90 Agua fluye estacionariamente a través del codo plano del problema 4.35. El flujo en la entrada es uniforme y horizontal; el de la salida no es uniforme, es vertical y está a presión atmosférica. La masa de la estructura del canal es $M_c = 2.05$ kg; el volumen interno del canal es $\forall = 0.00355$ m^3. El ancho del canal es constante e igual a $h = 75.5$ mm. Evalúe la fuerza ejercida por el arreglo del canal sobre el ducto de alimentación.

4.91 Una tobera para un sistema de rociador se diseña para producir una película radial plana de agua. La película abandona la tobera a $V_2 = 10$ m/s, abarca un arco de 180° y tiene un espesor de $t = 1.5$ mm. El radio de descarga de la tobera es $R = 50$ mm. La tubería de alimentación del agua tiene un diámetro de 35 mm y la presión de entrada es $p_1 = 150$ kPa (abs). Evalúe la fuerza axial ejercida por la tobera del rociador sobre la brida.



P4.91



P4.92

4.92 Un pequeño objeto redondo se prueba en un túnel de viento de 1 m de diámetro. A través de las secciones (1) y (2), la presión es uniforme. Aguas arriba, la presión es 20 mm de agua (manométrica),

4.9

4.94

4.95

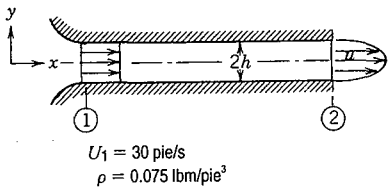
4.96

aguas abajo, 10 mm de agua (manométrica) y la velocidad media del aire es 10 m/s. El perfil de velocidad en la sección ② es lineal; varía desde cero en la línea central del túnel hasta un máximo en la pared del mismo. Calcule *a*) el flujo másico en el túnel de viento, *b*) la velocidad máxima en la sección ② y *c*) el arrastre del objeto y su soporte. Omita la resistencia viscosa en la pared del túnel.

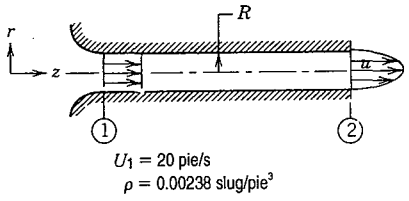
4.93 Un fluido incompresible fluye estacionariamente en la región de entrada de un canal bidimensional de altura $2h$. La velocidad uniforme en la entrada del canal es $U_1 = 20$ pies/s. La distribución de velocidad en una sección aguas abajo es

$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - \left[\frac{y}{h}\right]^2$$

Evalúe la velocidad máxima en la sección aguas abajo. Calcule la caída de presión que existiría en el canal si la fricción viscosa en las paredes pudiera despreciarse.



P4.93



P4.94

4.94 Un fluido incompresible fluye estacionariamente en la región de entrada de un tubo circular de radio R. La velocidad uniforme en la entrada del tubo es $U_1 = 30$ pies/s. La distribución de velocidad en una sección aguas abajo es

$$\frac{u}{u_{máx}} = 1 - \left[\frac{r}{R}\right]^2$$

Evalúe la velocidad máxima en la sección aguas abajo. Calcule la caída de presión que existiría en el tubo si pudiera despreciarse la fricción viscosa en las paredes.

4.95 Un fluido de densidad constante, ρ, entra en una tubería de radio, R, con velocidad uniforme, U. En una sección aguas abajo, la velocidad varía con el radio, r, según la ecuación

$$u = 2U\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Las presiones en las secciones ① (entrada) y ② (aguas abajo) son p_1 y p_2, respectivamente. Demuestre que la fuerza de fricción, F, de las paredes de la tubería sobre el fluido, entre las secciones ① y ②, es

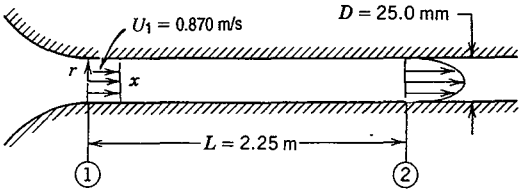
$$F = \pi R^2\left[-(p_1 - p_2) + \tfrac{1}{3}\rho U^2\right]$$

en la dirección opuesta al flujo.

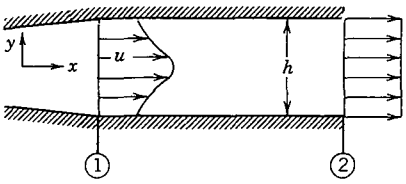
4.96 Entra aire en un ducto, de diámetro $D = 25.0$ mm, a través de una entrada perfectamente redonda, con velocidad uniforme, $U_1 = 0.870$ m/s. En una sección aguas abajo donde $L = 2.25$ m, el perfil de velocidad completamente desarrollado es

$$\frac{u(r)}{U_c} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

La caída de presión en estas secciones es $p_1 - p_2 = 1.92$ N/m^2. Encuentre la fuerza total de fricción ejercida por el tubo sobre el aire.



P4.96



P4.97 $\rho = 0.00238$ slug/pie^3 $U_2 = 20$ pie/s

4.97 Aire fluye estacionariamente a través de un difusor de pared plana y un sistema de ducto. El ancho del canal normal al plano, que se muestra en el diagrama, es b. En la sección (1), el perfil de velocidad es

$$\frac{u}{u_{máx}} = e^{-2\frac{|y|}{h}}$$

La velocidad es uniforme en la sección (2). La presión es uniforme a través de las secciones (1) y (2). Suponga flujo incompresible y desprecie la fricción en las paredes del canal. Calcule *a*) el valor de $u_{máx}$ y *b*) la diferencia de presión, $p_2 - p_1$.

4.98 Aire en condiciones estándar fluye a lo largo de una placa plana. La velocidad de la corriente libre no perturbada es $U_0 = 30$ m/s. En $L = 0.3$ m aguas abajo del borde delantero de la placa, el espesor de la capa límite es $\delta = 1.5$ mm. El perfil de velocidad en esta posición se aproxima como $u/U_0 = y/\delta$. Calcule la componente horizontal de la fuerza por unidad de ancho, requerida para mantener la placa estacionaria.

4.99 Considere el flujo incompresible de fluido en una capa límite como la descrita en el problema ejemplo 4.2. Demuestre que la fuerza de arrastre de fricción del fluido sobre la superficie está determinada por

$$F_f = \int_0^\delta \rho u(U-u)w\,dy$$

Evalúe la fuerza de arrastre para las condiciones del problema ejemplo 4.2.

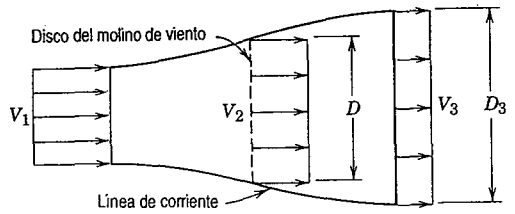
4.100 A lo largo de una placa plana fluye aire en condiciones estándar. La velocidad de corriente libre no perturbada es $U_0 = 10$ m/s. En $L = 145$ mm aguas abajo del borde delantero de la placa, el espesor de la capa límite es $\delta = 2.3$ mm. El perfil de velocidad en esta posición es

$$\frac{u}{U_0} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left[\frac{y}{\delta}\right]^3$$

Calcule la componente horizontal de la fuerza por unidad de ancho, requerida para mantener la placa estacionaria.

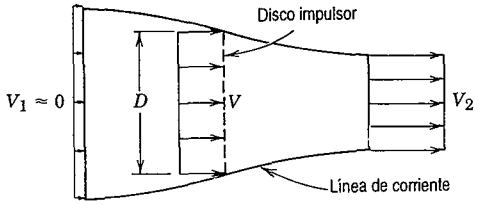
4.101 Considere de nuevo el flujo sobre la placa plana con succión, descrita en el problema 4.49. Para las condiciones dadas, evalúe la fuerza por unidad de ancho, necesaria para mantener estacionaria la placa.

4.102 Se muestra un molino de viento que opera en una corriente de aire uniforme. La teoría del impulsor de Rankine (problema 4.103) predice que la mitad del cambio de velocidad ocurre aguas arriba y la otra mitad, aguas abajo del molino de viento. Analice el flujo para desarrollar expresiones relativas a V_2, V_3, D_3 y para el empuje sobre el molino de viento. Evalúe el empuje sobre el molino de viento si $V_1 = 10$ m/s, $D = 4$ m y el diámetro de la línea de corriente de la presión atmosférica se encuentra a 3 m aguas arriba del molino de viento. Suponga distribuciones de velocidad uniforme y aire estándar.



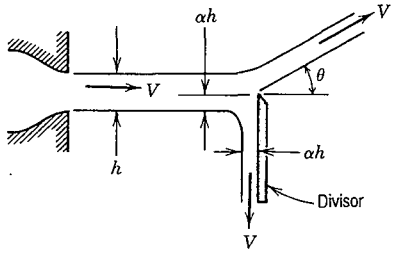
P4.102

4.103 Se muestra un impulsor operando en aire sin corriente. Una teoría, desarrollada y publicada por Rankine en 1885, para flujo uniforme sin pérdidas, predice que la velocidad del aire a través del disco impulsor corresponde a la mitad de la velocidad de la estela que se encuentra detrás del impulsor. La presión en las líneas de corriente que delimitan a la estela es la atmosférica. Desarrolle una expresión para el empuje desarrollado por un impulsor de acuerdo con las condiciones indicadas. Evalúe para aire estándar con $V = 30$ m/s y $D = 3$ m.

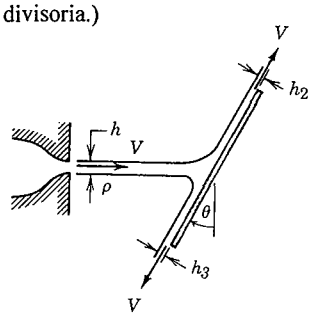


P4.103, 4.114, 4.150

4.104 Una placa divisoria de borde afilado, colocada a cierta distancia dentro de una corriente plana de agua, produce el patrón de flujo que se ilustra. Analice la situación para evaluar θ como función de α, donde $0 \leq \alpha < 0.5$. Evalúe la fuerza necesaria para mantener fija la placa divisoria. (Desprecie cualquier fuerza de fricción entre la corriente de agua y la placa divisoria.)



P4.104



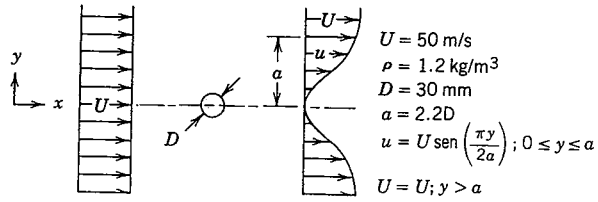
P4.105

‡**4.105** Cuando un chorro plano de líquido incide sobre una placa plana inclinada, éste se divide en dos corrientes de igual velocidad pero de diferente espesor. En flujos sin fricción, puede no haber fuerza

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obeliscos.

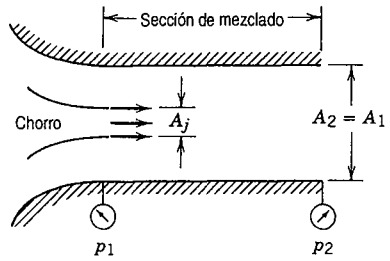
tangencial sobre la superficie de la placa. Recurra a esta suposición con objeto de desarrollar una expresión para h_2/h como una función del ángulo de la placa, θ. Grafique sus resultados y comente acerca de los casos límite, $\theta = 0$ y $\theta = 90°$.

4.106 Se efectúan mediciones experimentales en un chorro de aire de baja velocidad para determinar la fuerza de arrastre sobre un cilindro circular. Las mediciones de velocidad en dos secciones, donde la presión es uniforme e igual, producen los resultados indicados. Evalúe la fuerza de arrastre sobre el cilindro, por unidad de ancho.

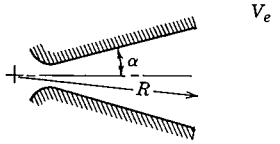


P4.106

‡**4.107** La sección, de área constante, de mezclado de una bomba de chorro se muestra en la figura. El chorro primario está dentro de una corriente secundaria que es uniforme y tiene la misma presión que la salida del chorro. Suponga que las dos corrientes se mezclan completamente y salen en una corriente uniforme. Desarrolle una expresión algebraica para el aumento de presión adimensional, $\Delta p/q = (p_2 - p_1)/\frac{1}{2}\rho \bar{V}_j^2$ términos de la relación de área, $a = A_j/A_2$, y la relación de flujo, $r = Q_2/Q_j$. Dibuje las curvas de $\Delta p/q$ contra r, para $a = 0.05$, 0.1 y 0.2.



P4.107



P4.108

4.108 Los gases que abandonan la tobera de propulsión de un cohete se modelan como si fluyeran radialmente hacia afuera, desde un punto aguas arriba respecto a la garganta de la tobera. Suponga que la velocidad del flujo de salida, V_e, tiene magnitud constante. Desarrolle una expresión para el empuje axial, T_a, desarrollado por el flujo que abandona el plano de salida de la tobera. Compare sus resultados con los de la aproximación unidimensional, $T = \dot{m}V_e$. Evalúe el error porcentual para $\alpha = 15°$.

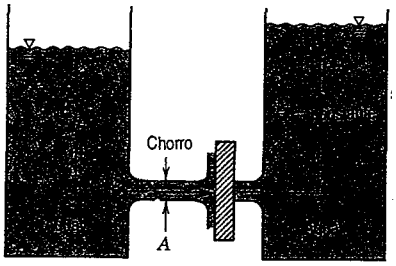
****4.109** Considere un tanque cilíndrico, de área interior A_t y masa M, colocado sobre una balanza. Suponga que el tanque está lleno hasta el nivel h con agua, la cual se extrae desde un orificio bien redondeado, de área A, en el fondo del tanque. (El chorro no golpea la plataforma de la balanza.) Desarrolle una expresión para la reducción porcentual en la lectura de la balanza, debido a la emanación a través del orificio.

****4.110** Dos grandes tanques con agua tienen pequeños orificios de contorno afilado, siendo éstos de igual área. Un chorro de líquido se emite desde el tanque izquierdo. Suponga que el flujo es uniforme y

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obeliscos.

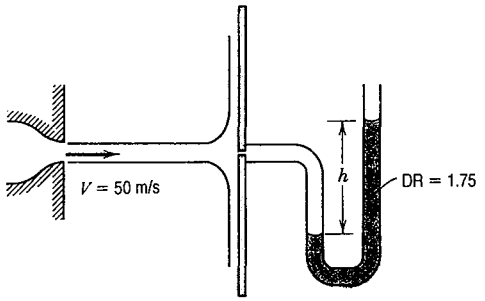
** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

que no es alterado por la fricción. El chorro da con fuerza en la placa plana que cubre la abertura del tanque derecho. Obtenga una expresión para la altura, h, requerida para equilibrar la fuerza hidrostática del agua sobre la placa en el tanque derecho.



P4.110

**4.111 Un chorro axisimétrico y horizontal de aire, con 10 mm de diámetro, incide sobre un disco vertical estacionario de 200 mm de diámetro. La velocidad del chorro es de 50 m/s en la salida de la tobera. Se conecta un manómetro al centro del disco. Calcule *a*) la altura, h, si el líquido del manómetro tiene DR = 1.75 y *b*) la fuerza ejercida por el chorro sobre el disco.



P4.111

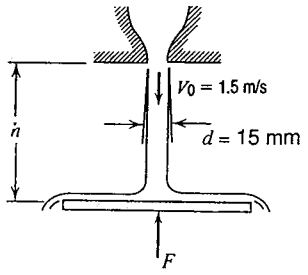
**4.112 Considere un tanque cilíndrico, de área interior A_t y masa M, colocado sobre una superficie plana lisa. Suponga que el tanque está lleno de agua hasta un nivel h. Un pequeño orificio redondeado de área A, se sitúa en la parte lateral cerca del fondo del tanque de modo que pueda descargarse un chorro horizontalmente. Desarrolle una expresión para el coeficiente de fricción que permitiría al tanque deslizar, como resultado del flujo de momento del chorro. Evalúe para $A/A_t = 0.1$. Comente su resultado.

**4.113 Fluye agua, a razón de 0.019 m^3/s, hacia el interior de un tanque cilíndrico alto que tiene un diámetro interior de 1 m. El fondo del tanque tiene un orificio bien redondeado de 55 mm de diámetro. El agua fluye verticalmente desde el orificio debido a la gravedad. Cuando el agua en el tanque alcanza cierto nivel, el flujo saliente iguala al flujo entrante. Despreciando la fricción, calcule el nivel de equilibrio del agua.

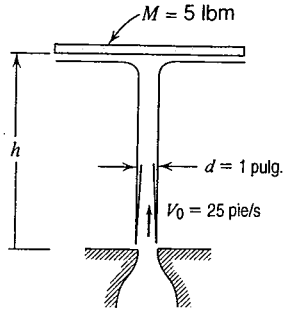
**4.114 Considere de nuevo el enunciado y el diagrama del problema 4.103. Aplique la ecuación de Bernoulli dos veces para obtener expresiones para la presión justo en el frente y justo detrás del disco impulsor. (Advierta que el empuje del impulsor puede escribirse como la diferencia de presión a través del disco por el área del mismo.) Emplee la ecuación de momento relativa a un volumen de control para obtener una expresión del empuje ejercido por el impulsor. Iguale las dos expresiones para el empuje con el fin de mostrar que la mitad del aumento de la velocidad ocurre adelante del impulsor y la otra mitad, atrás del mismo.

** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

**4.115 Un chorro uniforme de agua sale de una tobera de 15 mm de diámetro y fluye directamente hacia abajo. La velocidad del chorro en el plano de salida de la tobera es de 1.5 m/s. El chorro da con fuerza sobre un disco horizontal y fluye radialmente hacia afuera sobre una lámina plana. Obtenga una expresión general para la velocidad que la corriente líquida alcanzaría al nivel del disco. Desarrolle una expresión para la fuerza necesaria para mantener el disco estacionario, despreciando la masa del mismo y de la lámina de agua. Evalúe para $h = 1.5$ m.

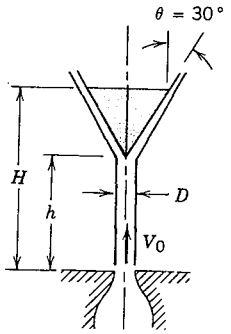


P4.115



P4.116

**4.116 Un disco de 5 lbm está limitado horizontalmente pero tiene libertad para moverse verticalmente. El disco es golpeado desde abajo por un chorro de agua vertical. La velocidad y el diámetro del chorro de agua son 25 pies/s y 1 pulg en la salida de la tobera. Obtenga una expresión general para la velocidad del chorro de agua, como una función de la altura, h. Encuentre la altura a la cual el disco se elevará y permanecerá estacionario.



P4.117

**4.117 Se emplea el agua de un chorro, de diámetro D, para soportar el objeto de forma cónica mostrado. Derive una expresión para la masa *combinada* del cono y el agua, M, que puede ser soportada por el chorro, en términos de parámetros asociados con un volumen de control elegido de manera adecuada. Emplee su expresión para calcular M cuando $V_0 = 10$ m/s, $H = 1$ m, $h = 0.8$ m, $D = 50$ mm y $\theta = 30°$. Estime la masa del agua en el volumen de control.

‡**4.118 El tanque del problema 4.113 está inicialmente vacío. En $t = 0$ se abre el suministro de agua a un flujo constante de 0.019 m^3/s. Desarrolle una ecuación diferencial para la relación de cambio de nivel del agua. Utilice la integración numérica para estimar el tiempo requerido para que el agua en el tanque alcance el 95 por ciento de su nivel de equilibrio.

**4.119 En el antiguo Egipto, algunas veces se empleaban recipientes circulares llenos de agua como burdos relojes. A los recipientes se les daba una forma tal que, a medida que se extraía el agua del fondo, el

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obeliscos.

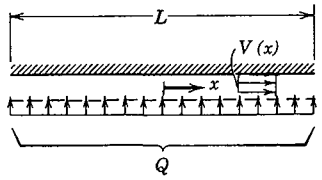
** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

nivel de la superficie descendía a una relación constante, s. Suponga que el agua se saca por un pequeño agujero de área A. Encuentre una expresión para el radio del recipiente, r, como una función del nivel de agua, h. Determine el volumen de agua necesario para que el reloj funcione durante n horas.

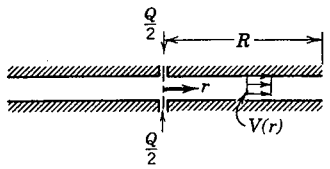
**4.120 Una corriente de líquido incompresible que se mueve a baja velocidad, sale de una tobera orientada directamente hacia abajo. Considere que la velocidad en cualquier sección transversal es uniforme y desprecie los efectos viscosos. La velocidad y el área del chorro en la salida de la tobera son V_0 y A_0, respectivamente. Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento a un volumen de control diferencial de longitud dz, en la dirección del flujo. Deduzca expresiones para las variaciones de la velocidad y el área del chorro como funciones de z. Evalúe la distancia a la cual el área del chorro se reduce a la mitad de su valor original. (Tome el origen de coordenadas en la salida de la tobera.)

**4.121 Una corriente de líquido incompresible que se mueve a baja velocidad, sale de una tobera orientada directamente hacia arriba. Suponga que la velocidad en cualquier sección transversal es uniforme y desprecie los efectos viscosos. La velocidad y el área del chorro en la salida de la tobera son V_0 y A_0, respectivamente. Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento a un volumen de control diferencial de longitud dz, en la dirección del flujo. Deduzca expresiones para las variaciones de la velocidad y el área del chorro como funciones de z. Evalúe la distancia vertical requerida para reducir a cero la velocidad del chorro. (Tome el origen de coordenadas en la salida de la tobera.)

**4.122 Se bombea un fluido incompresible de viscosidad despreciable, con un flujo volumétrica total, Q, a través de una superficie porosa, hacia el interior del pequeño espacio entre placas paralelas separadas a una corta distancia, de la manera que se muestra. El fluido sólo tiene movimiento horizontal en el espacio. Suponga flujo uniforme a través de cualquier sección vertical. Obtenga una expresión para la variación de presión como una función de x. *Sugerencia:* Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento a un volumen de control diferencial de espesor dx, ubicado en la posición x.



P4.122



P4.123

**4.123 Un líquido incompresible de viscosidad despreciable se bombea, con un flujo volumétrico total Q, a través de dos pequeños hoyos, hacia el interior del estrecho espacio entre placas paralelas separadas a una corta distancia, de la manera indicada. El líquido que fluye desde los hoyos sólo tiene movimiento radial. Considere flujo uniforme a través de cualquier sección vertical y descarga a la presión atmosférica en $r = R$. Obtenga una expresión para la variación de presión como una función del radio. *Sugerencia:* Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento a un volumen de control diferencial de espesor dr, localizado en un radio r.

**4.124 A través de un tubo de diámetro constante, fluye establemente un líquido incompresible. El tubo contiene una sección de pared porosa de longitud L. Ahí, el líquido es separado a una relación constante, q, expresada como el flujo volumétrico por unidad de longitud. La velocidad del líquido en el tubo, a la entrada de la sección porosa, es V_0. El líquido separado en la sección porosa no tiene componente axial de velocidad. Evalúe las distribuciones de velocidad y presión para el flujo a través de la sección porosa. Desprecie los efectos viscosos. *Sugerencia:* Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento a un volumen de control diferencial de longitud dx.

** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

**4.125 Un líquido incompresible fluye establemente a través de un tubo de diámetro constante. Éste contiene una sección de pared porosa de longitud L. Ahí se separa el líquido a una relación

$$q(x) = q_{máx}\frac{x}{L}$$

con $q_{máx}$ expresada como el flujo volumétrico por unidad de longitud. La velocidad del líquido en el tubo, a la entrada de la sección porosa, es V_0. El líquido separado en la sección porosa no tiene componente axial de velocidad. Evalúe las distribuciones de velocidad y presión para el flujo a través de la sección porosa. Desprecie los efectos viscosos. *Sugerencia:* Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento a un volumen de control diferencial de longitud dx.

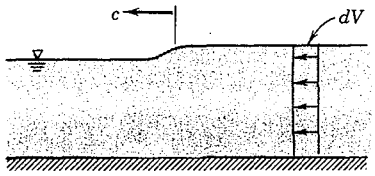
**4.126 Un líquido incompresible fluye establemente a través de un tubo de diámetro constante. Éste contiene una sección de pared porosa de longitud L, donde se suministra líquido a una relación constante q, expresada como el flujo volumétrico por unidad de longitud. La velocidad del líquido en el tubo, a la entrada de la sección porosa, es V_0. El líquido suministrado en la sección porosa no tiene componente axial de velocidad. Evalúe las distribuciones de velocidad y presión para el flujo a través de la sección porosa. Desprecie los efectos viscosos. *Sugerencia:* Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento a un volumen de control diferencial de longitud dx.

**4.127 Un líquido incompresible fluye estacionariamente a través de un tubo de diámetro constante. Éste contiene una sección de pared porosa de longitud L, donde se suministra líquido a la relación

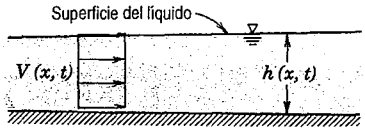
$$q(x) = q_{máx}\frac{x}{L}$$

con $q_{máx}$ expresada como el flujo volumétrico por unidad de longitud. La velocidad del líquido en el tubo, a la entrada de la sección porosa, es V_0. El líquido suministrado en la sección porosa no tiene componente axial de velocidad. Evalúe las distribuciones de velocidad y presión para el flujo a través de la sección porosa. Desprecie los efectos viscosos. *Sugerencia:* Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento a un volumen de control diferencial de longitud dx.

**4.128 La propagación de pequeñas ondas sobre la superficie libre de un líquido puede analizarse empleando un volumen de control diferencial. Considere una pequeña onda aislada que se mueve con velocidad c, de derecha a izquierda. Suponga un pequeño cambio en la elevación de la superficie del agua a través de la onda. Para hacer que el flujo parezca estacionario, elija un volumen de control diferencial que encierre a la onda y se mueva con ella. Aplique la conservación de la masa y la ecuación de momento con el fin de derivar una expresión para la velocidad de la onda. Cerciórese de incluir en su análisis las fuerzas de la presión hidrostática sobre la superficie de control. Desprecie la fricción en el lecho del canal.



P4.128



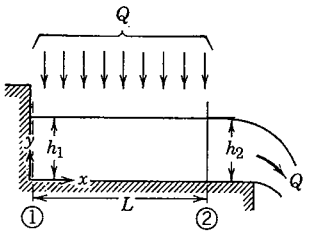
P4.129

**4.129 Considere el flujo unidimensional no estacionario de un líquido incompresible en un canal horizontal abierto. La elevación de la superficie libre no es constante, pero la distribución de velocidad en cualquier sección es uniforme. La profundidad, h, y la velocidad media, V, son funciones tanto de x como de t. Suponga que el ancho del canal, b, es grande. Deduzca formas apropiadas de la

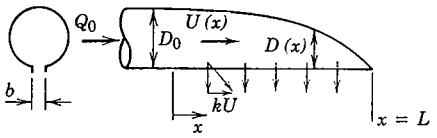
** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

conservación de la masa y de la ecuación de momento lineal para este flujo. *Sugerencia:* Utilice un volumen de control diferencial de longitud dx, en la dirección del flujo. Cerciórese de incluir los efectos de las fuerzas de presión hidrostáticas y la fricción en el lecho del canal.

**4.130 Hacia el interior de un canal abierto corto, de forma rectangular y horizontal, cuyo ancho es b, cae líquido verticalmente. El flujo total de volumen, Q, se distribuye uniformemente por el área bL. Desprecie los efectos viscosos. Obtenga una expresión para h_1 en términos de h_2, Q y b. *Sugerencia:* Elija un volumen de control con frontera exterior localizada en $x = L$. Dibuje el perfil de la superficie, $h(x)$. *Sugerencia:* Use un volumen de control diferencial de ancho dx.



P4.130



P4.131

**4.131 Como parte de un proceso industrial, una tubería se adapta con una pequeña ranura a lo largo de su longitud y se deja que el líquido salga en una lámina continua. La tubería se hace cónica por lo que la presión y la velocidad de flujo vertical son constantes a lo largo de su longitud. La componente de velocidad horizontal del fluido que sale de la tubería, es una fracción constante, k, de la velocidad promedio local en la tubería. Desprecie los efectos de fricción y de gravedad, como una primera aproximación. Demuestre que k debe ser igual a 1.0 y que la velocidad dentro de la tubería debe ser constante. Obtenga una expresión para la variación requerida del diámetro, $D(x)$. *Sugerencia:* Advierta que la energía mecánica se conserva a lo largo de una línea de corriente.

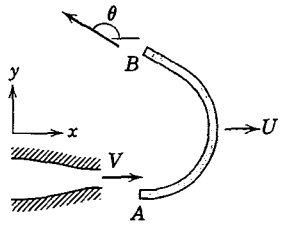
**4.132 El pequeño espacio entre dos largas y estrechas placas paralelas, se llena inicialmente con líquido incompresible. En $t = 0$, la placa superior empieza a descender en dirección a la placa inferior con velocidad constante, V_0, provocando que el líquido salga con dificultad del pequeño espacio. Despreciando los efectos viscosos y suponiendo flujo uniforme en la dirección horizontal, desarrolle una expresión para el campo de velocidad entre las placas paralelas. *Sugerencia:* Aplique la conservación de la masa a un volumen de control con superficie exterior localizada en la posición x. Advierta que aun cuando la velocidad de la placa superior es constante, el flujo es no estacioanrio.

**4.133 El estrecho espacio entre dos placas circulares se llena inicialmente con un líquido incompresible. En $t = 0$, la placa superior empieza a moverse hacia abajo en dirección a la placa inferior con velocidad constante, V_0, provocando que el líquido salga con dificultad del estrecho espacio. Despreciando los efectos viscosos y suponiendo flujo uniforme en la dirección radial, desarrolle una expresión para el campo de velocidad entre las placas paralelas. *Sugerencia:* Aplique la conservación de la masa a un volumen de control con superficie exterior localizada en un radio r. Note que aun cuando la velocidad de la placa superior es constante, el flujo es no estacionario.

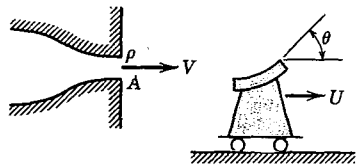
4.134 Un chorro de agua se dirige contra un álabe, que podría ser un aspa de una turbina o de cualquier otra pieza de maquinaria hidráulica. El agua sale de la tobera fija, de 50 mm de diámetro, con una velocidad de 20 m/s y llega al álabe en forma tangencial a la superficie en A. La superficie interior del álabe en B, forma un ángulo $\theta = 150°$ con respecto a la dirección x. Calcule la fuerza que debe aplicarse para mantener la velocidad del álabe constante en $U = 5$ m/s.

4.135 Sobre un álabe móvil con ángulo de desvío de 120°, incide un chorro de agua proveniente de una tobera fija. El álabe se aleja de la tobera con velocidad constante, $U = 30$ pies/s, y recibe al chorro que abandona la tobera a una velocidad de $V = 100$ pies/s. La tobera tiene un área de salida de 0.04 pies^2. Encuentre la fuerza que debe aplicarse para mantener constante la velocidad del álabe.

** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.



P4.134

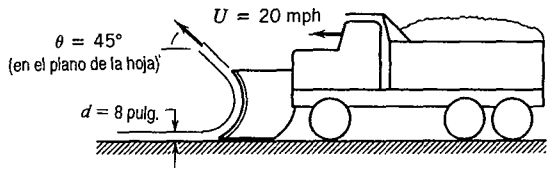


P4.135, 4.136, 4.137, 4.144, 4.157, 4.188, 4.189

4.136 Un chorro de agua, emitido desde una tobera fija, choca contra un álabe curvo, a un ángulo de 90°, que se está alejando de la tobera a una velocidad constante de 15 m/s. El chorro tiene un área de sección transversal de 600 mm^2 y una velocidad de 30 m/s. Determine la fuerza que debe aplicarse para mantener constante la velocidad del álabe.

4.137 Un chorro de aceite (DR = 0.8) golpea una aspa curva que desvía el fluido un ángulo de 180°. El área del chorro es 1200 mm^2 y su velocidad relativa a la tobera fija es de 20 m/s. El aspa se mueve hacia la tobera a 10 m/s. Determine la fuerza que debe aplicarse para mantener constante la velocidad del aspa.

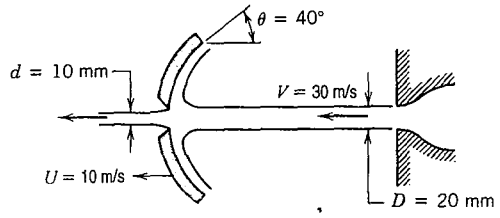
4.138 Un recogedor de nieve montado sobre un camión limpia un tramo de 12 pies de ancho de agua-nieve. El agua-nieve tiene una profundidad de 8 pulg y densidad de 10 lbm/pie^3. El camión se desplaza a 20 mph. La nieve se descarga del recogedor a un ángulo de 45° respecto a la dirección de movimiento y a 45° sobre la horizontal. Evalúe la fuerza requerida para empujar el recogedor.



P4.138

4.139 Un bote impulsado mediante el empuje de un chorro de agua alcanza una velocidad de 30 mph. Las pruebas de remolque han mostrado que se requieren 200 lbf para mover el bote a esta velocidad. Suponga que el agua para el sistema de bombeo se alimenta en la entrada a una velocidad (relativa al bote) igual a la del bote, y que las presiones de entrada y salida son iguales a las del agua no perturbada en el mismo nivel. El caudal de la bomba es 900 gpm. Determine la velocidad de salida del chorro (relativa al bote) necesaria para alcanzar la velocidad deseada del bote.

4.140 El plato circular, cuya sección transversal se muestra, tiene un diámetro exterior de 0.20 m. Un chorro de agua con velocidad de 30 m/s golpea el plato concéntricamente, haciéndolo mover hacia la izquierda a 10 m/s. El diámetro del chorro es 20 mm. El plato tiene un hoyo en su centro que deja atravesar sin resistencia una corriente de agua de 10 mm de diámetro. El resto del chorro se desvía y fluye a lo largo del plato. Calcule la fuerza requerida para mantener el plato en movimiento.



P4.140

4.141 La aeronave anfibio, Canadair CL-215T, se diseñó especialmente para combatir incendios. Es el único avión de producción que puede recoger agua —1620 galones en 12 segundos— de cualquier

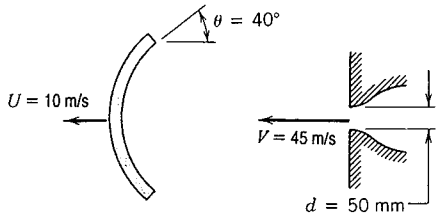
lago, río u océano. Determine el empuje adicional requerido durante la recolección del agua, como una función de la velocidad del avión, para un rango razonable de velocidades.

4.142 A principios de este siglo, se construyeron canales llamados "canaleta de vía" entre los rieles, para permitir a las locomotoras recoger agua en sus servidores sin detenerse. Cada servidor equipado con recogedor podía recolectar 2.5 galones de agua por pie de distancia de recolección, mientras viajaba a 50 mph. Estime la fuerza adicional del travesaño posterior que se requiere para jalar un servidor, a una velocidad constante, mientras se recoge el agua.

4.143 La policía intenta controlar a manifestantes empleando un "cañón de agua" montado sobre un camión móvil. El cañón dispara una corriente estacionaria de agua, con diámetro $D = 25$ mm y velocidad $V = 10$ m/s (relativa al cañón). El vehículo se mueve a una velocidad de $U = 3$ m/s *hacia* los manifestantes. Calcule la fuerza máxima que podría ejercer la corriente de agua sobre un manifestante. Describa la manera en la cual la fuerza variaría si la corriente fuera a incidir con un ángulo diferente de la perpendicular.

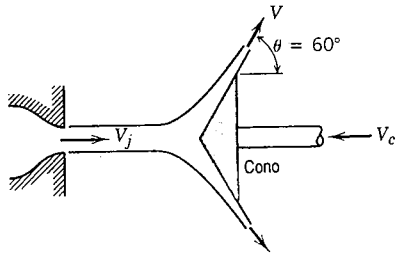
4.144 Considere un álabe, con ángulo de desvío θ, que se mueve horizontalmente a velocidad constante, U, bajo la influencia de un chorro incidente como el del problema 4.135. La velocidad absoluta del chorro es V. Obtenga expresiones generales para la fuerza resultante y la potencia que podría producir el álabe. Muestre que la potencia se maximiza cuando $U = V/3$.

4.145 El plato circular, cuya sección transversal se muestra, tiene un diámetro exterior de 0.15 m. Un chorro de agua golpea el plato concéntricamente y luego fluye hacia afuera a lo largo de la superficie del mismo. La velocidad del chorro es de 45 m/s y el plato se mueve a la izquierda a 10 m/s. Encuentre el espesor de la lámina del chorro a un radio de 75 mm desde el eje del chorro. ¿Qué fuerza horizontal sobre el plato se requiere para mantenerlo en movimiento?



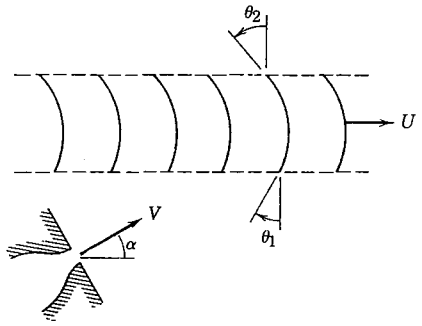
P4.145

4.146 Por medio de un cono que se mueve hacia la izquierda a 15 m/s, se desvía agua, en un chorro de 100 mm de diámetro con velocidad de 30 m/s, hacia la derecha. Determine *a*) el espesor de la lámina del chorro a un radio de 200 mm y *b*) la fuerza horizontal externa necesaria para mover el cono.



P4.146

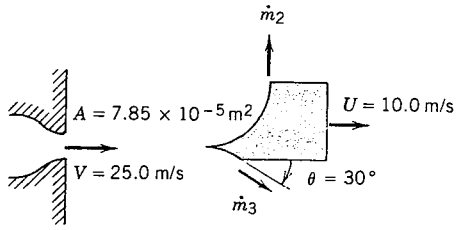
4.147 Considere una serie de álabes giratorios sobre los que incide un chorro continuo de agua que sale de una tobera de 50 mm de diámetro, a velocidad constante, $V = 86.6$ m/s. Los álabes se mueven con velocidad constante, $U = 50$ m/s. Note que todo el flujo másico que sale del chorro cruza los álabes. La curvatura de los mismos se describe mediante los ángulos $\theta_1 = 30°$ y $\theta_2 = 45°$, como se muestra. Evalúe el ángulo de la tobera, α, requerido para asegurar que el chorro entre de manera tangente al borde delantero de cada álabe. Calcule la fuerza que debe aplicarse para mantener constante la velocidad del álabe.



P4.147, 4.148

4.148 Considere el sistema móvil de álabes descrito en el problema 4.147. Suponiendo que puede encontrarse una manera de reducir α casi hasta cero (y en consecuencia, θ_1 cercano a 90°), evalúe la velocidad del álabe, U, que resultaría en una salida de potencia máxima del sistema de álabes móviles.

4.149 Un chorro plano de agua incide sobre un álabe divisor y se parte en dos corrientes planas en la forma en que se indica. Encuentre la relación del flujo másico, $\dot{m}_2/\dot{m}_3$, requerida para producir una fuerza vertical neta igual a cero sobre el álabe divisor. Obtenga la fuerza horizontal que debe aplicarse bajo estas condiciones, para mantener el movimiento del álabe a una velocidad uniforme.



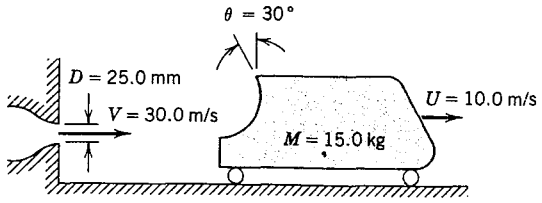
P4.149

****4.150** Considere aquí el enunciado y el diagrama del problema 4.114. Resuélvalo para el caso en el cual el impulsor avanza con velocidad V_1 en un fluido estacionario.

****4.151** El impulsor de un bote de aire, utilizado en Florida Everglades, mueve aire a razón de 40 kg/s. Cuando está en reposo, la velocidad de la estela detrás del impulsor es de 40 m/s, en una posición donde la presión es la atmosférica. Calcule *a*) el diámetro del impulsor, *b*) el empuje producido en el reposo y *c*) el empuje producido cuando el bote de aire se está moviendo hacia adelante a 10 m/s, si el flujo másico a través del impulsor permanece constante.

4.152 Un chorro de solución de lejía (DR = 1.10) de 50 mm de diámetro tiene una velocidad absoluta de 15 m/s e incide sobre una placa plana simple que se mueve alejándose de la tobera con una velocidad absoluta de 5 m/s. La placa forma un ángulo de 60° con la horizontal. Calcule la fuerza del chorro sobre la placa. Asuma que no hay fricción a lo largo de la superficie de la placa.

4.153 Un chorro estable de agua se usa para impulsar un pequeño carro a lo largo de una pista horizontal, en la forma que se muestra. La resistencia total del carro al movimiento está dada por $F_D = kU^2$, donde $k = 0.92$ N · s^2/m^2. Evalúe la aceleración del carro en el instante en el que su velocidad es $U = 10$ m/s.

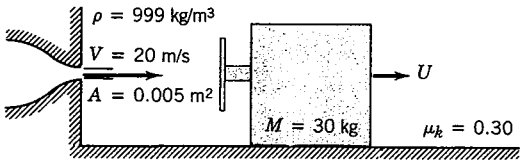


P4.153

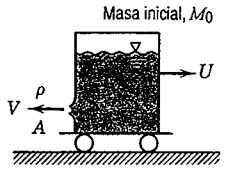
** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

4.154 Un vehículo se mueve a una velocidad de 50 pies/s a lo largo de un piso nivelado, bajo la acción de una fuerza constante, $F = 100$ lbf. En $t = 0$, empieza a salir masa del vehículo a través de un hoyo en su fondo. Suponiendo que la masa sale del vehículo verticalmente, a un flujo de 10 lbm/s, y el vehículo se sigue moviendo bajo la acción de la fuerza constante, determine su velocidad después de 20 s. La masa inicial del vehículo es 2000 lbm.

4.155 Un arreglo de álabe-deslizador se mueve bajo la influencia de un chorro de líquido como se muestra. El coeficiente de fricción cinética para el movimiento del deslizador a lo largo de la superficie, es $\mu_k = 0.30$. Calcule *a*) la aceleración del deslizador en el instante en el que $U = 10$ m/s y *b*) la velocidad terminal del deslizador.



P4.155, 4.166, 4.167

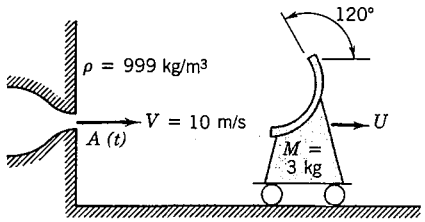


P4.156, 4.194

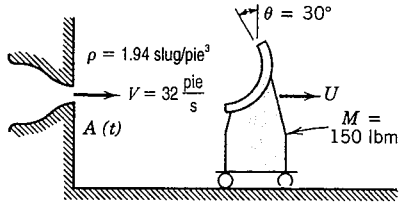
4.156 Un carro es impulsado por medio de un chorro de líquido emitido horizontalmente desde un tanque, como se indica. La pista es horizontal; la resistencia al movimiento puede despreciarse. El tanque está presurizado por lo que la velocidad del chorro puede considerarse constante. Obtenga una expresión general para la velocidad del carro conforme se acelera a partir del reposo.

4.157 La aceleración del arreglo álabe/carro del problema 4.135 va a ser controlada conforme aumenta desde el reposo, cambiando el ángulo del álabe, θ. Se desea una aceleración constante, $a = 1.5$ m/s^2. El chorro de agua sale de la tobera de área $A = 0.025$ m^2, con velocidad $V = 15$ m/s. El arreglo álabe/carro tiene una masa de 55 kg; desprecie la fricción. Determine θ en $t = 5$ s.

4.158 El carro que se muestra rueda con una resistencia despreciable. Se va a acelerar hacia la derecha a una *relación constante* de 2 m/s^2. Esto se logrará "*programando*" el área del chorro de agua, $A(t)$, que alcanza al carro. La velocidad del chorro permanece constante en 10 m/s. Obtenga una expresión para la $A(t)$ requerida para producir el movimiento. Dibuje la variación del área para $t \leq 4$ s. Evalúe el área del chorro en $t = 2$ s.



P4.158



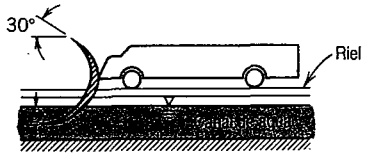
P4.159, 4.187

4.159 Un pequeño carro con álabe, de masa $M = 150$ lbm, va a ser acelerado por un chorro de agua, cuya velocidad es constante, $V = 32$ pies/s, pero su área se controla para variar el flujo másico. El carro iniciará su recorrido desde el reposo en $t = 0$ y se someterá a una *aceleración constante* de 4 pies/s^2 hasta alcanzar $U = 16$ pies/s, la que permanecerá constante. Omita la resistencia al movimiento. Obtenga una expresión general para el área de la sección transversal del chorro, $A(t)$, que debe alcanzar el carro durante la aceleración. Evalúe el área del chorro que se requiere en el instante en el que el carro empieza a moverse. Determine el tiempo al cual el flujo del chorro, desde la tobera, debe ser interrumpido.

4.160 Un trineo de reacción, que pesa 10 000 lbf y viaja a 600 mph, se va a frenar sumergiendo un recogedor en un canal de agua. El recogedor tiene 6 pulg de ancho. Determine el tiempo requerido (después de

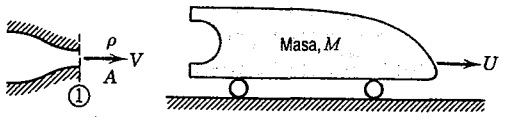
sumergir el recogedor a una profundidad de 3 pulg en el agua) para llevar el trineo hasta una velocidad de 20 mph. (Vea el diagrama siguiente.)

4.161 Un trineo de reacción se va a frenar a partir de una velocidad inicial de 300 m/s sumergiendo un recogedor en un canal de agua. El recogedor tiene 0.3 m de ancho y desvía el agua un ángulo de 150°. El canal tiene un largo de 800 m. La masa del trineo es 8000 kg. A la velocidad inicial, el trineo experimenta una fuerza de arrastre aerodinámica de 90 kN, la que es proporcional al cuadrado de la velocidad del trineo. Si se desea reducir se velocidad a 100 m/s, determine la profundidad a la cual el recogedor debe sumergirse en el agua.



P4.160, 4.161

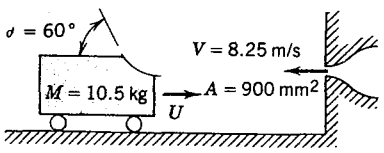
4.162 Partiendo del reposo, el carro que se muestra se impulsa mediante una catapulta hidráulica (chorro de líquido). El chorro incide sobre la superficie curva y se desvía 180°, que se despide horizontalmente. Pueden omitirse la resistencia del aire y la de rodamiento. Si la masa del carro es 100 kg y el chorro de agua abandona la tobera (área de 0.001 m^2) con una velocidad de 30 m/s, determine la velocidad del carro 5 s después de que el chorro se dirige contra el mismo.



P4.162, 4.163, 4.190

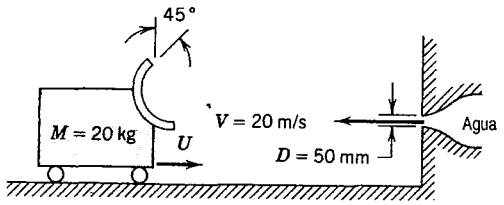
4.163 Considere el chorro y el carro del problema 4.162, pero incluya una fuerza de arrastre aerodinámico proporcional al cuadrado de la velocidad del carro, $F_D = kU^2$, con $k = 2.0\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$. Deduzca una expresión para la aceleración del carro como una función de su velocidad y de los demás parámetros dados. Evalúe la aceleración del carro en $U = 10$ m/s. ¿A qué fracción corresponde esta velocidad de la velocidad terminal del carro?

4.164 Un pequeño carro que lleva un álabe de desvío simple rueda sobre una pista nivelada. La masa del carro es $M = 10.5$ kg y su velocidad inicial es $U_0 = 12.5$ m/s. En $t = 0$, el álabe es golpeado por un chorro de agua opuesto, como se muestra. Desprecie todas las fuerzas externas debidas a la resistencia del aire o al rodamiento. Determine el tiempo y la distancia necesarios para que el chorro de líquido lleve al carro al reposo.



P4.164

4.165 Un arreglo de un álabe curvo y un carro se mueve horizontalmente hacia un chorro de agua, en las condiciones indicadas. La masa del arreglo es $M = 20$ kg y su velocidad inicial, $U_0 = 5.75$ m/s. Desprecie la resistencia al rodamiento y el arrastre aerodinámico. Evalúe el tiempo y la distancia necesarios para que el arreglo se detenga.

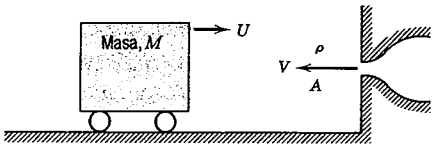


P4.165

4.166 Resuelva el problema 4.155, si el álabe y el deslizador se mueven sobre una película de aceite en vez de deslizar en contacto con la superficie. Suponga que la resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad, $F_R = kU$, con $k = 7.5$ N · s/m.

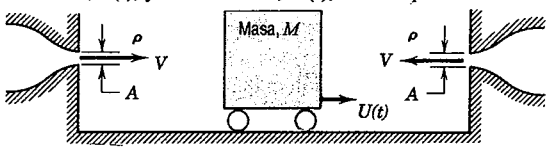
4.167 Considere el enunciado y el diagrama del problema 4.155. Obtenga expresiones generales para la aceleración y la velocidad del deslizador como funciones del tiempo. Evalúe la velocidad terminal para las condiciones dadas en el problema 4.155.

4.168 Un bloque rectangular de masa M, con caras verticales, rueda sin resistencia a lo largo de un plano horizontal liso, como se muestra. El bloque viaja inicialmente a la velocidad U_0. En $t = 0$, un chorro de líquido incide sobre el bloque haciendo que su velocidad empiece a disminuir. Obtenga una expresión algebraica para la aceleración del bloque correspondiente a $t > 0$. Resuelva la ecuación para determinar el tiempo en el cual $U = 0$.



P4.168

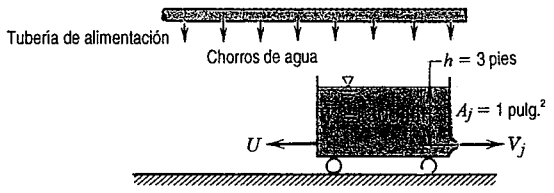
4.169 Un bloque rectangular de masa M, con caras verticales, rueda sobre una superficie horizontal entre dos chorros opuestos, como se muestra. En $t = 0$, el bloque se pone en movimiento a una velocidad U_0. Subsecuentemente, se mueve sin fricción, paralelo a los ejes del chorro, con velocidad $U(t)$. Desprecie la masa de cualquier líquido que se adhiera al bloque, comparada con M. Obtenga expresiones generales para la aceleración, $a(t)$, y la velocidad, $U(t)$, del bloque.



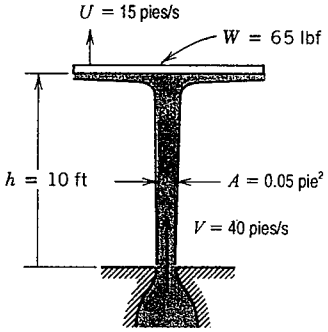
P4.169, 4.170

4.170 Considere el enunciado y el diagrama del problema 4.169. Suponga que en $t = 0$, cuando el bloque está en $x = 0$, éste se pone en movimiento a una velocidad $U_0 = 10$ m/s, hacia la derecha. Calcule el tiempo requerido para reducir la velocidad del bloque a $U = 0.5$ m/s y la posición del bloque en ese instante.

****4.171** El carro que se muestra se alimenta con el agua de las toberas que están sobre él. Los caudales de flujo se ajustan para mantener el nivel de agua en el carro a una altura $h = 3$ pies. El agua de cada chorro cae directamente hacia abajo. El peso del tanque y el agua es de 300 lbf. Calcule la velocidad máxima, U, que será alcanzada por el carro si rueda sin fricción sobre una superficie nivelada. Encuentre el tiempo requerido para alcanzar el 90 por ciento de la velocidad terminal.



P4.171



P4.172

** Este problema se aplica a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

**4.172 Un chorro vertical de agua incide sobre un disco horizontal como se muestra. El arreglo del disco pesa 65 lbf. Cuando éste se encuentra a 10 pies por encima de la salida de la tobera, empieza a ascender a $U = 15$ pies/s. Calcule la aceleración vertical del disco en este instante.

4.173 Un recipiente rueda con fricción despreciable a lo largo de una superficie horizontal. Una cuerda de sujeción aplica una fuerza retardadora constante, F_R, al recipiente. La masa y la velocidad iniciales del recipiente son M_0 y U_0. La masa sale verticalmente a una relación constante $\dot{m}$. Obtenga expresiones algebraicas para la aceleración, velocidad y posición del recipiente, como funciones del tiempo.

4.174 Un recipiente abierto rueda con fricción despreciable a lo largo de una superficie lisa horizontal. Su masa y velocidad iniciales son M_0 y U_0. En $t = 0$, empieza a entrar agua al recipiente a partir de toberas colocadas encima y que apuntan directamente hacia abajo. El agua entra con un flujo másico constante, $\dot{m}$. Una cuerda de sujeción aplica una fuerza retardadora constante, F_R. Obtenga expresiones algebraicas para la velocidad y el desplazamiento del recipiente como funciones del tiempo.

4.175 Una cápsula espacial tripulada vuela uniformemente sobre la atmósfera de la Tierra a una velocidad inicial $U_0 = 8.05$ km/s. La velocidad de la cápsula va a ser reducida a $U = 5.00$ km/s por medio de un retrocohete en preparación para una maniobra de reingreso. La masa inicial de la cápsula es $M_0 = 1600$ kg. El cohete consume combustible a $\dot{m} = 8.0$ kg/s y expulsa gases que salen a $V_e = 2940$ m/s en relación con la cápsula. Evalúe la duración del encendido del retrocohete, necesario para lograr lo anterior.

4.176 Un trineo de reacción se acelera desde el reposo en una pista nivelada, siendo la resistencia del aire y al rodamiento despreciables. La masa inicial del trineo es $M_0 = 600$ kg. El cohete contiene inicialmente 150 kg de combustible. El motor del cohete quema combustible a un flujo constante $\dot{m} = 15$ kg/s. Los gases de escape salen de la tobera del cohete uniforme y axialmente a $V_e = 2900$ m/s en relación con la tobera. Encuentre la velocidad máxima alcanzada por el trineo y calcule su aceleración máxima durante el recorrido.

4.177 Un trineo de reacción con masa inicial de 3 ton métricas, que incluyen 1 ton de combustible, descansa sobre una sección nivelada de una pista. En $t = 0$, el combustible sólido del cohete se enciende y éste empieza a quemar combustible a razón de 75 kg/s. La velocidad de salida del gas de escape, relativa al cohete, es 2500 m/s. Despreciando la fricción y la resistencia del aire, calcule la aceleración y la velocidad del trineo en $t = 10$ s.

4.178 Un trineo de reacción, con masa inicial de 2000 lbm, se va a acelerar sobre una pista nivelada. El motor de reacción quema combustible a un gasto constante $\dot{m} = 30$ lbm/s. El flujo de escape de reacción es uniforme y axial. Los gases abandonan la tobera a 9000 pies/s respecto de la misma. Determine la masa mínima del combustible del motor, necesaria para impulsar el trineo a una velocidad de 600 mph antes de que se agote el combustible. Como una primera aproximación, omita las fuerzas de resistencia.

4.179 Un trineo de reacción tiene una masa inicial de 4 ton métricas, incluyendo 1 ton de combustible. La resistencia al movimiento en la pista, sobre la cual se desplaza el trineo, y la del aire corresponden a kU, donde k es 75 N · s/m, y U es la velocidad del trineo en m/s. La velocidad de salida del gas de escape, relativa al trineo, es 1500 m/s y éste quema combustible a una proporción de 90 kg/s. Calcule la velocidad del trineo después de 10 s.

4.180 Un motor de reacción se emplea para acelerar un proyectil hasta una velocidad de 1.8 km/s en un vuelo horizontal. La corriente de salida abandona la tobera axialmente a presión atmosférica con una velocidad de 3000 m/s relativa al motor, el cual se enciende al soltarse el proyectil desde un avión que vuela horizontalmente a $U_0 = 300$ m/s. Despreciando la resistencia del aire, obtenga una expresión algebraica para la velocidad alcanzada por el proyectil en este vuelo uniforme. Determine la fracción mínima de la masa inicial del proyectil que debe consumirse para lograr la aceleración deseada.

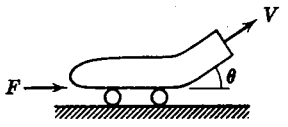
** Este problema se aplica a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

4.181 Un gran cohete de líquido de dos etapas, con masa de 30 000 kg, se va a lanzar desde una plataforma de despegue al nivel del mar. El motor principal consume hidrógeno y oxígeno líquidos en una mezcla estequiométrica a 2450 kg/s. La tobera de empuje tiene un diámetro de salida de 2.6 m. Los gases de escape salen de la tobera a 2270 m/s y a una presión en el plano de salida de 66 kPa absoluta. Calcule la aceleración del cohete en el despegue y obtenga una expresión para la velocidad como una función del tiempo, despreciando la resistencia del aire.

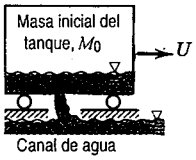
4.182 Omitiendo la resistencia del aire, ¿qué velocidad alcanzaría en 10 s un cohete dirigido verticalmente si parte desde el reposo, su masa inicial es de 200 kg, quema 10 kg/s y expulsa gas a la presión atmosférica a una velocidad de 2900 m/s relativa al cohete?

4.183 Un cohete de propulsor sólido, "hecho en casa", tiene una masa inicial de 20 lbm; de éstas 15 lbm son de combustible. El cohete se dirige verticalmente hacia arriba desde el reposo, quema combustible a un flujo constante de 0.5 lbm/s y expulsa gas de escape a una velocidad de 6500 pies/s relativa al cohete. Suponga que la presión a la salida es la atmosférica y que la resistencia del aire puede despreciarse. Calcule la velocidad del cohete después de 20 s y la distancia que recorre en el mismo tiempo.

4.184 Un carro de cohete que se encuentra inicialmente en reposo y pesa 1610 lbf se va a encender y va a tener una aceleración constante de 20 pies/s^2. Para lograr esto, los gases de escape se desviarán un ángulo θ, el cual varía como una función del tiempo. Esto responde a la fuerza friccionante que es proporcional al cuadrado de la velocidad, $F = 0.002U^2$, donde F está en lbf y U, en pies/s. El cohete expulsa los gases con un gasto de 1 slug/s a velocidad constante, $V_e = 7500$ pies/s, relativa al vehículo. Encuentre una expresión para $\cos\theta$ como una función del tiempo, t. Determine el valor de t en el cual $\cos\theta$ es un mínimo, y encuentre $\theta_{máx}$.



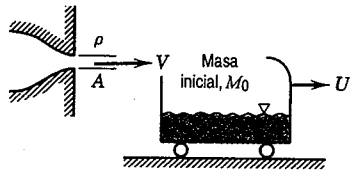
P4.184



P4.185

4.185 El tanque móvil que se muestra se va a frenar sumergiendo un recogedor para recolectar agua de un canal. La masa inicial y la velocidad del carro y su contenido son M_0 y U_0, respectivamente. Desprecie las fuerzas externas debidas a la presión o a la fricción y suponga que la pista es horizontal. Aplique las ecuaciones de continuidad y de momento para demostrar que en cualquier instante, $U = U_0M_0/M$. Obtenga una expresión general para U/U_0 como una función del tiempo.

4.186 El tanque que se muestra rueda a lo largo de una pista nivelada. El agua recibida de un chorro es retenida en el tanque, el cual se va a acelerar, desde el reposo, hacia la derecha con aceleración *constante*, a. Omita la resistencia del viento y al rodamiento. Encuentre una expresión algebraica para la fuerza (como una función del tiempo) requerida para mantener la aceleración constante, a, del tanque.



P4.186, 4.191

4.187 Considere de nuevo el enunciado y el diagrama del problema 4.159. Determine la variación del área de la sección transversal *en la tobera*, $A_n(t)$, requerida para acelerar el carro. Especifique el tiempo en el cual el flujo proveniente de la tobera debe cortarse.

‡**4.188** El arreglo de álabe/carro de masa $M = 30$ kg, mostrado en el problema 4.135, es accionado mediante un chorro de agua. Ésta sale de una boquilla estacionaria de área $A = 0.02$ m^2, con una velocidad de 20 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el arreglo y la superficie es 0.10. Grafique la velocidad terminal del arreglo como una función del ángulo de desvío del álabe, θ, para $0 \leq \theta \leq \pi/2$. ¿A qué ángulo el arreglo empieza a moverse, si el coeficiente de fricción estático es 0.15?

4.189 El ángulo del álabe, θ, del arreglo álabe/carro en el problema 4.188, se fija en 60°. Determine la velocidad del carro en $t = 1$ s.

4.190 Considere el vehículo que se muestra en el problema 4.162. Iniciando desde el reposo, es impulsado por una catapulta hidráulica (chorro de líquido). El chorro golpea la superficie curva y forma un ángulo de 180°, que sale horizontalmente. Pueden despreciarse la resistencia al aire y al rodamiento. Empleando la notación indicada, obtenga una ecuación para la aceleración del vehículo en cualquier tiempo y determine el tiempo requerido para que el vehículo llegue a $U = V/2$.

4.191 El tanque del problema 4.186 rueda con resistencia despreciable a lo largo de una pista horizontal. Se va a acelerar desde el reposo por medio de un chorro de líquido que golpeará el álabe y se desviará hacia el interior del tanque. La masa inicial del tanque es M_0. Emplee las ecuaciones de continuidad y momento para demostrar que en cualquier instante, la masa del vehículo y el líquido contenido es $M = M_0\, V/(V - U)$. Obtenga una expresión general para U/V como una función del tiempo.

4.192 Un pequeño motor de cohete se utiliza para activar una "mochila de reacción" que elevará a un astronauta sobre la superficie de la Tierra. El motor del cohete produce un chorro de escape uniforme con velocidad *constante*, $V_e = 2040$ m/s. La masa inicial total del astronauta y la mochila de reacción es $M_0 = 130$ kg. De este valor, 40 kg son de combustible para el motor del cohete. Desarrolle una expresión algebraica para el flujo másico de combustible *variable*, que se requiere para mantener a la mochila de reacción y al astronauta flotando en el aire en una posición fija sobre el suelo. Calcule el tiempo máximo de vuelo antes de que se agote el suministro de combustible.

4.193 Un modelo de cohete propulsor sólido tiene una masa de 69.6 g, de los cuales 12.5 g corresponden al combustible. El cohete produce 1.3 lbf de empuje con una duración de 1.7 s. En estas condiciones, calcule *a*) el impulso total del motor del cohete, *b*) el impulso específico del motor del cohete y *c*) la velocidad y la altura máximas que pueden lograrse en ausencia de la resistencia del aire. (El *impulso específico* se define como la proporción del empuje a la relación del flujo de peso del propulsor, expresada en segundos.)

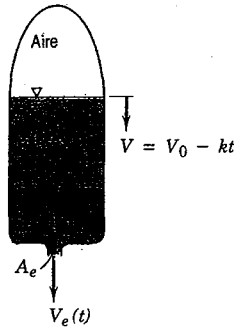
4.194 El pequeño carro del problema 4.156 se va a acelerar horizontalmente mediante un chorro de líquido. La aceleración va a mantenerse *constante* en 0.5 g durante 5 s. El chorro sale de la tobera en una corriente uniforme a una velocidad de 200 pies/s relativa al carro. La única resistencia al movimiento es de fricción; el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.15$. La masa inicial del carro y su contenido es de 3000 lbm. Obtenga una expresión algebraica para el flujo másico del líquido, necesaria para producir la aceleración deseada. Obtenga una expresión algebraica para la masa del vehículo como una función del tiempo. Determine el flujo en $t = 5$ s.

4.195 Un trineo de reacción, de masa inicial M_0, se enciende en $t = 0$ a lo largo de una pista horizontal. El combustible se consume al caudal $\dot{m}$; la velocidad del gas de escape relativa al cohete, es V. Si la resistencia total al movimiento está dada por kU^2, donde U es la velocidad del trineo, obtenga una expresión algebraica para la velocidad, U, del cohete como una función del tiempo.

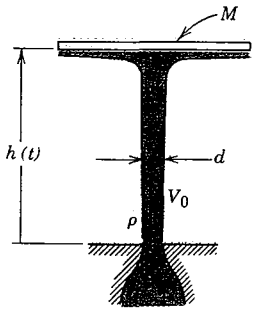
4.196 Un cohete de juguete de plástico, se muestra en la figura. El cohete se impulsa por medio de un chorro de agua que es forzado hacia afuera de la tobera debido a la presencia de aire comprimido. Como una primera aproximación, suponga que la velocidad del agua en la cámara del cohete está dada por $V = V_0 - kt$. Las áreas de la cámara y de la salida son A_c y A_e, respectivamente. La relación de las áreas es, aproximadamente, $A_e/A_c = 0.10$. Suponga que la masa inicial del cohete es M_0 y desprecie la masa del aire. Encuentre *a*) la velocidad del agua en la salida de la tobera, *b*) la masa del cohete,

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obeliscos.

M, y c) la aceleración del cohete, como funciones del tiempo. *Sugerencia:* Emplee volúmenes de control diferentes para cada cálculo.



P4.196



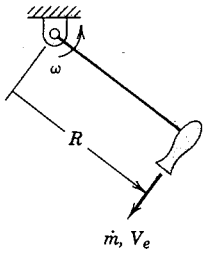
P4.197

**4.197 Un disco, de masa M, está restringido horizontalmente pero es libre de moverse verticalmente. Un chorro de agua golpea el disco por abajo. El chorro sale de la tobera a una velocidad inicial V_0. Obtenga una ecuación diferencial para la altura del disco, $h(t)$, por encima del plano de salida del chorro, si el disco se suelta desde una gran altura, H. Suponga que cuando el disco alcanza el equilibrio, su altura sobre el plano de salida del chorro es h_0. Grafique $h(t)$ para el caso en que el disco se suelte en $t = 0$ desde $H > h_0$. Explique la razón por la que la curva presenta la forma mostrada.

4.198 Un pequeño motor de reacción de combustible sólido se enciende sobre un soporte de prueba. La cámara de combustión es circular, con 100 mm de diámetro. El combustible, de densidad 1660 kg/m^3, se consume de manera uniforme con un flujo de 12.7 mm/s. Las mediciones indican que los gases de escape salen del cohete a presión ambiente y a una velocidad de 2750 m/s. La presión absoluta y la temperatura en la cámara de combustión son 7.0 MPa y 3610 K, respectivamente. Considere los productos de combustión como un gas ideal con masa molecular de 25.8. Evalúe la relación de cambio de masa y de momento lineal dentro del motor del cohete. Exprese la relación de cambio del momento lineal dentro del motor, como un porcentaje del empuje del mismo.

**4.199 Una partícula de fluido se mueve a través del impulsor de una bomba centrífuga con velocidad radial (relativa al impulsor) $V_r = V_0 r_0/r$, mientras el impulsor gira a una velocidad angular constante, ω. Determine la aceleración total de la partícula justo antes de dejar el impulsor en el radio R.

**4.200 El cohete que se muestra tiene una masa inicial M_0 y se une a una barra horizontal rígida que gira alrededor del origen. Suponga que se expulsan gases de escape axialmente a la presión atmosférica, con un flujo másico $\dot{m}$ y con velocidad V_e, relativa al cohete. Desarrolle una ecuación diferencial para el movimiento del cohete y la barra. Desprecie el arrastre aerodinámico y la masa de la barra. Resuelva para la velocidad angular como una función del tiempo.



P4.200, 4.201, 4.202, 4.203

**4.201 Repita el problema 4.200, empleando como datos numéricos $R = 2.2$ m, $M_0 = 3.5$ kg, $\dot{m} = 0.075$ kg/s y $V_e = 2900$ m/s. Resuelva para la velocidad angular, como una función del tiempo, después

** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

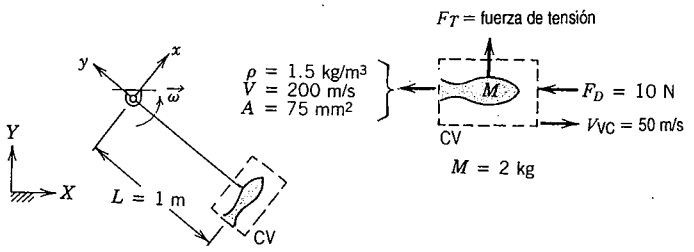
de haberse encendido el motor del cohete. Calcule la velocidad angular y la tensión en la barra soporte después de 5 segundos.

**4.202 Repita el problema 4.200, empleando como datos numéricos $R = 4.5$ pies, $M_0 = 0.16$ slug, $\dot{m} = 0.25$ lbm/s y $V_e = 7100$ pies/s. Encuentre el tiempo posterior a la ignición, en que el sistema alcanza la velocidad angular $\omega = 95$ rad/s. Calcule la aceleración angular y la tensión en la barra de soporte en este instante.

**4.203 Repita el problema 4.202, con los mismos datos numéricos, pero incluyendo el efecto de una fuerza de arrastre aerodinámica constante, $F_D = 5.0$ lbf, en el motor del cohete.

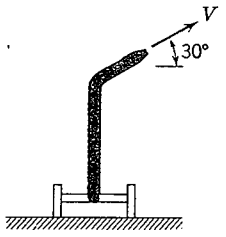
**4.204 Un pequeño "álabe", impulsado por un chorro de aire, gira sobre un brazo alrededor de un eje vertical, a un radio de 1 m a partir de un centro fijo. La masa de la vaina es 2 kg; la velocidad, la densidad y el área del chorro son 200 m/s, 1.5 kg/m^3 y 75 mm^2, respectivamente. En un instante, el álabe se mueve a una velocidad de 50 m/s y la fuerza de arrastre del aire es 10 N. Determine la aceleración angular del álabe en este instante. Desprecie la fricción y la masa del brazo. (Vea el diagrama siguiente.)

**4.205 Resuelva el problema 4.204 para la velocidad angular del álabe, como una función del tiempo empezando desde el reposo. Suponga que la fuerza de arrastre sobre el álabe está dada por $F_D = kV^2$. Evalúe k y encuentre el tiempo requerido para que el álabe alcance $V = 30$ m/s.

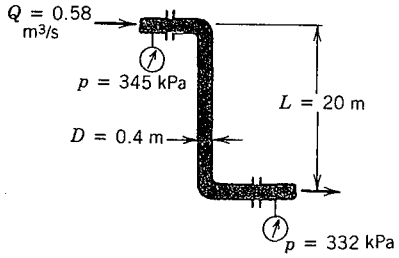


P4.204, 4.205

**4.206 Una gran unidad de riego, montada sobre un carro, descarga agua con una velocidad de 40 m/s, a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. La tobera de 50 mm de diámetro está 3 m por encima del suelo. Calcule la magnitud del momento que tiende a volcar el carro.



P4.206



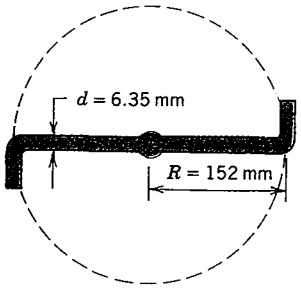
P4.207

**4.207 Petróleo crudo (DR = 0.95) fluye desde el muelle de un buque cisterna a través de una tubería de 0.4 m de diámetro, en la configuración mostrada. El flujo es 0.58 m^3/s y las presiones manométricas se muestran en el diagrama. Determine la fuerza y el momento de torsión que el arreglo de la tubería ejerce sobre sus soportes.

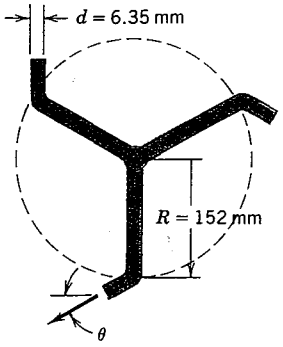
**4.208 El irrigador de césped simplificado que se muestra gira en un plano horizontal. En el pivote central, $Q = 4.5$ gpm de agua entran verticalmente. El agua se descarga en el plano horizontal a partir de cada chorro. Si el pivote no tiene fricción, calcule el momento de torsión necesario para evitar que

** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

gire el irrigador. Despreciando la inercia del propio irrigador, calcule la aceleración angular que resulta cuando se elimina el momento de torsión.



P4.208, 4.209, 4.210



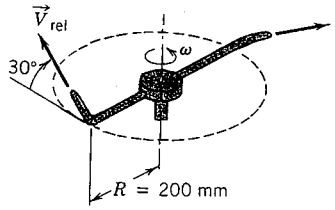
P4.211

**4.209 Considere nuevamente el irrigador del problema 4.208. Deduzca una ecuación diferencial para la velocidad angular del irrigador, como una función del tiempo. Evalúe su velocidad de rotación de estado estable, si no hay fricción en el pivote.

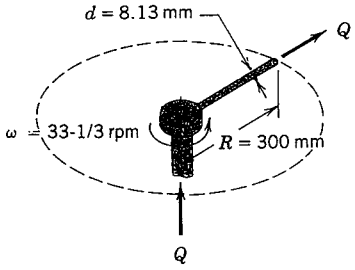
**4.210 Repita el problema 4.209, pero suponga un momento de torsión retardador, constante, en el pivote, con valor de 0.045 pies · lbf.

**4.211 El irrigador de césped mostrado se alimenta con agua a un caudal de 68 L/min. Despreciando la fricción en el pivote, calcule y grafique la velocidad angular de estado estable del irrigador, para $0 \leq \theta < 90°$.

**4.212 El pequeño irrigador de césped que se muestra, opera a una presión manométrica de 140 kPa. El flujo total de agua a través del irrigador es 4 L/min. Cada chorro descarga a 17 m/s (relativa al brazo del irrigador) en una dirección inclinada 30° sobre la horizontal. El irrigador gira alrededor de un eje vertical. La fricción en el cojinete provoca un momento de torsión de 0.18 N · m que se opone a la rotación. Evalúe el momento de torsión requerido para mantener estacionario al irrigador.



P4.212, 4.214, 4.217



P4.213

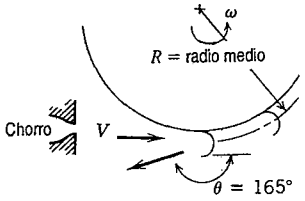
**4.213 Un tubo sencillo que transporta agua gira a una velocidad angular constante, según se indica. El agua se bombea a través del tubo a un flujo de volumen $Q = 13.8$ L/min. Encuentre el momento de torsión que debe aplicarse para mantener estable la rotación del tubo, empleando *dos* métodos de análisis: *a*) un volumen de control *rotatorio* y *b*) un volumen de control *fijo*.

**4.214 Para el problema 4.212, calcule la aceleración inicial del irrigador desde el reposo, si no se aplica momento de torsión externo y su momento de inercia es 0.1 kg · m^2 cuando se llena de agua.

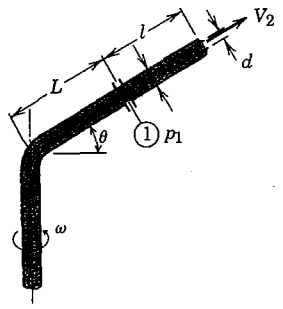
**4.215 Una rueda de Pelton es una forma de turbina hidráulica, adaptada a situaciones de alta carga y bajo flujo. La rueda consta de una serie de álabes montados sobre un rotor, como se muestra. Uno o más

** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

chorros se disponen para golpear los álabes tangencialmente. En la práctica, es posible desviar la corriente de chorro a través de ángulos, θ, de hasta 165°. Considere la rueda de Pelton y el arreglo de chorro sencillo que se muestran. Obtenga una expresión para el momento de torsión ejercido por la corriente de agua sobre la rueda y la salida de potencia correspondiente. (Considere que la velocidad de los álabes es $U = \omega R$.) Determine el valor de U/V requerido para maximizar la potencia producida por la rueda.



P4.215

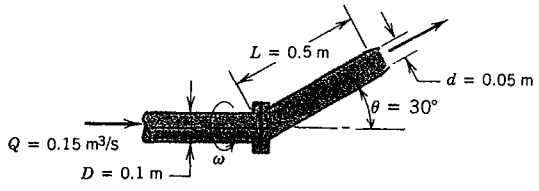


P4.216

**4.216 Un gran sistema de irrigación se fabrica de manera tal que una "sección de tobera" de longitud l, puede montarse en el brazo de aguilón de longitud L; tanto la sección del aguilón como la de la tobera tienen diámetro interior D; la abertura en la salida de la sección de la tobera es de diámetro d. El aguilón, inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal gira, con velocidad angular ω alrededor del eje vertical. Determine la fuerza de la sección de la tobera sobre el aguilón, dado que el peso de la sección de la tobera es $W = 50$ lbf y las siguientes condiciones de operación: $D = 4$ pulg, $d = 1$ pulg, $\theta = 30°$, $L = 10$ pies, $l = 3$ pies, $\omega = 3$ rpm, $V_2 = 120$ pies/s y $p_1 = 100$ psig.

**4.217 El pequeño irrigador de césped que se muestra (P4.212) opera a una presión manométrica de entrada de 140 kPa. El flujo total de agua a través del irrigador es 4.0 L/min. Cada chorro descarga a una velocidad de 17 m/s (relativa al brazo del irrigador) en una dirección inclinada 30° por encima de la horizontal. El irrigador gira en torno de un eje vertical. La fricción en el cojinete provoca un momento de torsión de 0.18 N · m que se opone a la rotación. Determine la velocidad estable de rotación del irrigador y el área aproximada cubierta con el agua regada.

**4.218 A un caudal de 0.15 m^3/s, fluye agua a través de un arreglo de tobera que gira establemente a 30 rpm. Las masas del brazo y la tobera son despreciables en comparación con el agua del interior. Determine el momento de torsión que se requiere para activar el dispositivo y los momentos de torsión de reacción en la brida.

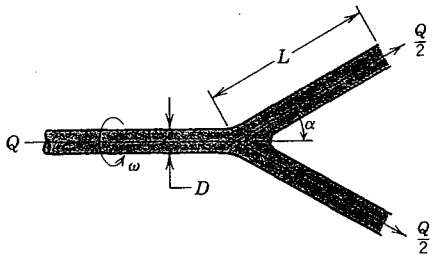


P4.218

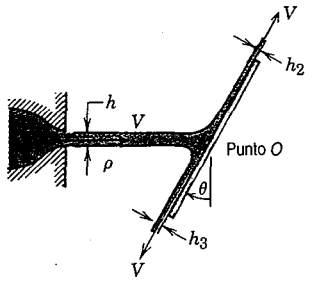
**4.219 Una tubería se ramifica simétricamente en dos tramos de longitud L, y el sistema completo gira con velocidad angular ω en torno de su eje. Cada rama se inclina a un ángulo α respecto del eje de rotación. De manera estable entra líquido a la tubería, con momento angular cero, a un flujo de volumen Q. El diámetro de la tubería, D, es mucho menor que L. Obtenga una expresión para el momento de

** Estos problemas se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

torsión externo que se requiere para girar la tubería. ¿Qué momento de torsión adicional se requeriría para impartir una aceleración angular ω?



P4.219



P4.220

**4.220 Proveniente de una ranura, fluye líquido en una lámina delgada, de ancho w y espesor h, e incide sobre una placa estacionaria plana e inclinada, como se muestra. Los experimentos muestran que la fuerza resultante del chorro de líquido sobre la placa no actúa a través del punto O, donde la línea central del chorro intersecta la placa. Determine la magnitud y la línea de aplicación de la fuerza resultante como funciones de θ. Evalúe el ángulo de equilibrio de la placa si la fuerza resultante se aplica en el punto O. Desprecie todos los efectos viscosos.

‡**4.221 Repita el problema ejemplo 4.15 para el caso en que el brazo de riego empieza desde el reposo y se acelera. Suponga que el momento de inercia del brazo vacío es $I_0 = 0.8 \times 10^{-4}$ kg · m^2 y su diámetro interno es $D = 8.10$ mm. Derive la ecuación diferencial que describe la velocidad angular del irrigador. Resuélvala numéricamente para calcular el tiempo que se requiere para alcanzar el 95 por ciento de la velocidad terminal.

4.222 Aire entra en condiciones estándar a un compresor a 75 m/s y sale a una presión y temperatura absolutas de 200 kPa y 345 K, y velocidad $V = 125$ m/s. El flujo es 1 kg/s. El agua de enfriamiento que circula alrededor de la caja del compresor elimina 18 kJ/kg de aire. Determine la potencia requerida por el compresor.

4.223 Aire entra a un compresor a 14 psia y 80 F con velocidad despreciable y se descarga a 70 psia, 500 F y con una velocidad de 500 pies/s. Si la potencia de entrada es 3200 hp y el flujo, 20 lbm/s, determine la relación de transferencia de calor.

4.224 Se toma aire de la atmósfera para una turbomáquina. En la salida, las condiciones son 500 kPa (manométrica) y 130 C. La velocidad de salida es de 100 m/s y el flujo másico es 0.8 kg/s. El flujo es estable y no hay transferencia de calor. Calcule la interacción del trabajo de eje con los alrededores.

4.225 Una turbina se alimenta con 0.6 m^3/s de agua proveniente de un tubo de 0.3 m de diámetro; el tubo de descarga tiene un diámetro de 0.4 m. Determine la caída de presión a través de la turbina si ésta produce 60 kW.

4.226 Un sistema de bombeo en una lavadora de platos hace circular agua a 55 gpm. La carga total, $p/\rho g + V^2/2g$, que sale de la bomba es 120 pulg de agua. La carga en la entrada de la bomba puede despreciarse. Si la potencia que se suministra a la bomba es de 0.4 hp, determine su eficiencia.

4.227 Se almacena aire comprimido en una botella de presión con un volumen de 10 pies^3 a 3000 psia y 140 F. En cierto instante se abre una válvula y fluye masa desde la botella a $\dot{m} = 0.105$ lbm/s. Encuentre la relación de cambio de la temperatura en la botella en este instante.

4.228 Una bomba extrae agua de un depósito mediante un tubo de succión de 150 mm de diámetro y la entrega a un tubo de descarga de 75 mm de diámetro. El extremo del tubo de succión se encuentra

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obeliscos.

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

2 m abajo de la superficie libre del depósito. El manómetro en el tubo de descarga (2 m arriba de la superficie del depósito) indica 170 kPa. La velocidad promedio en el tubo de descarga es 3 m/s. Si la eficiencia de la bomba es de 75 por ciento, determine la potencia requerida para accionarla.

4.229 Una bomba de agua centrífuga con una entrada y un tubo de descarga de 4 pulg de diámetro tiene un flujo de 300 gpm. La presión de entrada es de 8 pulg de Hg al vacío y la presión de salida, 35 psig. Si las secciones de entrada y salida se localizan a la misma altura y la entrada de potencia medida es 9.1 hp, determine la eficiencia de la bomba.

4.230 Una turbina hidráulica, localizada a 150 pies por debajo del nivel de una presa, genera 500 hp con un flujo de agua de 45 slug/s. La entrada y la salida de la turbina están a la misma altura y cada una tiene un área de flujo de 1.0 pie^2. La salida descarga directamente a la atmósfera como un chorro libre. Desprecie la fricción en los tubos que conectan la presa y la turbina y calcule la caída de presión a través de la turbina. Estime la eficiencia de la misma.

4.231 Un avión de reacción que viaja a 200 m/s toma 40 kg/s de aire y lo descarga a una velocidad de 500 m/s relativa a la aeronave. Determine la *eficiencia propulsiva* (definida como la proporción entre la salida de trabajo útil y la entrada de energía mecánica al fluido) del avión.

4.232 Un camión contra incendios extrae agua de un depósito de agua abierto y de nivel constante por medio de una manguera de 0.2 pies^2 de sección transversal. El agua se descarga desde la bomba, a través de una manguera de 0.2 pies^2, hasta un tanque de compensación presurizado a 120 psig con aire. La bomba añade 970 pies · lbf/slug de energía al fluido; el nivel del agua en el tanque de compensación se encuentra a 3 pies por arriba de la línea central de la bomba. El agua circula estacionariamente, a través de una manguera de 0.04 pies^2 de área, desde el tanque de compensación hasta una tobera de 0.01 pies^2 de área. La tobera se mantiene al mismo nivel que el de la superficie libre del agua en el tanque de compensación. Desprecie todas las pérdidas por fricción y dibuje el sistema. Encuentre:

a) la velocidad del agua que sale de la tobera.

b) la elevación de la bomba relativa al depósito.

c) la potencia requerida para accionar la bomba si ésta tiene una eficiencia del 80 por ciento.

d) la altura máxima por arriba del depósito que la corriente de agua puede alcanzar.

4.233 Todos los grandes puertos están equipados con botes contra incendio para extinguir los que se produzcan en los barcos. Una manguera de 75 mm de diámetro se une a la descarga de la bomba de 10 kW de uno de dichos botes. La tobera que se conecta al extremo de la manguera tiene un diámetro de 25 mm. Si la descarga de la tobera se mantiene a 3 m por arriba de la superficie del agua, determine al flujo volumétrico a través de la tobera, la máxima altura a la cual ascenderá el agua y la fuerza sobre el bote si el chorro de agua se dirige horizontalmente por encima de la popa.

4.234 La eficiencia de propulsión, η, de un dispositivo de reacción se define como el cociente entre la salida de trabajo útil y la entrada de energía mecánica al fluido. Determine la eficiencia de propulsión para el bote de reacción del problema 4.139.

****4.235** La eficiencia de propulsión, η, de un propulsor se define como el cociente entre el trabajo útil producido y la entrada de energía mecánica al fluido. Determine la eficiencia propulsiva al mover el bote de aire del problema 4.151. ¿Cuál sería la eficiencia del bote si no se estuviera moviendo?

4.236 La eficiencia, η, de un molino de viento se define como la proporción entre la salida de trabajo útil y el flujo de energía cinética contenida en un tubo de corriente de viento no perturbado, del mismo diámetro que las hojas del molino. Evalúe la eficiencia del molino de viento del problema 4.102.

‡4.237 Exprese la eficiencia de la bomba de chorro de agua del problema 4.107 como

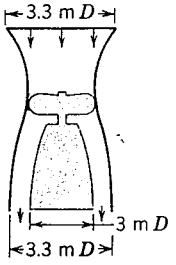
‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora sencillos para apoyar la solución de problemas marcados con obeliscos.

** Este problema requiere material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

$$\eta = \frac{\text{Aumento de energía en el fluido}}{\text{Energía de entrada}} = \frac{\Delta p Q_2}{q_j Q_j}$$

donde $q_j = \frac{1}{2}\rho V_j^2$. Escriba una expresión algebraica para la eficiencia en términos de la relación de área, $a = A_j/A_2$, y la proporción del flujo, $r = Q_2/Q_1$. Encuentre la combinación de a y r que produce la eficiencia máxima. Dibuje la eficiencia óptima y el aumento de presión adimensional contra la proporción de área.

**4.238 La masa total de la aeronave tipo helicóptero que se muestra es 1500 kg. La presión del aire en la salida es la atmosférica. Asuma que el flujo es estable y unidimensional. Trate al aire como incompresible en condiciones estándares y calcule, para una posición en vuelo, la velocidad del aire que sale de la nave y la potencia mínima que debe entregar el propulsor al aire.



P4.238

P4.239

4.239 Líquido que circula a gran velocidad en un canal abierto, ancho y horizontal puede en ciertas condiciones experimentar un salto hidráulico, como se muestra. Para un volumen de control elegido de manera adecuada, el flujo que entra y sale del salto puede considerarse uniforme con distribuciones de presión hidrostática (vea el problema ejemplo 4.6). Considere un canal de ancho w, con flujo de agua en $D_1 = 0.6$ m y $V_1 = 5$ m/s. Demuestre que en general, $D_2 = D_1[\sqrt{1 + 8V_1^2/gD_1} - 1]/2$. Evalúe el cambio en la energía mecánica a través del salto hidráulico. Si la transferencia de calor a los alrededores es despreciable, determine el cambio en la temperatura del agua a través del salto.

** Este problema requiere material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

Capítulo 5

Introducción al análisis diferencial del movimiento de un fluido

En el capítulo 4 desarrollamos las ecuaciones básicas en forma integral para un volumen de control. Las ecuaciones integrales son particularmente útiles cuando nos interesa el comportamiento general de un campo de flujo y su efecto en diversos dispositivos. Sin embargo, el enfoque integral no nos permite obtener un conocimiento detallado, punto por punto, del campo de flujo.

Para obtener este conocimiento en detalle, debemos aplicar las ecuaciones del movimiento de un fluido en forma diferencial. En este capítulo desarrollaremos las ecuaciones diferenciales para la conservación de la masa y la segunda ley de movimiento de Newton. Como estamos interesados en la formulación de las ecuaciones diferenciales, nuestro análisis será en términos de sistemas y volúmenes de control infinitesimales.

5-1 CONSERVACIÓN DE LA MASA

En el capítulo 2 encontramos que la suposición del medio continuo —la de que un fluido puede ser tratado como una distribución continua de materia— lleva directamente a una representación de campo de las propiedades del fluido. Los campos de propiedades se definen mediante funciones continuas de las coordenadas espaciales y del tiempo. Los campos de densidad y velocidad se desarrollan por medio de la conservación de la masa. Deduciremos la ecuación diferencial para la conservación de la masa en coordenadas rectangulares y cilíndricas. En ambos casos, la deducción se lleva a cabo aplicando la conservación de la masa a un volumen de control diferencial.

5-1.1 Sistema de coordenadas rectangulares

En coordenadas rectangulares, el volumen de control elegido es un cubo infinitesimal con lados de longitud dx, dy, dz como se muestra en la figura 5.1. La densidad en el centro, O, del volumen de control es ρ y la velocidad ahí es $\vec{V} = \hat{i}\,u + \hat{j}\,v + \hat{k}\,w$.

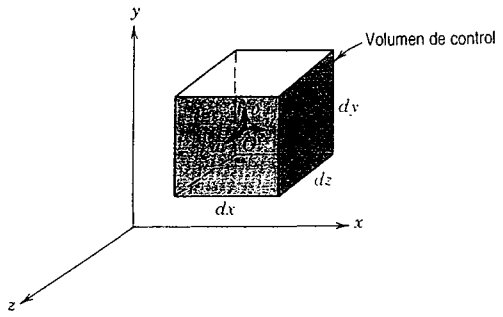


Fig. 5.1 Volumen de control diferencial en coordenadas rectangulares.

Para evaluar las propiedades en cada una de la seis caras de la superficie de control, utilizaremos una expansión de la serie de Taylor alrededor del punto O. Por ejemplo, en la cara derecha,

$$\rho\Big)_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \cdots$$

Despreciando los términos de orden mayor, podemos escribir

$$\rho\Big)_{x+dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

y

$$u\Big)_{x+dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

donde ρ, u, $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$, y $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ se evalúan en el punto O. Los términos correspondientes en la cara izquierda son

$$\rho\Big)_{x-dx/2} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{2}\right) = \rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

$$u\Big)_{x-dx/2} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{2}\right) = u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

Un enunciado en palabras de la conservación de la masa es

$$\left[\begin{array}{l}\text{Flujo másico neto que sale}\\ \text{de la superficie de control}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{Relación de cambio de la masa}\\ \text{dentro del volumen de control}\end{array}\right] = 0$$

Para cuantificar el primer término en esta ecuación, debemos evaluar $\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$; y considerar el flujo másico a través de cada una de las seis superficies de la superficie de control. Los detalles de esta evaluación se muestran en la tabla 5.1. Se ha supuesto que las velocidades a través de cada una de las seis caras estarán en las direcciones de coordenadas positivas. Los términos de mayor orden [por ejemplo, $(dx)^2$] se han omitido.

Vemos que el flujo másico neto que sale de la superficie de control está dado por

Tabla 5.1 Flujo de masa a través de la superficie de control de un volumen de control diferencial rectangular

Superficie	$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$
Izquierda $(-x)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]\left[u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right] dy\, dz = -\rho u\, dy\, dz + \frac{1}{2}\left[u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx\, dy\, dz$
Derecha $(+x)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]\left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right] dy\, dz = \rho u\, dy\, dz + \frac{1}{2}\left[u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx\, dy\, dz$
Fondo $(-y)$	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]\left[v - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right] dx\, dz = -\rho v\, dx\, dz + \frac{1}{2}\left[v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx\, dy\, dz$
Parte superior $(+y)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right]\left[v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{2}\right] dx\, dz = \rho v\, dx\, dz + \frac{1}{2}\left[v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx\, dy\, dz$
Parte posterior $(-z)$	$= \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[w - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right] dx\, dy = -\rho w\, dx\, dy + \frac{1}{2}\left[w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz$
Frente $(+z)$	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right] dx\, dy = \rho w\, dx\, dy + \frac{1}{2}\left[w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz$

Entonces,

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\left\{u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} + \left\{v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} + \left\{w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\right] dx\, dy\, dz$$

o

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz$$

$$\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz$$

La masa dentro del volumen de control en cualquier instante es el producto de la masa por unidad de volumen, ρ, y el volumen, $dx\, dy\, dz$. De tal modo, la relación de cambio de la masa dentro del volumen de control está determinada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz$$

En coordenadas rectangulares la ecuación diferencial para la conservación de la masa es, entonces,

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.1a}$$

Puesto que el operador vectorial, ∇, en coordenadas rectangulares está dado por

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

entonces,

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \rho \vec{V}$$

y la conservación de la masa puede escribirse como

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.1b}$$

Vale la pena señalar los dos casos de flujo para los cuales la ecuación de continuidad diferencial puede simplificarse. Para flujo incompresible, ρ = constante y la densidad no es función ni de las coordenadas espaciales ni del tiempo. Para flujo incompresible, la ecuación de continuidad se simplifica en

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

De manera que el campo de velocidad, $\vec{V}(x, y, z, t)$, en flujo incompresible, debe satisfacer $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.

Para flujo estable, todas las propiedades del fluido son, por definición, independientes del tiempo. De modo que a lo sumo $\rho = \rho(x, y, z)$; para flujo estable, es posible escribir la ecuación de continuidad como

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

o

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz$$

EJEMPLO 5.1 Integración de la ecuación de continuidad diferencial bidimensional

Para un flujo bidimensional en el plano xy, la componente x de la velocidad está dada por $u = Ax$. Determine una posible componente y para flujo estable e incompresible. ¿Cuántas componentes y posibles hay?

PROBLEMA EJEMPLO 5.1

DATOS: Un flujo bidimensional en el plano xy para el cual $u = Ax$.

ENCUENTRE: *a*) Las componentes y posibles para flujo estable e incompresible.
b) ¿Cuántas componentes y son posibles?

SOLUCIÓN:

Ecuación básica: $\nabla \cdot \rho\vec{V} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Para flujo estable e incompresible, $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, y ρ = constante; de tal modo, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. En coordenadas rectangulares

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Para flujo bidimensional en el plano xy, $\vec{V} = \vec{V}(x, y)$. Entonces las derivadas parciales con respecto a z son cero, y

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Entonces

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -A$$

la cual produce una expresión para la relación de cambio de v manteniendo x constante. Esta ecuación puede integrarse para obtener una expresión para v. El resultado es

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + f(x) = -Ay + f(x) \qquad \longleftarrow v$$

{La función de x aparece porque tuvimos una derivada parcial de v con respecto a y.}

Cualquier función $f(x)$ es permisible, puesto que $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x) = 0$. Así, cualquier número de expresiones para v podría satisfacer la ecuación de continuidad diferencial bajo las condiciones dadas. La expresión más simple para v se obtendría estableciendo $f(x) = 0$. Luego $v = -Ay$, y

$$\vec{V} = Ax\,\hat{i} - Ay\,\hat{j} \qquad \longleftarrow \vec{V}$$

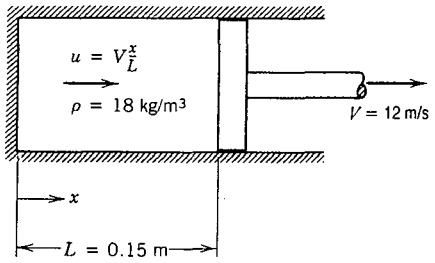
{Este problema ejemplifica el uso de la ecuación de continuidad en forma diferencial para un flujo estable e incompresible con el propósito de evaluar una posible componente de velocidad y presentar la integración de una derivada parcial.}

EJEMPLO 5.2 Ecuación de continuidad diferencial inestable

Un gas que llena el amortiguador neumático en el sistema de suspensión de un automóvil se comporta como un aparato de cilindro-émbolo. En un instante en que el émbolo está a $L = 0.15$ m del extremo cerrado del cilindro, la densidad del gas es uniforme en $\rho = 18$ kg/m^3 y el émbolo empieza a alejarse del extremo cerrado a $V = 12$ m/s. El movimiento del gas es unidimensional y proporcional a la distancia desde el extremo cerrado; varía linealmente de cero, en el extremo, a $u = V$ en el émbolo. Evalúe la relación de cambio de la densidad del gas en este instante. Obtenga una expresión para la densidad promedio como una función del tiempo.

PROBLEMA EJEMPLO 5.2

DATOS: El cilindro-émbolo que se muestra.



ENCUENTRE: *a*) La relación de cambio de la densidad.

b) $\rho(t)$.

SOLUCIÓN:

Ecuación básica: $\nabla \cdot \rho\vec{V} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

En coordenadas rectangulares, $\dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} + \dfrac{\partial \rho w}{\partial z} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Puesto que $u = u(x)$, entonces las derivadas parciales con respecto a y y z son cero, y

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\rho\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Como ρ se supone uniforme en el volumen, entonces $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0$, y $\dfrac{d\rho}{dt} = -\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Puesto que $u = V\dfrac{x}{L}$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{V}{L}$, y $\dfrac{d\rho}{dt} = -\rho\dfrac{V}{L}$. Sin embargo, note que $L = L_0 + Vt$.

Separando variables e integrando,

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t \frac{V}{L}dt = -\int_0^t \frac{V\,dt}{L_0 + Vt}$$

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = \ln\frac{L_0}{L_0 + Vt} \qquad \text{y} \qquad \rho(t) = \rho_0\left[\frac{1}{1 + Vt/L_0}\right] \longleftarrow \rho(t)$$

En $t = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0\frac{V}{L} = -\frac{18\ \text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{12\ \text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0.15\ \text{m}} = -1440\ \text{kg/m}^3 \cdot \text{s} \longleftarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Este problema ilustra el empleo de la ecuación de continuidad en forma diferencial para evaluar una variación de densidad.

5-1.2 Sistema de coordenadas cilíndricas

En la figura 5.2, se muestra un volumen de control diferencial adecuado en coordenadas cilíndricas. La densidad en el centro, O, del volumen de control es ρ y la velocidad ahí es $\vec{V} = \hat{e}_r V_r + \hat{e}_\theta V_\theta + \hat{k} V_z$, donde $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{k}$ son vectores unitarios en las direcciones r, θ y z, respectivamente, y V_r, V_θ y V_z son las componentes de la velocidad en las direcciones r, θ y z, respectivamente. Para evaluar $\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$, debemos considerar el flujo másico a través de cada una de las seis caras de la superficie de control. Las propiedades en cada una de ellas se obtienen de la expansión de la serie de Taylor alrededor del punto O. Los detalles de la evaluación del flujo másico se muestran en la tabla 5.2. Suponemos que las componentes de velocidad V_r, V_θ y V_z estarán en la dirección positiva; los términos de mayor orden se han despreciado.

Hemos visto que el flujo másico que sale de la superficie de control está determinado por

$$\left[\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z}\right] dr\, d\theta\, dz$$

La masa dentro del volumen de control en cualquier instante es el producto de la masa por unidad de volumen, ρ, y el volumen, $r\, d\theta\, dr\, dz$. De manera que la relación de cambio de la masa dentro del volumen de control está dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} r\, d\theta\, dr\, dz$$

En coordenadas cilíndricas la ecuación diferencial para la conservación de la masa es, entonces,

$$\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + r\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Dividiendo entre r se obtiene

$$\frac{\rho V_r}{r} + \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

o

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (5.2)$$

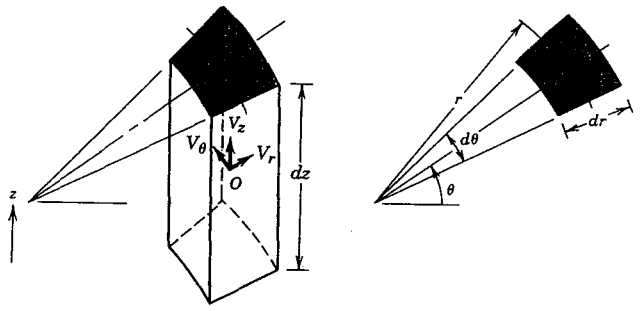


Fig. 5.2. Volumen de control diferencial en coordenadas cilíndricas.

Tabla 5.2 Flujo de masa a través de la superficie de control de un volumen de control diferencial cilíndrico.

Superficie	$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$
Interior (−r)	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left[V_r - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left(r - \frac{dr}{2}\right)d\theta\, dz = -\rho V_r r\, d\theta\, dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz - V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz$
Exterior (+r)	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left[V_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)\frac{dr}{2}\right]\left(r + \frac{dr}{2}\right)d\theta\, dz = \rho V_r r\, d\theta\, dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz + V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta\, dz$
Frente (−θ)	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right]\left[V_\theta - \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right] dr\, dz = -\rho V_\theta dr\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz$
Parte posterior (+θ)	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right]\left[V_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2}\right] dr\, dz = \rho V_\theta dr\, dz + \rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{2} dr\, dz$
Fondo (−z)	$= -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[V_z - \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right] r\, d\theta\, dr = -\rho V_z r\, d\theta\, dr + \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r\, d\theta\, dr + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r\, d\theta\, dr$
Parte superior (+z)	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]\left[V_z + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right] r\, d\theta\, dr = \rho V_z r\, d\theta\, dr + \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r\, d\theta\, dr + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{dz}{2} r\, d\theta\, dr$

Entonces,

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r\left\{\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) + V_r\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\right\} + \left\{\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + V_\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\right\} + r\left\{\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + V_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right\}\right] dr\, d\theta\, dz$$

o

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r\frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \rho V_z}{\partial z}\right] dr\, d\theta\, dz \tag{5.2}$$

En coordenadas cilíndricas el operador vectorial, ∇, está dado por

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.18}$$

La ecuación 5.2 también puede escribirse[1] en notación vectorial como

$$\nabla \cdot \rho\vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.1b}$$

Para flujo incompresible, ρ = constante, y la ecuación 5.2 se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Así, el campo de velocidad, $\vec{V}(x, y, z, t)$, para flujo incompresible debe satisfacer $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. En flujo estable, la ecuación 5.2 se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

o

$$\nabla \cdot \rho\vec{V} = 0$$

Cuando se escribe en forma vectorial, la ecuación de continuidad diferencial (el enunciado matemático de la conservación de la masa), ecuación 5.1*b*, puede aplicarse en cualquier sistema de coordenadas. Simplemente se sustituye la expresión apropiada para el operador vectorial ∇. En retrospectiva, este resultado no es sorprendente puesto que la conservación de la masa se aplica independientemente de nuestra elección del sistema de coordenadas.

EJEMPLO 5.3 Ecuación de continuidad diferencial en coordenadas cilíndricas

Considere un flujo radial unidimensional en el plano $r\ \theta$, caracterizado por $V_r = f(r)$ y $V_\theta = 0$. Determine las condiciones en $f(r)$ requeridas para flujo incompresible.

PROBLEMA EJEMPLO 5.3

DATOS: Un flujo radial unidimensional en el plano $r\ \theta$: $V_r = f(r)$ y $V_\theta = 0$.

ENCUENTRE: Los requerimientos en $f(r)$ para flujo incompresible.

[1] Para evaluar $\nabla \cdot \rho\vec{V}$ en coordenadas cilíndricas, debemos recordar que

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$

como se muestra en el problema ejemplo 4.13.

SOLUCIÓN:
Ecuación básica:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.1B}$$

Para flujo incompresible, ρ = constante, por lo que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. En coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}V_\theta + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{5.1b}$$

Para el campo de velocidad dado, $\vec{V} = \vec{V}(r)$. $V_\theta = 0$ y las derivadas parciales con respecto a z son cero, por lo que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) = 0$$

Integrando con respecto a r se obtiene

$$rV_r = \text{constante}$$

De tal manera, la ecuación de continuidad muestra que la velocidad radial debe ser $V_r = f(r) = C/r$ para el flujo radial unidimensional de un fluido incompresible.

**5-2 FUNCIÓN DE CORRIENTE PARA UN FLUJO BIDIMENSIONAL INCOMPRESIBLE

Es conveniente contar con medios para describir matemáticamente cualquier patrón particular de flujo. Una descripción adecuada debe retratar la idea de la forma de las líneas de corriente (incluyendo las fronteras) y la escala de la velocidad en puntos representativos del flujo. Un dispositivo matemático que sirve a este propósito es la función de corriente, ψ. La función de corriente se formula como una relación entre las líneas de corriente y el enunciado de la conservación de la masa. Es una función matemática sencilla, $\psi(x, y, t)$, que reemplaza a las dos componentes de velocidad, $u(x, y, t)$ y $v(x, y, t)$.

Para un flujo bidimensional incompresible en el plano xy, la conservación de la masa, ecuación 5.1a, puede escribirse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.3}$$

Si una función continua, $\psi(x, y, t)$, llamada la función de corriente, se define tal que

$$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.4}$$

entonces la ecuación de continuidad, ecuación 5.3, se satisface exactamente, puesto que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial x} = 0$$

** Esta sección puede omitirse sin que se pierda continuidad en el material del texto.

Recuerde que las líneas de corriente son líneas dibujadas en el campo de flujo, de tal modo que, en un instante dado, son tangentes a la dirección de flujo en cualquier punto en el campo de flujo. Por consiguiente, si $d\vec{r}$ es un elemento de longitud a lo largo de una línea de corriente, la ecuación de ésta se determina mediante

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 = (\hat{i}u + \hat{j}v) \times (\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy)$$
$$= \hat{k}(u\,dy - v\,dx)$$

La ecuación de una línea de corriente en un flujo bidimensional es

$$u\,dy - v\,dx = 0$$

Sustituyendo las componentes de la velocidad, u y v, en términos de la función de corriente, ψ, de la ecuación 5.4, entonces a lo largo de una línea de corriente

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \tag{5.5}$$

Como $\psi = \psi(x, y, t)$, entonces en un instante, t_0, $\psi = \psi(x, y, t_0)$; en este instante, un cambio en ψ puede evaluarse como si $\psi = \psi(x, y)$. En consecuencia, en cualquier instante,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \tag{5.6}$$

Al comparar las ecuaciones 5.5 y 5.6, vemos que a lo largo de una línea de corriente instantánea, $d\psi = 0$; ψ es una constante a lo largo de una línea de corriente. Como la diferencial de ψ es exacta, la integral de $d\psi$ entre cualesquiera dos puntos en un campo de flujo, $\psi_2 - \psi_1$, depende sólo de los puntos extremos de integración.

De la definición de una línea de corriente, advertimos que puede no haber flujo a través de ésta. De tal modo, si las líneas de corriente en un campo de flujo bidimensional incompresible, son en un instante dado como se muestra en la figura 5.3, la relación de flujo entre las líneas de corriente ψ_1 y ψ_2, a través de las líneas AB, BC, DE y DF, debe ser igual.

El flujo volumétrico, Q, entre las líneas de corriente ψ_1 y ψ_2 puede evaluarse considerando el flujo a través de AB o a través de BC. Para una profundidad unitaria, la relación de flujo a través de AB es

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} u\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

A lo largo de AB, x = constante, y $d\psi = \partial\psi/\partial y\,dy$. Por tanto,

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Para una profundidad unitaria, la relación de flujo a través de BC es

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} v\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x}dx$$

ıpo de flujo, de tal modo
ier punto en el campo de
una línea de corriente, la

ınción de corriente, ψ, de

(5.5)

instante, un cambio en ψ
ante,

(5.6)

de corriente instantánea,
liferencial de ψ es exacta,
$\psi_2 - \psi_1$, depende sólo de

o haber flujo a través de
ional incompresible, son
tre las líneas de corriente

valuarse considerando el
elación de flujo a través

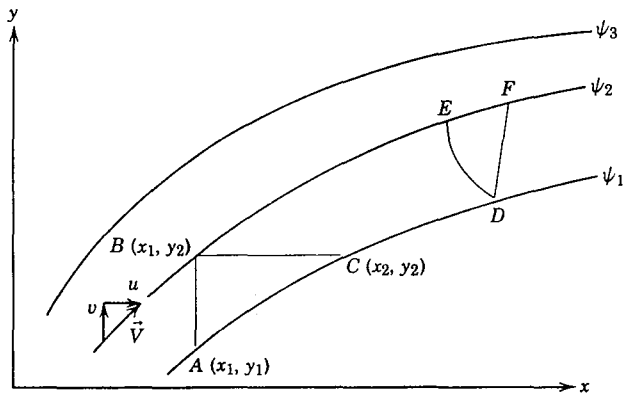


Fig. 5.3 Líneas de corriente instantáneas en un flujo bidimensional.

A lo largo de BC, y = constante, y $d\psi = \partial\psi/\partial x\, dx$. Por tanto,

$$Q = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -\int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

De tal manera, el flujo volumétrico (por unidad de profundidad), entre cualesquiera dos líneas de corriente, puede escribirse como la diferencia entre los valores constantes de ψ que definen las dos líneas de corriente.[2] La convención de signos utilizada para definir la función de corriente, ψ, es tal que el flujo es positivo de izquierda a derecha. Si a la línea de corriente a través del origen se designa como $\psi = 0$, entonces el valor de ψ para cualquier otra línea de corriente, representa el flujo de izquierda a derecha entre el origen y esa línea de corriente. Esto se ilustra en el problema ejemplo 5.4.

Para un flujo bidimensional incompresible en el plano $r\,\theta$, la conservación de la masa, ecuación 5.2, puede expresarse como

$$\frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{5.7}$$

La función de corriente, $\psi(r, \theta, t)$ se define entonces como

$$V_r \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad V_\theta \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{5.8}$$

Con ψ definida de acuerdo con la ecuación 5.8, la ecuación de continuidad, ecuación 5.7, se satisface exactamente.

[2] Para flujo bidimensional compresible estable en el plano xy, la función de corriente, ψ, se define tal que

$$\rho u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \rho v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La diferencia entre los valores constantes de ψ que definen dos líneas de corriente es el flujo másico (por unidad de profundidad) entre las dos líneas de corriente.

EJEMPLO 5.4 Función de corriente para flujo en una esquina

Dado el campo de velocidad para el flujo estable e incompresible del ejemplo 5.1, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, con $A = 2\ s^{-1}$, determine la función de corriente que producirá este campo de velocidad. Grafique e interprete el patrón de líneas de corriente en el primero y segundo cuadrantes del plano xy.

PROBLEMA EJEMPLO 5.4

DATOS: El campo de velocidad, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, con $A = 2\ s^{-1}$.

ENCUENTRE: *a*) La función de corriente, ψ.
b) Grafique en el primero y segundo cuadrantes e interprete.

SOLUCIÓN:
El flujo es incompresible, por lo que la función de corriente satisface la ecuación 5.4.

De la ecuación 5.4, $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ y $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$. Del campo de velocidad dado,

$$u = Ax = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

La integración con respecto a y produce

$$\psi = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + f(x) = Axy + f(x) \tag{1}$$

donde $f(x)$ es arbitraria. La función $f(x)$ puede evaluarse empleando la ecuación para v. Por consiguiente, de la ecuación 1,

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Ay - \frac{df}{dx} \tag{2}$$

Del campo de velocidad dado, $v = -Ay$. La comparación de esto con la ecuación 2 muestra que $\dfrac{df}{dx} = 0$ o $f(x) =$ constante. Por tanto, la ecuación 1 se convierte en

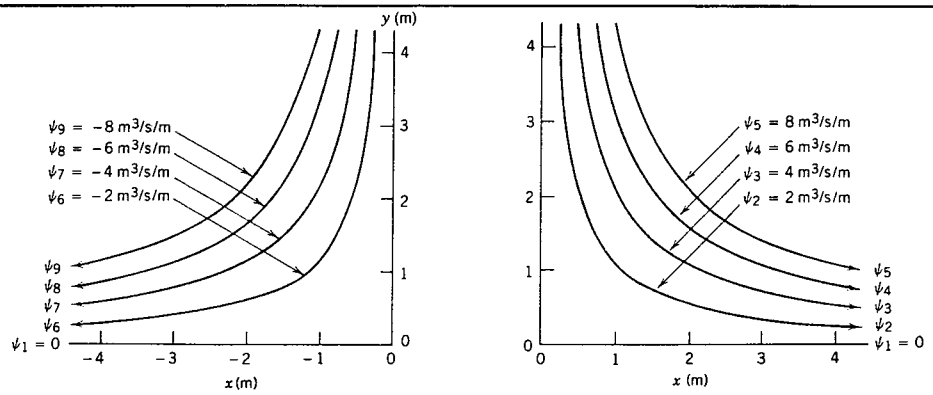
$$\psi = Axy + c \qquad \psi$$

Las líneas de ψ constante representan líneas de corriente en el campo de flujo. La constante c puede elegirse como cualquier valor conveniente para fines de graficación. La constante se elige igual a cero con el fin de que la línea de corriente a través del origen se designe como $\psi = \psi_1 = 0$. Luego, el valor para cualquier otra línea de corriente representa el flujo de izquierda a derecha entre ella y el origen. Con $c = 0$ y $A = 2\ s^{-1}$, entonces

$$\psi = 2xy \qquad (m^3/s/m)$$

Las gráficas separadas de las líneas de corriente en el primero y segundo cuadrantes se presentan en seguida.

5-3



En el primer cuadrante, puesto que $u > 0$ y $v < 0$, el flujo es de izquierda a derecha y hacia abajo. El flujo volumétrico entre la línea de corriente, $\psi_7 = \psi_1$, a través del origen y la línea de corriente $\psi = \psi_2$, es

$$Q_{12} = \psi_2 - \psi_1 = 2 \text{ m}^3/\text{s/m}$$

En el segundo cuadrante, puesto que $u < 0$ y $v < 0$, el flujo es de derecha a izquierda y hacia abajo. El flujo volumétrico entre las líneas de corriente ψ_7 y ψ_9 es

$$Q_{79} = \psi_9 - \psi_7 = [-8 - (-4)] \text{ m}^3/\text{s/m} = -4 \text{ m}^3/\text{s/m}$$

El signo negativo es congruente con el flujo de derecha a izquierda.

Las regiones de alta velocidad de flujo ocurren donde las líneas de corriente están muy apretadas, mientras que el flujo de menor velocidad se presenta cerca del origen, donde el espaciamiento entre las líneas de corriente es mayor. En cualquier cuadrante, el flujo se observa cualitativamente como el correspondiente al que pasa por una "esquina" formada por un par de paredes.

5-3 MOVIMIENTO DE UN ELEMENTO DE FLUIDO (CINEMÁTICA)

Antes de formular los efectos de las fuerzas sobre el movimiento de un fluido (dinámica), vamos a considerar primeramente el movimiento (cinemática) de un elemento de fluido en un campo de flujo. Por conveniencia, seguiremos un elemento infinitesimal de identidad fija (masa), como se muestra en la figura 5.4.

Conforme un elemento de masa infinitesimal, dm, se mueve en un campo de flujo, pueden ocurrirle varias cosas. Evidentemente el elemento que se traslada; está sujeto a un desplazamiento lineal de una posición x, y, z a una posición diferente x_1, y_1, z_1. El elemento también puede girar; es posible que la orientación del elemento que se muestra en la figura 5.4, donde sus lados son paralelos a los ejes de coordenadas x, y, z, cambie como un resultado de una rotación pura en torno a uno (o a los tres) de los ejes de coordenadas. Además, el elemento puede sufrir una deformación que se divide en dos partes —lineal y angular—. La deformación lineal implica un cambio en la forma sin cambio en la orientación del elemento: una deformación en la que los planos del elemento que eran originalmente perpendiculares (esto es, la parte superior y la lateral del elemento)

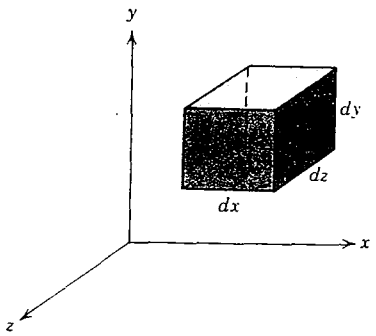


Fig. 5.4 Elemento infinitesimal de fluido.

permanecen perpendiculares. La deformación angular implica una distorsión del elemento en la que los planos que eran originalmente perpendiculares, ya no lo son más. En general, un elemento de fluido puede someterse a una combinación de traslación, rotación y deformación lineal y angular durante el transcurso de su movimiento.

Estas cuatro componentes del movimiento de un fluido se ilustran en la figura 5.5 para movimiento en un plano *xy*. En el caso de un flujo tridimensional general, se describirían movimientos similares de las partículas en los planos *yz* y *xz*. Para traslación o rotación puras, el elemento de fluido mantiene su forma, es decir, no hay deformación. De manera que los esfuerzos de corte no surgén como resultado de traslación o rotación puras. (Recuerde del capítulo 2 que en un fluido newtoniano el esfuerzo de corte es directamente proporcional a la relación de deformación angular.)

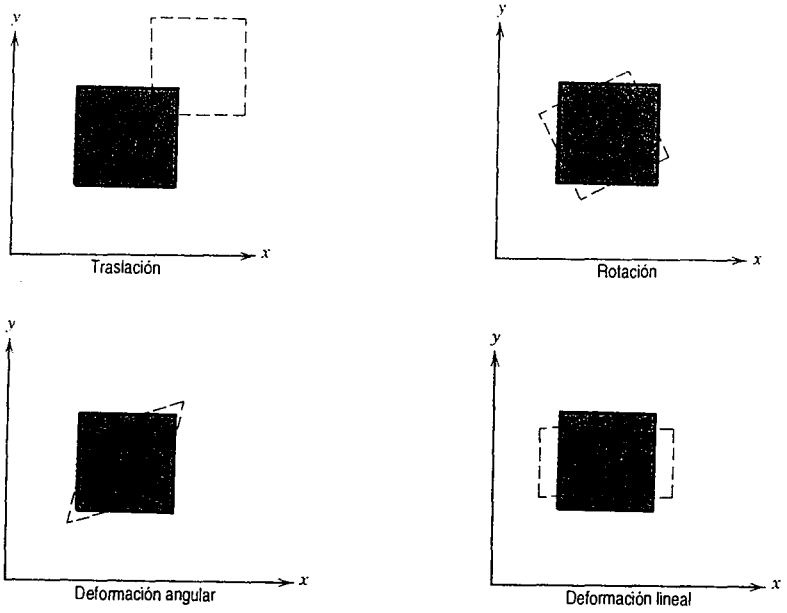


Fig. 5.5 Representación gráfica de las componentes del movimiento de un fluido.

5-3.1 Aceleración de una partícula de fluido en un campo de velocidad

Vamos primero a recordar que estamos tratando con un elemento de masa fija, *dm*. Como se discutió en la sección 1-5.3, es posible obtener la ecuación de movimiento para una partícula aplicando la segunda ley de Newton a esa partícula. La desventaja de este enfoque es que para cada partícula se requiere una ecuación por separado. De modo que la contabilidad de muchas partículas se vuelve un problema.

Una descripción más general de la aceleración puede obtenerse considerando una partícula que se mueve en un campo de velocidad. La hipótesis básica del medio continuo en la mecánica de fluidos nos ha llevado a una descripción de campo del flujo del fluido, en la cual las propiedades de un campo de flujo se definen mediante funciones continuas de las coordenadas espaciales y del tiempo. En particular, el campo de velocidad está dado por $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$. La descripción de campo es muy eficaz, ya que la información para todo el flujo está dada por medio de una ecuación.

El problema, entonces, es retener la descripción de campo para las propiedades del fluido y obtener una expresión para la aceleración de una partícula del fluido cuando ésta se desplaza en el campo de flujo. Enunciado simplemente, el problema es:

> Dado el campo de velocidad, $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$, encuentre la aceleración de una partícula del fluido, $\vec{a}_p$.

Considere una partícula que se mueve en un campo de velocidad. En el tiempo *t*, la partícula está en la posición *x, y, z* y tiene una velocidad correspondiente a la velocidad en ese punto en el espacio en *t*,

$$\vec{V}_p]_t = \vec{V}(x, y, z, t)$$

En $t + dt$, la partícula se ha movido a una nueva posición, con coordenadas $x + dx, y + dy, z + dz$ y tiene una velocidad determinada por

$$\vec{V}_p]_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

Esto se muestra gráficamente en la figura 5.6.

La velocidad de la partícula en *t* (posición $\vec{r}$) está dada por $\vec{V}_p = \vec{V}(x, y, z, t)$. Entonces $d\vec{V}_p$, el cambio en la velocidad de la partícula al moverse de la posición $\vec{r}$ a la $\vec{r} + d\vec{r}$, es

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

La aceleración total de la partícula está dada por

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Como

$$\frac{dx_p}{dt} = u \qquad \frac{dy_p}{dt} = v \qquad \text{y} \qquad \frac{dz_p}{dt} = w$$

entonces

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

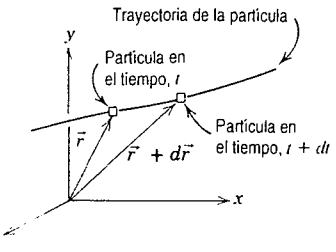


Fig. 5.6 Movimiento de una partícula en un campo de flujo.

Para recordarnos que el cálculo de la aceleración de una partícula de fluido en un campo de velocidad requiere una derivada especial, ésta se da mediante el símbolo $D\vec{V}/Dt$. Por tanto,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \tag{5.9}$$

La derivada, $D\vec{V}/Dt$, definida por la ecuación 5.9, se denomina comúnmente la *derivada sustancial* para recordarnos que se calcula para una partícula de "*sustancia*". Con frecuencia, se denomina la derivada material o de partícula.

De acuerdo con la ecuación 5.9, advertimos que una partícula de fluido que se mueve en un campo de flujo puede experimentar una aceleración por una de dos razones. Puede acelerarse porque se lleva adentro de una región de mayor (o menor) velocidad. Por ejemplo, en el flujo estable a través de una tobera, en el cual, por definición, el campo de velocidad no es una función del tiempo, una partícula de fluido se acelerará conforme se mueva a través de la tobera, esto es, la partícula se lleva hacia una región de velocidad más alta.[3] Si un campo de flujo es inestable, una partícula de fluido experimentará una aceleración "local" adicional, debido a que el campo de velocidad es una función del tiempo.

El significado físico de los términos en la ecuación 5.9 es

$$\vec{a}_p = \underbrace{\frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{total de una}\\ \text{partícula}}} = \underbrace{u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{convectiva}}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{local}}}$$

La aceleración convectiva puede escribirse como una expresión vectorial sencilla empleando el operador vectorial gradiente, ∇. De tal modo,

$$u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$$

(Le sugerimos verificar esta igualdad desarrollando el lado derecho de la ecuación mediante el empleo de la familiar operación del producto punto.) Así, la ecuación 5.9 puede expresarse como

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \tag{5.10}$$

[3] Se presentan las aceleraciones convectivas y se ilustra el cálculo de la aceleración total de una partícula de un fluido en la película de la NCFMF, *Descripciones euleriana y lagrangiana en mecánica de fluidos*, J. L. Lumley, director.

Para un flujo bidimensional, por ejemplo $\vec{V} = \vec{V}(x, y, t)$, la ecuación 5.9 se reduce a

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Para un flujo unidimensional, digamos $\vec{V} = \vec{V}(x, t)$, la ecuación 5.9 se vuelve

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Por último, para un flujo estable en tres dimensiones, la ecuación 5.9 se transforma en

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

que no necesariamente es cero. De modo que una partícula de fluido puede experimentar una aceleración convectiva debido a su movimiento, incluso en un campo de velocidad estable.

Como con todas las ecuaciones vectoriales, la ecuación 5.9 puede escribirse mediante ecuaciones componentes escalares. En relación con un sistema de coordenas *xyz*, las componentes escalares de la ecuación 5.9 se escriben

$$a_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.11a}$$

$$a_{y_p} = \frac{Dv}{Dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{5.11b}$$

$$a_{z_p} = \frac{Dw}{Dt} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{5.11c}$$

Las componentes de la aceleración en coordenadas cilíndricas pueden obtenerse de la ecuación 5.10 expresando la velocidad, $\vec{V}$, en coordenadas cilíndricas (sección 5-1.2) y utilizando la expresión apropiada (ecuación 3.18) para el operador vectorial ∇. De tal manera,[4]

$$a_{r_p} = V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial t} \tag{5.12a}$$

$$a_{\theta_p} = V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} \tag{5.12b}$$

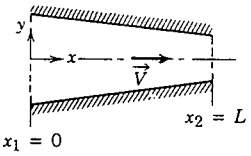
$$a_{z_p} = V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \tag{5.12c}$$

Hemos obtenido una expresión para la aceleración de una partícula en cualquier lugar en el campo de flujo; éste es el método de descripción euleriano. Para determinar la aceleración de una partícula en un punto particular en un campo de flujo, se sustituyen las coordenadas del punto en la expresión de campo para la aceleración. En el método de descripción lagrangiano, el movimiento (posición, velocidad y aceleración) de la partícula se describe como una función del tiempo. Los métodos de descripción euleriano y lagrangiano se ilustran en el problema ejemplo 5.5.

[4] Al evaluar $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$, recuerde que $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ son funciones de θ (véase la nota 1 al pie en la p. 224).

EJEMPLO 5.5 Aceleración de una partícula en las descripciones euleriana y lagrangiana

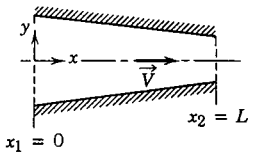
Considere un flujo unidimensional, estable e incompresible a través del canal plano convergente que se muestra. El campo de velocidad está dado por $\vec{V} = \vec{V}_1 [1 + (x/L)]\hat{i}$. Encuentre la componente x de la aceleración para una partícula que se mueve en el campo de flujo. Si empleamos el método de descripción de la mecánica de las partículas, la posición de la partícula, localizada en $x = 0$ en el tiempo $t = 0$, será una función del tiempo, $x_p = f(t)$. Obtenga una expresión para $f(t)$ y después, tomando la segunda derivada de la función con respecto al tiempo, obtenga una expresión para la componente x de la aceleración de la partícula.



PROBLEMA EJEMPLO 5.5

DATOS: El flujo estable, unidimensional e incompresible a través del canal convergente que se muestra.

$$\vec{V} = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right)\hat{i}$$



ENCUENTRE: *a*) La componente x de la aceleración de una partícula que se mueve en el campo de flujo.

b) Para la partícula localizada en $x = 0$ en $t = 0$, obtenga una expresión para su

1) posición, x_p, como una función del tiempo.
2) la componente de aceleración en x, a_{x_p}, como una función del tiempo.

SOLUCIÓN:

La aceleración de una partícula que se mueve en un campo de velocidad está dada por

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

La componente x de la aceleración es

$$\frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Para el campo de flujo dado, $v = w = 0$, y $u = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right)$.

Por tanto, $$\frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right)\frac{V_1}{L} = \frac{V_1^2}{L}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

{ Para determinar la aceleración de una partícula en cualquier punto en el campo de flujo, sólo sustituimos la ubicación presente de la partícula en el resultado anterior. }

En la segunda parte de este problema estamos interesados en seguir una partícula especial, la que se localiza en $x = 0$ cuando $t = 0$, conforme fluye a través del canal.

La coordenada x que localiza esta partícula será una función del tiempo, $x_p = f(t)$. Asimismo, $u_p = df/dt$ también será una función del tiempo. La partícula tendrá la velocidad correspondiente a su posición en el campo de velocidad. En $t = 0$, la partícula se encontrará en $x = 0$ y su velocidad será $u_p = V_1$. En algún tiempo posterior, t, la partícula alcanzará la salida, $x = L$; en ese tiempo tendrá velocidad $u_p = 2V_1$. Para encontrar la expresión correspondiente a $x_p = f(t)$, escribimos

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{df}{dt} = V_1\left(1 + \frac{x}{L}\right) = V_1\left(1 + \frac{f}{L}\right)$$

Separando variables, obtenemos

$$\frac{df}{(1 + f/L)} = V_1\, dt$$

Como en $t = 0$ la partícula en cuestión se localizaba en $x = 0$, y en t, esta partícula se ubica en $x_p = f$, entonces

$$\int_0^f \frac{df}{(1 + f/L)} = \int_0^t V_1\, dt \quad \text{y} \quad L \ln\left(1 + \frac{f}{L}\right) = V_1 t$$

Entonces, $\ln\left(1 + \frac{f}{L}\right) = \frac{V_1 t}{L}$, o $1 + \frac{f}{L} = e^{V_1 t/L}$

y

$$f = L[e^{V_1 t/L} - 1]$$

Después de esto, la posición de la partícula, localizada en $x = 0$ en $t = 0$, está dada como una función del tiempo por

$$x_p = f(t) = L[e^{V_1 t/L} - 1] \longleftarrow x_p$$

La componente x de la aceleración de esta partícula está determinada por

$$a_{x_p} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L} \longleftarrow a_{x_p}$$

Ahora tenemos dos maneras diferentes de expresar la aceleración de la partícula que se localizaba en $x = 0$ en $t = 0$. Advierta que a pesar de que el campo de flujo es estable, cuando seguimos una partícula especial, su posición y aceleración (y velocidad) son funciones del tiempo.

Confirmaremos que ambas expresiones para la aceleración proporcionan idénticos resultados:

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L} \qquad a_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

a) En $t = 0$, $x_p = 0$ — En $t = 0$, la partícula está en $x = 0$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^0 = \frac{V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(a)} \qquad \frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 0) = \frac{V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(a)}$$

Verifique.

b) Cuando $x_p = \frac{L}{2}$, $t = t_1$,

$$x_p = \frac{L}{2} = L[e^{V_1 t_1 / L} - 1]$$

Por tanto, $e^{V_1 t_1 / L} = 1.5$, y

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t_1 / L}$$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}(1.5) = \frac{1.5V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(b)}$$

En $x = 0.5L$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 0.5)$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1.5V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(b)}$$

Verifique.

c) Cuando $x_p = L$, $t = t_2$,

$$x_p = L = L[e^{V_1 t_2 / L} - 1]$$

Por tanto, $e^{V_1 t_2 / L} = 2$, y

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t_2 / L}$$

$$a_{x_p} = \frac{V_1^2}{L}(2) = \frac{2V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(c)}$$

En $x = L$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1 + 1)$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{2V_1^2}{L} \longleftarrow \text{(c)}$$

Verifique.

Este problema ilustra los métodos euleriano y lagrangiano para describir el movimiento de una partícula.

5-3.2 Rotación de un fluido

La rotación, $\vec{\omega}$, de una partícula de fluido se define como la velocidad angular promedio de dos cualesquiera elementos de línea mutuamente perpendiculares de la partícula. La rotación es una cantidad vectorial. Una partícula que se mueve en un campo de flujo tridimensional general puede rotar alrededor de los tres ejes de coordenadas. Por consiguiente, en general,

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$$

donde ω_x es la rotación en torno al eje x, ω_y es la rotación en torno al eje y y ω_z, la rotación alrededor del eje z. El sentido positivo de la rotación está determinado por la regla de la mano derecha.

Para obtener una expresión matemática relativa a la rotación del fluido, considere el movimiento de un elemento de fluido en el plano xy. Las componentes de la velocidad en cualquier punto en el campo de flujo están dadas por $u(x, y)$ y $v(x, y)$. La rotación de un elemento de fluido en tal campo de flujo se ilustra en la figura 5.7. Las dos líneas mutuamente perpendiculares, oa y ob, rotarán a las posiciones mostradas durante el intervalo Δt, sólo si las velocidades en los puntos a y b son diferentes a la velocidad en o.

Considere primero la rotación de la línea oa, de longitud Δx. La rotación de esta línea se debe a las variaciones de la componente y de la velocidad. Si esta componente en el punto o se toma como v_o, entonces la componente y de la velocidad en el punto a puede escribirse, empleando la serie de Taylor, como

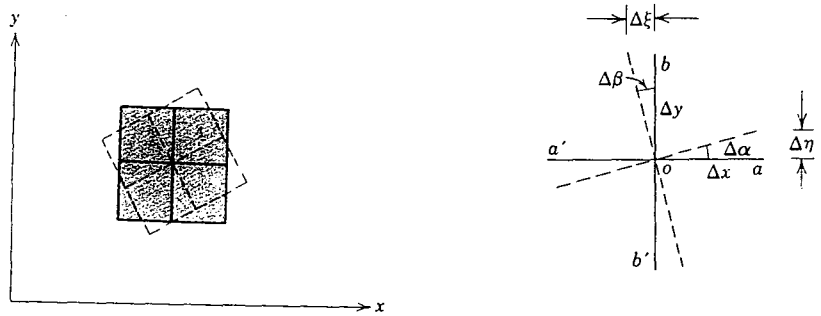


Fig. 5.7 Rotación de un elemento de fluido en un campo de flujo bidimensional.

$$v = v_o + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$$

La velocidad angular de la línea *oa* está dada por

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\eta/\Delta x}{\Delta t}$$

Como

$$\Delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\,\Delta t$$

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\partial v/\partial x)\Delta x\,\Delta t/\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

La rotación de la línea *ob*, de longitud Δy, es producto de las variaciones de la componente x de la velocidad. Si esta componente en el punto o se toma como u_o, entonces la componente x de la velocidad en el punto b puede expresarse, utilizando el desarrollo de la serie de Taylor, como

$$u = u_o + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

La velocidad angular de la línea *ob* está determinada por

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\xi/\Delta y}{\Delta t}$$

Puesto que

$$\Delta\xi = -\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\,\Delta t$$

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-(\partial u/\partial y)\Delta y\,\Delta t/\Delta y}{\Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

(Se incluye el signo negativo para dar un valor positivo de ω_{ob}. De acuerdo con nuestra convención de signos, la rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj es positiva.)

La rotación de un elemento de fluido alrededor del eje z es la velocidad angular promedio de los dos elementos de línea mutuamente perpendiculares, *oa* y *ob*, en el plano xy. En consecuencia,

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Al considerar la rotación de dos líneas mutuamente perpendiculares en los planos yz y xz, es posible demostrar que

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad \text{y} \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Luego,

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z = \frac{1}{2}\left[\hat{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{5.13}$$

Reconocemos al término en el paréntesis cuadrado como

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Por tanto, en notación vectorial, podemos escribir

$$\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}\nabla \times \vec{V} \tag{5.14}$$

¿Bajo qué condiciones esperaríamos tener un flujo irrotacional? Una partícula de fluido moviéndose, sin rotación, en un campo de flujo no puede desarrollar una rotación bajo la acción de una fuerza másica o de fuerzas de superficie normales (presión). El desarrollo de rotación en una partícula de fluido, inicialmente sin ese movimiento, requiere la acción de un esfuerzo de corte sobre la superficie de la partícula. Puesto que el esfuerzo de corte es proporcional a la relación de deformación angular, entonces una partícula que se encuentra inicialmente sin rotación no desarrollará una rotación sin una deformación angular simultánea. El esfuerzo de corte se relaciona con la relación de la deformación angular mediante la viscosidad. La presencia de fuerzas viscosas significa que el flujo es rotacional.[5]

La condición de irrotacionalidad puede ser una suposición válida para aquellas regiones de un flujo en las que son despreciables las fuerzas viscosas.[6] (Por ejemplo, una de tales regiones existe fuera de la capa límite en el flujo sobre una superficie sólida.) El factor de $\frac{1}{2}$ puede eliminarse en la ecuación 5.12 definiendo una cantidad llamada la *vorticidad*, $\vec{\zeta}$, como el doble de la rotación.

$$\vec{\zeta} \equiv 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \tag{5.15}$$

La vorticidad es una medida de la rotación de un elemento de fluido conforme éste se mueve en el campo de flujo. En coordenadas cilíndricas la vorticidad es[7]

$$\nabla \times \vec{V} = \hat{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \hat{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \hat{k}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) \tag{5.16}$$

[5] Una demostración rigurosa empleando las ecuaciones de movimiento completas para una partícula de fluido se presenta en [1] pp. 160-163. (Las referencias se encuentran justo después de los objetivos, véase pág. 248).

[6] En la película de la NCFMF, *Vorticidad*, A. H. Shapiro, director, se presentan ejemplos de movimiento rotacional e irrotacional.

[7] Al llevar a cabo la operación del rotacional, recuerde que $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ son funciones de θ (véase la nota 1 al pie en la p. 224).

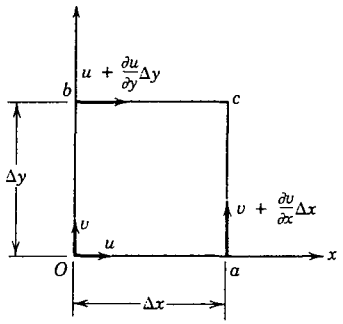


Fig. 5.8 Componentes de velocidad en las fronteras de un elemento de fluido.

La *circulación*, Γ, se define como la integral de línea de la componente de la velocidad tangencial alrededor de una curva cerrada fija en el flujo,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \tag{5.17}$$

donde $d\vec{s}$ es un vector elemental, de longitud ds, tangente a la curva; un sentido positivo corresponde a una trayectoria de integración alrededor de la curva en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Es posible obtener una relación entre la circulación y la vorticidad considerando el elemento de fluido de la figura 5.7. El elemento se ha redibujado en la figura 5.8; las variaciones de velocidad indicadas son congruentes con las que se utilizaron al determinar la rotación del fluido.

En la curva cerrada *oacb*,

$$d\Gamma = u\Delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - v\,\Delta y$$

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

$$d\Gamma = 2\omega_z\,\Delta x\,\Delta y$$

Por tanto,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z\,dA = \int_A (\nabla \times \vec{V})_z\,dA \tag{5.18}$$

La ecuación 5.18 es un enunciado del teorema de Stokes en dos dimensiones. Así, la circulación alrededor de un contorno cerrado es la suma de la vorticidad encerrada dentro de él.

EJEMPLO 5.6 Flujos de vórtice libre y forzado

Considere campos de flujo con movimiento puramente tangencial (líneas de corriente circulares): $V_r = 0$ y $V_\theta = f(r)$. Evalúe la rotación, vorticidad y circulación para la rotación de un cuerpo rígido, es decir, un *vórtice forzado*. Demuestre que es posible elegir $f(r)$ de manera que el flujo sea irrotacional, esto es, producir un *vórtice libre*.

PROBLEMA EJEMPLO 5.6

DATOS: Un campo de flujo con movimiento tangencial, $V_r = 0$ y $V_\theta = f(r)$.

ENCUENTRE: *a*) La rotación, vorticidad y circulación para el movimiento de un cuerpo rígido (un *vórtice forzado*).

b) Evalúe $f(r)$ para movimiento irrotacional (un *vórtice libre*).

SOLUCIÓN:

Ecuación básica: $$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \tag{5.15}$$

Para el movimiento en el plano $r\ \theta$, las únicas componentes de rotación y vorticidad se encuentran en la dirección z,

$$\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}$$

En virtud de que $V_r = 0$ en cualquier parte en este campo, esto se reduce a $\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}$.

a) Para rotación de cuerpo rígido, $V_\theta = \omega r$.

Entonces $\omega_z = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\omega r^2 = \frac{1}{2r}(2\omega r) = \omega$ y $\zeta_z = 2\omega$.

La circulación es $\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z\, dA.$ (5.18)

Puesto que $\omega_z = \omega =$ constante, la circulación alrededor de cualquier contorno cerrado está dada por $\Gamma = 2\omega A$, donde A es el área encerrada por el contorno. Así, para el movimiento de cuerpo rígido (un vórtice forzado), la rotación y la vorticidad son constantes; la circulación depende del área encerrada por el contorno.

b) Para flujo irrotacional, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r V_\theta = 0$. Integrando, encontramos

$$r V_\theta = \text{constante} \quad \text{o} \quad V_\theta = f(r) = \frac{C}{r}$$

Para este flujo, el origen es un punto singular donde $V_\theta \to \infty$. La circulación para cualquier contorno que encierra el origen es

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r}\, r\, d\theta = 2\pi C$$

La circulación alrededor de cualquier contorno que no encierre el punto singular en el origen es cero.

5-3.3 Deformación de fluido

La deformación angular de un elemento de fluido implica cambios en el ángulo entre dos líneas mutuamente perpendiculares en el fluido. Refiriéndonos a la figura 5.9, vemos que la relación de

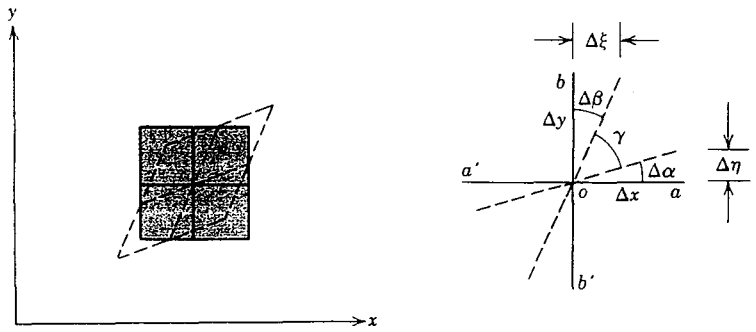


Fig. 5.9 Deformación angular de un elemento de fluido en un campo de flujo bidimensional.

deformación angular del elemento de fluido es la relación de disminución del ángulo entre las líneas *oa* y *ob*. La relación de deformación angular está dada por

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

Ahora,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\eta/\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\partial v/\partial x)\Delta x\, \Delta t/\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

y

$$\frac{d\beta}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\xi/\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\partial u/\partial y)\Delta y\, \Delta t/\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

En consecuencia, la relación de deformación angular en el plano *xy* es

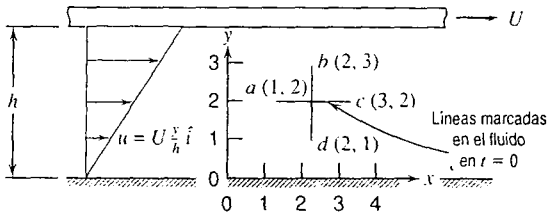
$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.19}$$

El esfuerzo de corte se relaciona con la relación de deformación angular mediante la viscosidad del fluido. En un flujo viscoso (donde están presentes gradientes de velocidad), es altamente improbable que $\partial v/\partial x$ sea igual y opuesta a $\partial u/\partial y$ por todo el campo de flujo (por ejemplo, considere el flujo de capa límite de la figura 2.11 y el flujo sobre un cilindro, mostrado en la figura 2.12). La presencia de fuerzas viscosas significa que el flujo es rotacional.

El cálculo de la deformación angular se ilustra para un campo de flujo simple en el problema ejemplo 5.7.

EJEMPLO 5.7 Rotación en un flujo viscométrico

Se muestra un flujo viscométrico que se encuentra en el estrecho claro entre placas paralelas largas. El campo de velocidad en el claro está dado por $\vec{V} = U(y/h)\hat{i}$ donde $U = 4$ mm/s y $h = 4$ mm. En $t = 0$, dos líneas, *ac* y *bd*, se marcan en el fluido como se indica. Evalúe las posiciones de los puntos marcados en $t = 1.5$ s y dibuje para comparar. Calcule la relación de deformación angular y la de rotación de una partícula de fluido en este campo de velocidad. Comente sus resultados.



PROBLEMA EJEMPLO 5.7

DATOS: El campo de velocidad, $\vec{V} = U\frac{y}{h}\hat{i}$; $U = 4$ mm/s y $h = 4$ mm. Las partículas de fluido marcadas en $t = 0$ para formar el cruce como se muestra.

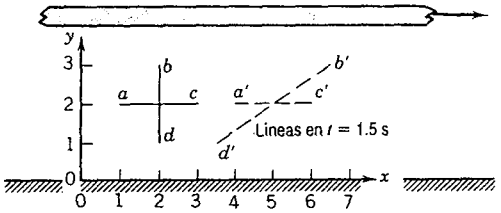
ENCUENTRE:
a) Las posiciones de los puntos a', b', c' y d' en $t = 1.5$ s; grafique.
b) La relación de deformación angular.
c) La relación de rotación de una partícula de fluido.
d) Comente la importancia de estos resultados.

SOLUCIÓN:

Para el campo de flujo dado, $v = 0$, por lo que no hay movimiento vertical. La velocidad de cada punto permanece constante, así que $\Delta x = u\Delta t$ en cada punto. En el punto *b*, $u = 3$ mm/s, por lo que

$$\Delta x_b = \frac{3 \text{ mm}}{\text{s}} \times 1.5 \text{ s} = 4.5 \text{ mm}$$

Cada uno de los puntos *a* y *c* se mueve 3 mm, mientras que el punto *d* se mueve 1.5 mm. La gráfica en $t = 1.5$ s es



La relación de deformación angular es

$$-\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = U\frac{1}{h} + 0 = \frac{U}{h} = \frac{4 \text{ mm}}{\text{s}} \times \frac{1}{4 \text{ mm}} = 1 \text{ s}^{-1} \longleftarrow -\dot{\gamma}$$

La relación de rotación es

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{U}{h}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{4 \text{ mm}}{\text{s}} \times \frac{1}{4 \text{ mm}} = -0.5 \text{ s}^{-1} \longleftarrow \omega_z$$

Este flujo es viscoso, por lo que esperamos que tenga tanto deformación angular como rotación; la forma y la orientación de una partícula de fluido cambian. Los conceptos de rotación y deformación se tratan ampliamente en la película de la NCFMF, *Deformación de medios continuos*, J. L. Lumley, director.

Durante la deformación lineal, la forma del elemento de fluido, descrita por los ángulos y sus vértices, permanece invariable, puesto que todos los ángulos rectos continúan siéndolo (véase la figura 5.5). El elemento cambiará su longitud en la dirección *x* sólo si $\partial u/\partial x$ es diferente de cero. Similarmente, un cambio en la dimensión *y* requiere un valor para $\partial v/\partial y$, diferente de cero y un cambio en la dimensión *z* implica un valor que no sea cero de $\partial w/\partial z$. Estas cantidades representan

las componentes de las relaciones longitudinales de deformación en las direcciones x, y y z, respectivamente. Los cambios en la longitud de los lados pueden producir, a su vez, cambios en el volumen del elemento. La relación de la *dilatación volumétrica* local instantánea está dada por

$$\text{Relación de dilatación volumétrica} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} \tag{5.20}$$

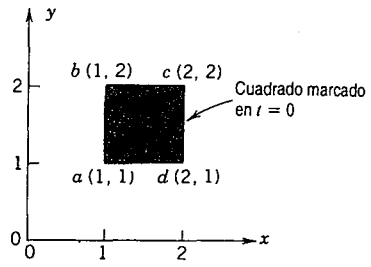
Para flujo incompresible, la relación de dilatación volumétrica es cero.

EJEMPLO 5.8 Relaciones de deformación para un flujo en una esquina

El campo de velocidad $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ representa el flujo en una "esquina", como se mostró en el problema ejemplo 5.4. Considere el caso donde $A = 0.3\ s^{-1}$ y las coordenadas se midan en metros. Se marca un cuadrado en el fluido como se indica en $t = 0$. Evalúe las nuevas posiciones de los cuatro puntos esquina, cuando el punto a se ha movido a $x = \frac{1}{2}$ m después de τ segundos. Evalúe las relaciones de deformación lineal en la dirección x y y. Compare el área $a'b'c'd'$ en $t = \tau$ con el área $abcd$ en $t = 0$. Comente el resultado.

PROBLEMA EJEMPLO 5.8

DATOS: $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$; $A = 0.3\ s^{-1}$, x y y en metros.



ENCUENTRE:
a) La posición del cuadrado en $t = \tau$, cuando a está en a' en $x = \frac{1}{2}$ m.
b) Las relaciones de deformación lineal.
c) Compare el área $a'b'c'd'$ con $abcd$.
d) Comente los resultados.

SOLUCIÓN:

Primero necesitamos encontrar τ, por lo que debemos seguir una partícula de fluido empleando la descripción lagrangiana. De tal modo,

$$u = \frac{dx_p}{dt} = Ax_p \qquad \frac{dx}{x} = A\,dt \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^{\tau} A\,dt \qquad \ln \frac{x}{x_0} = A\tau$$

$$\tau = \frac{\ln x/x_0}{A} = \frac{\ln (\frac{1}{2})}{0.3\ s^{-1}} = 1.35\ s$$

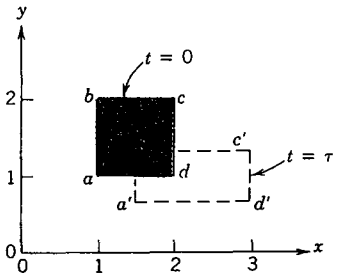
En la dirección y

$$v = \frac{dy_p}{dt} = -Ay_p \qquad \frac{dy}{y} = -A\,dt \qquad \frac{y}{y_0} = e^{-A\tau}$$

Las coordenadas del punto en τ son:

Punto	$t = 0$	$t = \tau$
a	(1, 1)	$(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$
b	(1, 2)	$(\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$
c	(2, 2)	$(3, \frac{4}{3})$
d	(2, 1)	$(3, \frac{2}{3})$

La gráfica es:



Las relaciones de deformación lineal son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}Ax = A = 0.3 \text{ sec}^{-1} \qquad \text{en la dirección } x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-Ay) = -A = -0.3 \text{ sec}^{-1} \qquad \text{en la dirección } y$$

La relación de dilatación volumétrica es

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A - A = 0$$

Área $abcd$ = 1 m^2 y área $a'b'c'd' = (3 - \frac{1}{2})(\frac{4}{3} - \frac{2}{3})$ = 1 m^2.

Note que los planos paralelos permanecen paralelos, es decir, hay deformación lineal pero no angular. Las relaciones de deformación lineal son iguales y opuestas, de modo que el área de la región marcada se conserva.

En la película de la NCFMF, *Visualización de películas* –S. J. Kline, director— se emplean burbujas de hidrógeno marcadoras de tiempo para demostrar, experimentalmente, que el área de un cuadrado de fluido marcado se conserva en un flujo bidimensional incompresible.

En esta sección hemos demostrado que el campo de velocidad contiene toda la información necesaria para determinar la aceleración, rotación y deformación de una partícula en un flujo.

5-4 ECUACIÓN DEL MOMENTO

Una ecuación de la dinámica que describa el movimiento del fluido puede obtenerse mediante la aplicación de la segunda ley de Newton a una partícula. Para deducir la forma diferencial de la ecuación del momento, debemos aplicar la segunda ley de Newton a una partícula, de masa dm, de fluido infinitesimal.

Recuerde que la segunda ley de Newton para un sistema finito está dada por

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\bigg)_{\text{sistema}} \tag{4.2a}$$

donde el momento lineal, $\vec{P}$, del sistema está determinado por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{\text{masa (sistema)}} \vec{V}\, dm \tag{4.2b}$$

Entonces, para un sistema infinitesimal de masa dm, la segunda ley de Newton puede expresarse

$$d\vec{F} = dm\frac{d\vec{V}}{dt}\bigg)_{\text{sistema}} \tag{5.21}$$

Habiendo obtenido una expresión para la aceleración de un elemento de fluido de masa dm, moviéndose en un campo de velocidad (ecuación 5.9), podemos escribir la segunda ley de Newton como la ecuación vectorial

$$d\vec{F} = dm\frac{D\vec{V}}{Dt} = dm\left[u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right] \tag{5.22}$$

Después de esto, necesitamos obtener una formulación adecuada para la fuerza, $d\vec{F}$, o sus componentes, dF_x, dF_y y dF_z, que actúan sobre el elemento.

5-4.1 Fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido

Recuerde que las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido pueden clasificarse como fuerzas másicas y fuerzas de superficie; las de superficie incluyen tanto las fuerzas normales como las tangenciales (de corte).

Consideraremos la componente x de la fuerza actuando sobre un elemento diferencial de masa dm y volumen $d\forall = dx\,dy\,dz$. Sólo aquellos esfuerzos que actúen en la dirección x originarán fuerzas superficiales en esta dirección. Si los esfuerzos en el centro del elemento diferencial se toman como σ_{xx}, τ_{yx} y τ_{zx}, entonces los esfuerzos que actúan en la dirección x sobre cada cara del elemento (obtenidos mediante la expansión de una serie de Taylor en torno al centro del elemento) serán como se muestran en la figura 5.10.

Para obtener la fuerza superficial neta en la dirección x, dF_{S_x}, debemos sumar las fuerzas en la dirección x. De tal modo,

$$\begin{aligned} dF_{S_x} = &\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz \\ &+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz \\ &+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy \end{aligned}$$

Al simplificar, obtenemos

$$dF_{S_x} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Cuando la fuerza de la gravedad es la única fuerza másica que actúa, entonces la fuerza másica por unidad de masa es $\vec{g}$. La fuerza neta en la dirección x, dF_x, está determinada por

$$dF_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left(\rho g_x + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \tag{5.23a}$$

Expresiones similares pueden deducirse para las componentes de fuerzas en las direcciones y y z:

$$dF_y = dF_{B_y} + dF_{S_y} = \left(\rho g_y + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \tag{5.23b}$$

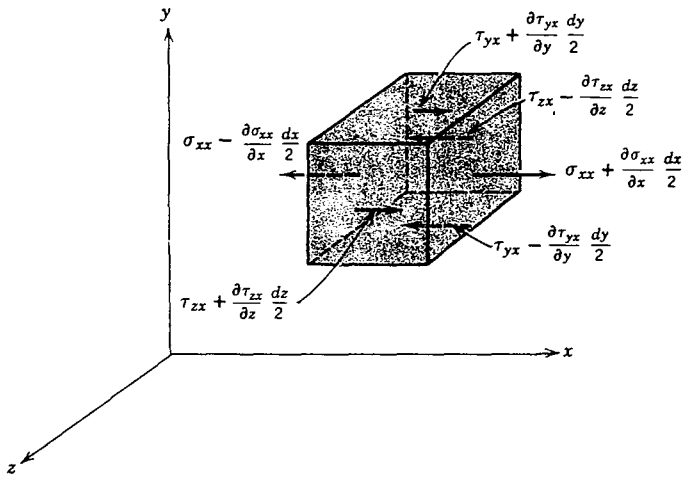


Fig. 5.10 Esfuerzos en la dirección x sobre un elemento de fluido.

$$dF_z = dF_{B_z} + dF_{S_z} = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \tag{5.23c}$$

5-4.2 Ecuación diferencial del momento

Hemos formulado expresiones para las componentes, dF_x, dF_y y dF_z, de la fuerza, $d\vec{F}$, que actúa sobre el elemento de masa dm. Si sustituimos estas expresiones (ecuaciones 5.23) para las componentes de fuerza en las componentes x, y y z de la ecuación 5.22, obtendremos las ecuaciones diferenciales de movimiento,

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{5.24a}$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{5.24b}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{5.24c}$$

Las ecuaciones 5.24 son las ecuaciones diferenciales de movimiento para cualquier fluido que satisfaga la suposición de continuidad. Antes de que las ecuaciones puedan emplearse para resolver problemas, deben obtenerse expresiones adecuadas para los esfuerzos en términos de los campos de velocidad y presión.

5-4.3 Fluido newtoniano: ecuaciones de Navier-Stokes

En un fluido newtoniano, el esfuerzo viscoso es proporcional a la relación de deformación cortante (relación de deformación angular). Los esfuerzos pueden expresarse en términos de gradientes de

velocidad y las propiedades del fluido en coordenadas rectangulares como sigue:[8]

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{5.25a}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{5.25b}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{5.25c}$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.25d}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{5.25e}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{5.25f}$$

donde p es la presión termodinámica local.

Si estas expresiones se introducen en las ecuaciones diferenciales de movimiento (ecuaciones 5.24), obtenemos

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \tag{5.26a}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \tag{5.26b}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}\right)\right] \tag{5.26c}$$

Estas ecuaciones de movimiento se denominan ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones se simplifican considerablemente cuando se aplican a flujo incompresible con viscosidad constante. Bajo estas condiciones se reducen a

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{5.27a}$$

[8] La deducción de estos resultados está más allá del alcance de este libro. Las deducciones detalladas pueden encontrarse en las referencias 2, 3 y 4.

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (5.27b)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (5.27c)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, para densidad y viscosidad constantes, se proporcionan en el apéndice B.

En el caso de flujos sin fricción ($\mu = 0$), las ecuaciones de movimiento (5.26 o 5.27) se reducen a la ecuación de Euler,

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\nabla p$$

Consideraremos el caso de flujo sin fricción en el capítulo 6.

5-5 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 5, usted será capaz de efectuar lo siguiente:

1. Escribir la expresión diferencial de la conservación de la masa en *a*) forma vectorial, *b*) coordenadas rectangulares y *c*) coordenadas cilíndricas.
2. Dada una expresión algebraica para el campo de velocidad, determinar si el campo representa un posible flujo incompresible.
3. Dada una componente de velocidad en un campo de flujo bidimensional, evaluar otra componente para flujo estable e incompresible.
**4. Para un campo de flujo bidimensional incompresible, definir la función de corriente, ψ; dado el campo de velocidad, determinar la función de corriente; dada la función de corriente, determinar el campo de velocidad.
5. Para una partícula de fluido que se mueve en un campo de velocidad determinado, determinar las aceleraciones total, convectiva y local.
6. Para una partícula de fluido que se mueve en un campo de flujo, ilustrar su traslación, rotación, deformación lineal y deformación angular.
7. Definir la rotación, vorticidad y circulación de un fluido.
8. Escribir la forma diferencial de la ecuación del momento para flujo viscoso y establecer el significado físico de cada término en la ecuación.
9. Resolver los problemas al final del capítulo, que se relacionan con el material que usted ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Li, W. H., y S. H. Lam, *Principles of Fluid Mechanics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1964.
2. Daily, J. W., y D. R. F. Harleman, *Fluid Dynamics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
3. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 7a ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1979.
4. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1991.

** Este objetivo se aplica a una sección que puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

PROBLEMAS

5.1

5.2

5.

5.

5

5

5

$+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big)$ (5.27b)

$+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big)$ (5.27c)

ı densidad y viscosidad

ı (5.26 o 5.27) se reducen

iiente:

vectorial, *b*) coordenadas

mpo representa un posible

luar otra componente para

ɔrriente, ψ; dado el campo

e, determinar el campo de

erminado, determinar las

r su traslación, rotación,

/ establecer el significado

l que usted ha estudiado.

ɔn-Wesley, 1964.
Wesley, 1966.
1979.

ɛrial del texto.

PROBLEMAS

5.1 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de ecuaciones representan posibles casos de flujo bidimensional incompresible?

(a) $u = x + y;\ v = x - y$
(b) $u = x + 2y;\ v = x^2 - y^2$
(c) $u = 4x + y;\ v = x - y^2$
(d) $u = xt + 2y;\ v = x^2 - yt^2$
(e) $u = xt^2;\ v = xyt + y^2$

5.2 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de ecuaciones representan posibles casos de flujo bidimensional incompresible?

(a) $u = 2x^2 + y^2;\ v = x^3 - x(y^2 - 2y)$
(b) $u = 2xy - x^2 + y;\ v = 2xy - y^2 + x^2$
(c) $u = xt + 2y;\ v = xt^2 - yt$
(d) $u = (x + 2y)xt;\ v = (2x - y)yt$

5.3 ¿Cuál de los siguientes conjuntos de ecuaciones representa posibles casos de flujo tridimensional incompresible?

(a) $u = x + y + z^2;\ v = x - y + z;\ w = 2xy + y^2 + 4$
(b) $u = xyzt;\ v = -xyzt^2;\ w = (z^2/2)(xt^2 - yt)$
(c) $u = y^2 + 2xz;\ v = -2yz + x^2yz;\ w = \frac{1}{2}x^2z^2 + x^3y^4$

5.4 Las tres componentes de velocidad en un campo de velocidad están determinadas por medio de $u = Ax + By + Cz$, $v = Dx + Ey + Fz$ y $w = Gx + Hy + Jz$. Determine la relación entre los coeficientes (*A*-*J*) que es necesaria para este posible campo de flujo incompresible.

5.5 En un flujo en el plano *xy*, la componente *y* de velocidad es $v = y^2 - 2x + 2y$. Determine una posible componente *x* para flujo estable e incompresible. ¿Ésta también es válida para flujo inestable e incompresible? ¿Por qué? ¿Cuántas componentes *x* posibles hay?

5.6 La componente *x* de velocidad en un campo de flujo estable e incompresible en el plano *xy* es $u = A/x$, donde $A = 2$ m^2/s y *x* se mide en metros. Encuentre la componente de velocidad *y* más simple para este campo de flujo.

5.7 Una aproximación burda para la componente *x* de velocidad en una capa límite laminar incompresible es una variación lineal desde $u = 0$ en la superficie ($y = 0$), hasta la velocidad de corriente libre, *U*, en el borde de la capa límite ($y = \delta$). La ecuación para el perfil es $u = Uy/\delta$, donde $\delta = cx^{1/2}$ y *c* es una constante. Demuestre que la expresión más simple para la componente *y* de velocidad es $v = Uy/4x$. Evalúe el valor máximo del cociente v/U, en una posición donde $x = 0.5$ m y $\delta = 5$ mm.

5.8 Una aproximación útil para la componente *x* de velocidad en una capa límite laminar incompresible es una variación parabólica de $u = 0$ en la superficie ($y = 0$), hasta la velocidad de corriente libre, *U*, en el borde de la capa límite ($y = \delta$). La ecuación para el perfil es $u/U = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$, donde $\delta = cx^{1/2}$ y *c* es una constante. Demuestre que la expresión más simple para la componente *y* de la velocidad es

$$\frac{v}{U} = \frac{\delta}{x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$$

Obtenga una expresión para el valor máximo del cociente v/U. Evalúe en una posición donde $\delta = 5$ mm y $x = 0.5$ m.

5.9 Una aproximación útil para la componente *x* de velocidad en una capa límite laminar incompresible es una variación senoidal desde $u = 0$ en la superficie ($y = 0$), hasta la velocidad de corriente libre, *U*, en el borde de la capa límite ($y = \delta$). La ecuación para el perfil es $u = U\,\text{sen}(\pi y/2\delta)$, donde $\delta = cx^{1/2}$ y *c* es una constante. Demuestre que la expresión más simple para la componente *y* de velocidad es

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{\pi}\frac{\delta}{x}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) - 1\right]$$

Obtenga una expresión para el valor máximo del cociente v/U. Evalúe en una posición en la que $x = 0.5$ m y $\delta = 5$ mm.

5.10 Considere el campo de velocidad inestable y unidimensional en el cual la única componente de velocidad es $u = Axt$, donde u está en pies/s, x en pies, t en segundos y $A = 5\ s^{-2}$. Suponiendo que la densidad es función sólo del tiempo, obtenga una expresión general para ρ. Demuestre que $\rho/\rho_0 = e^{-At^2/2}$ es una solución posible.

5.11 ¿Cuál de los siguientes conjuntos de ecuaciones representa posibles casos de flujo incompresible?

(a) $V_r = U\cos\theta$; $V_\theta = -U\operatorname{sen}\theta$
(b) $V_r = -q/2\pi r$; $V_\theta = K/2\pi r$
(c) $V_r = U\cos\theta\,[1-(a/r)^2]$; $V_\theta = -U\operatorname{sen}\theta\,[1+(a/r)^2]$

5.12 Un campo de velocidad en coordenadas cilíndricas está dado como

$$\vec{V} = \left(\frac{q}{2\pi r} + U\cos\theta\right)\hat{e}_r - U\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$$

donde $q = 200$ m^2/s y $U = 10$ m/s. Demuestre que éste es un caso posible de flujo incompresible. Localice los puntos de estancamiento donde $|\vec{V}| = 0$.

5.13 Para un flujo incompresible en el plano $r\theta$, la componente r de velocidad está dada como $V_r = -\Lambda\cos\theta/r^2$. Determine una posible componente θ de velocidad. ¿Cuántas posibles componentes θ hay?

5.14 Un líquido viscoso se divide entre dos discos paralelos de radio R; uno de los discos gira mientras el otro está fijo. El campo de velocidad es puramente tangencial y la velocidad varía linealmente con z, desde $V_\theta = 0$ en $z = 0$ (el disco fijo) hasta la velocidad del disco giratorio en su superficie ($z = h$). Deduzca una expresión para el campo de velocidad entre los discos.

5.15 Un campo de velocidad en coordenadas cilíndricas está dado como $\vec{V} = (A/r)(\hat{e}_r + \hat{e}_\theta)$, donde $A = 0.25$ m^2/s. ¿Esto representa un posible caso de flujo incompresible? Obtenga la ecuación para una línea de corriente que pasa por el punto $r_0 = 1$ m, $\theta = 0$. Compare con la línea de trayectoria que pasa por el mismo punto.

****5.16** Un campo de flujo uniforme está inclinado un ángulo α sobre el eje x. Evalúe las componentes u y v de la velocidad. Determine la función de corriente para este campo de flujo.

****5.17** La función de corriente para cierto flujo incompresible está dada como $\psi = Axy$. Grafique varias líneas de corriente, incluyendo $\psi = 0$. Obtenga una expresión para el campo de velocidad.

****5.18** El campo de velocidad para el flujo viscométrico del problema ejemplo 5.7 es $\vec{V} = U(y/h)\hat{i}$. Encuentre la función de corriente para este flujo. Localice la línea de corriente que divide la relación de flujo total en dos partes iguales.

****5.19** Determine la familia de funciones ψ que producirá el campo de velocidad $\vec{V} = (x^2 - y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$.

****5.20** ¿El campo de velocidad del problema 5.15 representa un caso posible de flujo incompresible? Si es así, evalúe la función de corriente para el flujo. Si no, evalúe la relación de cambio de la densidad en el campo de flujo.

****5.21** La función de corriente para cierto campo de flujo incompresible está dada por la expresión $\psi = Ur\operatorname{sen}\theta + q\theta/2\pi$. Obtenga una expresión para el campo de velocidad. Encuentre el (los) punto(s) de estancamiento donde $|\vec{V}| = 0$ y demuestre que ahí $\psi = 0$.

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

**5.22 El flujo incompresible alrededor de un cilindro circular de radio a se representa por medio de la función de corriente $\psi = Ur\,\text{sen}\theta + Ua^2\,\text{sen}\theta/r$, donde U representa la velocidad de la corriente libre. Obtenga una expresión para el campo de velocidad. Demuestre que $V_r = 0$ a lo largo del círculo $r = a$. Localice los puntos a lo largo de $r = a$, donde $|\vec{V}| = U$.

**5.23 Considere un flujo con componentes de velocidad $u = 0$, $v = -y^3 - 4z$, y $w = 3y^2z$.

a) ¿Se trata de un flujo uni, bi o tridimensional?

b) Demuestre si éste es un flujo compresible o incompresible.

c) Si es posible, deduzca una función de corriente para este flujo.

**5.24 Un campo de flujo incompresible sin fricción se especifica mediante la función de corriente $\psi = -6Ax - 8Ay$, donde $A = 1$ m/s y x y y son coordenadas en metros. Dibuje las líneas de corriente $\psi = 0$ y $\psi = 8$. Indique la dirección del vector velocidad en el punto (0, 0) sobre el dibujo. Determine la magnitud de la relación de flujo entre las líneas de corriente que pasan por los puntos (2, 2) y (4, 1).

**5.25 En un flujo unidimensional paralelo en la dirección x positiva, la velocidad varía linealmente desde cero en $y = 0$, hasta 100 pies/s en $y = 4$ pies. Determine una expresión para la función de corriente, ψ. Determine también la coordenada y sobre la cual la relación de flujo volumétrico es la mitad de la total entre $y = 0$ y $y = 4$ pies.

**5.26 Se empleó un perfil de velocidad lineal para modelar el flujo en la capa límite laminar incompresible del problema 5.7. Deduzca la función de corriente para este campo de flujo. Localice las líneas de corriente en la cuarta parte y en la mitad de la relación de flujo volumétrico total en la capa límite.

**5.27 Se utilizó un perfil de velocidad parabólico para modelar el flujo de la capa límite laminar incompresible del problema 5.8. Deduzca la función de corriente para este campo de flujo. Localice las líneas de corriente en la cuarta parte y en la mitad de la relación de flujo volumétrico total en la capa límite.

**5.28 Deduzca la función de corriente que represente la aproximación senoidal utilizada para modelar la componente x de velocidad para la capa límite del problema 5.9. Localice las líneas de corriente en la cuarta parte y en la mitad de la relación de flujo volumétrico total en la capa límite.

**5.29 En el problema ejemplo 5.6, se modeló el movimiento de un cuerpo rígido mediante el campo de velocidad $\vec{V} = r\,\omega\,\hat{e}_\theta$. Encuentre la función de corriente para este flujo. Evalúe el flujo volumétrico por unidad de profundidad entre $r_1 = 0.05$ m y $r_2 = 0.07$ m, si $\omega = 0.5$ rad/s. Dibuje el perfil de velocidad a lo largo de una línea de θ constante. Verifique la relación de flujo calculada a partir de la función de corriente, integrando el perfil de velocidad a lo largo de esta línea.

**5.30 En el problema ejemplo 5.6, se demostró que el campo de velocidad para un vórtice libre en el plano $r\,\theta$ es $\vec{V} = \hat{e}_\theta\ C/r$. Encuentre la función de corriente para este flujo. Evalúe el flujo volumétrico por unidad de profundidad entre $r_1 = 0.05$ m y $r_2 = 0.07$, si $C = 0.5$ m^2/s. Dibuje el perfil de velocidad a lo largo de una línea de θ constante. Compruebe la relación de flujo calculada a partir de la función de corriente, integrando el perfil de velocidad a lo largo de esta línea.

**5.31 El flujo en un "sector" con un ángulo contenido $\alpha = \pi/n$ se representa mediante la función de corriente $\psi = U r^n\,\text{sen}(n\,\theta)$. Demuestre que para $n = 2$, esta función de corriente se reduce a la forma encontrada en el problema ejemplo 5.4 para el flujo en una esquina cuadrada ($\alpha = \pi/2$).

5.32 Considere el campo de velocidad $\vec{V} = Axy\hat{i} - \frac{1}{2}Ay^2\hat{j}$ en el plano xy, donde $A = 0.25$ m$^{-1}\cdot$s^{-1} y las coordenadas se miden en metros. ¿Éste es un posible campo de flujo incompresible? Calcule la aceleración de una partícula de fluido en el punto $(x, y) = (2, 1)$.

5.33 Considere el campo de flujo dado por $\vec{V} = xy^2\hat{i} - \frac{1}{3}y^3\hat{j} + xy\hat{k}$. Determine *a*) el número de dimensiones del flujo, *b*) si éste es un posible flujo incompresible y *c*) la aceleración de una partícula de fluido en el punto $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

5.34 Considere el campo de flujo dado por $\vec{V} = ax^2y\hat{i} - byz\hat{j} + cz^2\hat{k}$, donde $a = 1$ m$^{-2}\cdot$s^{-1}, $b = 3$ s^{-1}

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

y $c = 2\ m^{-1} \cdot s^{-1}$. Determine *a*) el número de dimensiones del flujo, *b*) si es posible que éste sea incompresible, y *c*) la aceleración de una partícula del fluido en el punto $(x, y, z) = (3, 1, 2)$.

5.35 El campo de velocidad dentro de una capa límite laminar está dado por la expresión

$$\vec{V} = \frac{AUy}{x^{1/2}}\hat{i} + \frac{AUy^2}{4x^{3/2}}\hat{j}$$

En esta expresión, $A = 141\ m^{-1/2}$, y $U = 0.240$ m/s es la velocidad de la corriente libre. Muestre que este campo de velocidad representa un posible flujo incompresible. Calcule la aceleración de una partícula de fluido en el punto $(x, y) = (0.5\ m, 5\ mm)$.

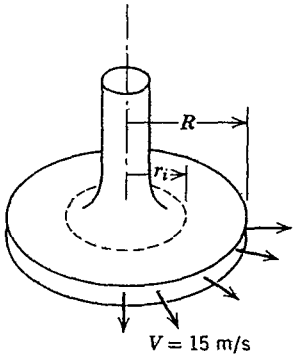
5.36 La componente *y* de velocidad en un campo de flujo bidimensional incompresible está dada por $v = -Axy$, donde v está en m/s, x y y están en metros y A es una constante dimensional. No hay componente de velocidad o variación en la dirección z. Determine las dimensiones de la constante, A. Encuentre la componente x más simple de velocidad en este campo de flujo. Calcule la aceleración de una partícula de fluido en el punto $(x, y) = (1, 2)$.

5.37 La componente x de velocidad en un flujo estable e incompresible en el plano xy es $u = A/x$, donde $A = 2\ m^2/s$ y x se mide en metros. Demuestre que la componente y más simple de velocidad para este campo de flujo es $v = Ay/x^2$. Evalúe la aceleración de una partícula de fluido en el punto $(x, y) = (1, 3)$.

5.38 La variación en el área de sección transversal con respecto a la distancia a lo largo de un difusor puede expresarse como $A = A_1 e^{ax}$, donde A_1 es el área de la sección transversal en la entrada del difusor. Suponga que el flujo es incompresible y uniforme en cualquier sección transversal. Dibuje las variaciones del área y la velocidad a lo largo del difusor como funciones de x. Desarrolle una expresión algebraica para la aceleración de una partícula de fluido en el difusor, en términos de V_1 y x.

5.39 Resuelva el problema 4.123 para demostrar que la velocidad radial en el espacio estrecho es $V_r = Q/2\pi rh$. Deduzca una expresión para la aceleración de una partícula de fluido en el espacio estrecho.

5.40 Considere el flujo de aire de baja velocidad entre los discos paralelos según se muestra. Suponga que el flujo es incompresible y no viscoso y que la velocidad es puramente radial y uniforme en cualquier sección. La velocidad de flujo es $V = 15$ m/s en $R = 75$ mm. Simplifique la ecuación de continuidad a una forma aplicable a este campo de flujo. Muestre que una expresión general para el campo de velocidad es $\vec{V} = V(R/r)\hat{e}_r$ para $r_i \le r \le R$. Calcule la aceleración de una partícula de fluido en las posiciones $r = r_i$ y $r = R$.



P5.40

5.41 Un disco de "hockey de aire" puede ser modelado como un disco circular soportado por una capa de aire saliendo de múltiples hoyos diminutos en la tabla de juego. Suponga que el disco flota a una

distancia $h = 1$ mm sobre la tabla, a través de la cual el aire fluye verticalmente a una velocidad promedio $v = 0.08$ m/s. Obtenga una expresión para la velocidad de flujo radial bajo el disco, si se considera que el flujo será uniforme e incompresible. Si el diámetro del disco es 75 mm, determine la magnitud y posición de la aceleración radial máxima experimentada por una partícula de fluido bajo el disco.

5.42 Un tanque cilíndrico, de radio $R = 4$ pulg, se llena con agua a una profundidad de 6 pulg. El tanque se hace girar alrededor de su eje vertical. Durante el arranque, $0 \leq t \leq \tau$, la relación de rotación está dada por $\omega = \omega_0 t/\tau$, donde $\tau = 2$ s y la velocidad rotacional y de estado estable es $\omega_0 = 78$ rpm. La condición de no deslizamiento requiere que las partículas de fluido en la pared del tanque tengan velocidad cero relativa a la misma. Para una partícula en la pared, determine la aceleración en el tiempo $t = 1$ s y la aceleración de estado estable.

5.43 Se sabe que la temperatura, T, en un túnel largo varía aproximadamente como $T = T_0 - \alpha e^{-x/L}$ sen$(2\pi t/\tau)$, donde T_0, α, L y τ son constantes y x se mide desde la entrada. Una partícula se mueve hacia el túnel con velocidad constante, U. Obtenga una expresión para la relación de cambio de temperatura experimentada por una partícula. ¿Cuáles son las dimensiones de esta expresión?

5.44 Un avión vuela hacia el norte a una velocidad respecto al suelo de 300 mph. Su relación de ascenso es de 3000 pies/min. El gradiente de temperatura vertical es -3 F por 1000 pies de altitud. La temperatura en el suelo varía con la posición a través de un frente frío descendiendo a una relación de 1 F por milla. Calcule la relación de cambio de temperatura mostrada por un medidor sobre el tablero del avión.

5.45 Cuando un avión vuela a través de un frente frío, un instrumento del tablero indica que la temperatura ambiente desciende a una relación de 0.5 F por minuto. Otros instrumentos muestran una velocidad del aire de 300 nudos y una relación de ascenso de 3500 pies/min. Si el frente es estacionario y verticalmente uniforme, calcule la relación de cambio de temperatura con respecto a la distancia horizontal a través del frente frío.

5.46 Después de una lluvia, la concentración de sedimentos en cierto punto en un río aumenta a una proporción de 100 partes por millón (ppm) por hora. Además, la concentración de sedimentos aumenta con la distancia aguas abajo como resultado de la afluencia de corrientes tributarias; esta proporción de aumento es de 50 ppm por milla. En este punto, la corriente fluye a 0.5 mph. Un bote se emplea para estudiar la concentración de sedimentos y el operador se asombra al encontrar tres proporciones de cambio aparentemente diferentes de la concentración de sedimentos cuando el bote viaja aguas arriba, deriva con la corriente o viaja aguas abajo. Explique físicamente por qué se observan proporciones diferentes. Si la velocidad del bote es de 2.5 mph, calcule las tres proporciones de cambio.

5.47 Un campo de velocidad estable bidimensional está dado por $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, donde $A = 1\ s^{-1}$. Muestre que las líneas de corriente para este flujo son hipérbolas rectangulares, $xy = C$. Dibuje líneas de corriente que correspondan a $C = 0$, 1 y 2 m^2. Obtenga una expresión general para la aceleración de una partícula de fluido en este campo de velocidad. Calcule la aceleración de partículas de fluido en los puntos $(x, y) = (\frac{1}{2}, 2)$, $(1, 1)$ y $(2, \frac{1}{2})$, donde x y y se miden en metros. Muestre los vectores de aceleración sobre el dibujo de la línea de corriente.

5.48 Un flujo se describe mediante el campo de velocidad $\vec{V} = (Ax + B)\hat{i} - Ay\hat{j}$ donde $A = 10\ s^{-1}$, $B = 3$ pies $\cdot\ s^{-1}$, y las coordenadas se miden en pies. Dibuje unas cuantas líneas de corriente en el plano xy. ¿Éste es un posible flujo incompresible? Calcule la aceleración de una partícula de fluido en el punto $(x, y) = (3, 2)$. Muestre el vector aceleración en el dibujo.

5.49 Un campo de velocidad se representa por medio de la expresión $\vec{V} = (Ax - B)\hat{i} + Cy\hat{j} + Dt\hat{k}$, donde $A = 2\ s^{-1}$, $B = 4$ m $\cdot\ s^{-1}$, $D = 5$ m $\cdot\ s^{-2}$ y las coordenadas se miden en metros. Determine el valor apropiado para C si el campo de flujo va a ser incompresible. Calcule la aceleración de una partícula de fluido localizada en el punto $(x, y) = (3, 2)$. Dibuje las líneas de corriente del flujo en el plano xy.

‡5.50 En el problema 5.7 se empleó un perfil de velocidad lineal aproximado para modelar una capa límite laminar incompresible sobre una placa plana. Para este perfil, obtenga expresiones para las componentes x y y de la aceleración de una partícula de fluido en la capa límite. Localice las magnitudes máximas de las aceleraciones x y y. Calcule la razón de las magnitudes máximas x y y para las condiciones de flujo del problema 5.7.

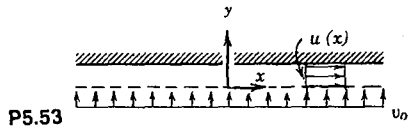
‡5.51 En el problema 5.8 se empleó un perfil de velocidad parabólico aproximado para modelar el flujo en una capa límite laminar incompresible sobre una placa plana. Para este perfil, muestre que la componente x de aceleración de una partícula de fluido dentro de la capa límite puede escribirse

$$a_x = -\frac{U^2}{x}\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right]$$

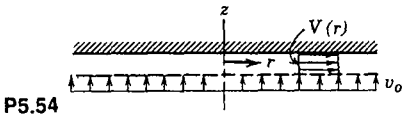
Para la posición x dada, determine el valor de y/δ para el cual a_x es un máximo. Calcule la a_x máxima, si $U = 8.7$ m/s y $x = 0.5$ m.

‡5.52 En el problema 5.9 se empleó un perfil de velocidad senoidal aproximado para modelar el flujo en la capa límite laminar incompresible sobre una placa plana. Para este perfil, obtenga una expresión para la componente x de la aceleración de una partícula de fluido en la capa límite. Localice la componente x máxima de aceleración dentro de la capa límite. Calcule la a_x máxima, si $U = 8.7$ m/s y $x = 0.5$ m.

5.53 Aire fluye dentro de un claro estrecho, de altura h, entre placas paralelas muy cercanas a través de una superficie porosa, como se muestra. Emplee un volumen de control, con una superficie exterior localizada en la posición x, para mostrar que la velocidad uniforme en la dirección x es $u = v_0 x/h$. Encuentre una expresión para la componente de velocidad en la dirección y. Evalúe la aceleración de una partícula de fluido en el claro.



P5.53



P5.54

5.54 Aire fluye hacia dentro de un claro estrecho, de altura h, entre discos paralelos muy cercanos a través de una superficie porosa, como se muestra. Utilice un volumen de control, con superficie exterior localizada en la posición r, para demostrar que la velocidad uniforme en la dirección r es $V = v_0 r/2h$. Encuentre una expresión para la componente de velocidad en la dirección $z (v_0 \ll V)$. Evalúe las componentes de la aceleración para una partícula de fluido en el claro.

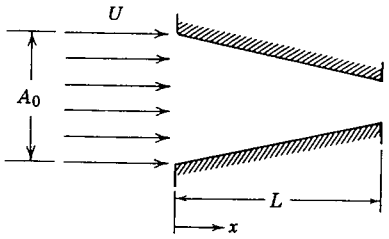
5.55 El campo de velocidad, para un flujo estable no viscoso, de izquierda a derecha sobre un cilindro circular, de radio a, está dado por

$$\vec{V} = U\cos\theta\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\hat{e}_r - U\,\text{sen}\,\theta\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\hat{e}_\theta$$

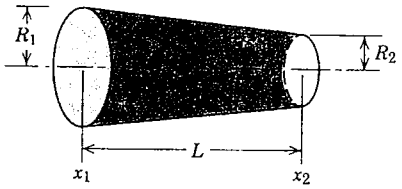
Obtenga expresiones para la aceleración de una partícula de fluido que se mueve a lo largo de la línea de corriente de estancamiento ($\theta = \pi$) y para la aceleración a lo largo de la superficie del cilindro ($r = a$). Determine las posiciones en las cuales estas aceleraciones alcanzan los valores máximo y mínimo.

5.56 Considere el flujo incompresible de un fluido a través de una tobera, como se indica. El área de la tobera está dada por $A = A_0(1 - bx)$ y la velocidad de entrada varía de acuerdo con $U = C(1 + at)$, donde $A_0 = 1$ pie^2, $L = 4$ pies, $b = 0.1$ pie^{-1}, $a = 2$ s^{-1} y $C = 10$ pies/s. El flujo puede suponerse unidimensional. Encuentre la aceleración de una partícula de fluido en $x = L/2$ para $t = 0$ y 0.5 s.

‡ Usted tal vez desee emplear programas sencillos de computadora para auxiliarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.



P5.56



P5.57

‡5.57 Considere el flujo unidimensional incompresible a través del canal circular mostrado. La velocidad en la sección (1) está dada por $U = U_0 + U_1$ sen ωt, donde $U_0 = 20$ m/s, $U_1 = 2$ m/s y $\omega = 0.3$ rad/s. Las dimensiones del canal son $L = 1$ m, $R_1 = 0.2$ m y $R_2 = 0.1$ m. Determine la aceleración de la partícula en la salida del canal. Dibuje los resultados como una función del tiempo sobre un ciclo completo.

5.58 Considere el flujo incompresible y estable de un fluido no viscoso, con la densidad del aire estándar, a través de la tobera horizontal que se muestra en el diagrama correspondiente al problema 5.56. La componente x de velocidad en la tobera está dada por $u = U_0/(1 - bx)$, donde $U_0 = 18.7$ m/s, $b = 0.3$ m^{-1} y $L = 0.65$ m. Por simetría, la componente y de velocidad es $v = 0$ a lo largo de la línea central de la tobera ($y = 0$). No hay flujo o variación en la dirección z. Deduzca la forma más simple posible de la componente y de la velocidad en la tobera. Obtenga una expresión algebraica para la aceleración de una partícula de fluido que se mueve en la tobera. Evalúe la componente x máxima de la aceleración de una partícula de fluido dentro de la tobera.

‡5.59 El canal circular del problema 5.57 se sustituye por un canal plano de ancho uniforme con las mismas dimensiones lineales. Para las condiciones dadas, determine la aceleración de la partícula en la salida del canal y grafique los resultados como una función del tiempo sobre un ciclo completo.

5.60 Considere de nuevo el campo de velocidad bidimensional y estable del problema 5.47. Obtenga expresiones para las coordenadas de la partícula, $x_p = f_1(t)$ y $y_p = f_2(t)$, como funciones del tiempo, así como la posición inicial de la partícula, (x_0, y_0) en $t = 0$. Determine el tiempo requerido para que una partícula viaje desde la posición inicial, $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 2)$, hasta las posiciones $(x, y) = (1, 1)$ y $(2, \frac{1}{2})$. Compare la aceleración de la partícula determinada por medio de la diferenciación de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ con las obtenidas en el problema 5.47.

5.61 En coordenadas cilíndricas, el campo de velocidad para un flujo bidimensional está dado por $\vec{V} = \vec{V}(r, \theta, t)$. Demuestre, por sustitución directa en la ecuación 5.10, que las componentes radial y tangencial de la aceleración de una partícula están dadas mediante las ecuaciones 5.12a y 5.12b.

5.62 La forma diferencial de la ecuación para la conservación de la masa puede emplearse para evaluar la relación relativa de cambio de densidad de una partícula de fluido, cuando ésta se mueve a través de un flujo. Demuestre que

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{V}$$

Explique el significado físico de $\nabla \cdot \vec{V}$.

5.63 Un flujo se representa por medio del campo de velocidad $\vec{V} = 10x\hat{i} - 10y\hat{j} + 30\hat{k}$. Determine si el campo es *a*) un posible flujo incompresible y *b*) irrotacional.

5.64 Un flujo se representa mediante el campo de velocidad $\vec{V} = (4x^2 + 3y)\hat{i} + (3x - 2y)\hat{j}$. Determine si el campo es *a*) un posible flujo incompresible y *b*) irrotacional.

‡ Usted tal vez desee emplear programas sencillos de computadora para auxiliarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.

5.65 Considere el flujo en el plano $r\,\theta$ con campo de velocidad dado por $\vec{V} = \hat{e}_r V_r + \hat{e}_\theta V_\theta$. Por sustitución directa en la ecuación 5.15, verifique que la vorticidad está dada mediante la ecuación 5.16.

5.66 Considere de nuevo el perfil de velocidad senoidal empleado para modelar la componente x de velocidad para una capa límite en el problema 5.9. Desprecie la componente vertical de la velocidad. Evalúe la circulación alrededor del contorno delimitado por $x = 0.4$ m, $x = 0.6$ m, $y = 0$ y $y = 8$ mm. ¿Cuáles serían los resultados de esta evaluación si se efectuara 0.2 m más aguas abajo? Suponga que $U = 0.5$ m/s.

5.67 Considere el campo de velocidad para el flujo en una "esquina" rectangular, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, con $A = 0.3\ s^{-1}$, como en el problema ejemplo 5.8. Evalúe la circulación en torno al cuadrado unitario del problema ejemplo 5.8.

5.68 Considere el campo de flujo bidimensional incompresible en el cual $u = Axy$ y $v = By^2$, donde $A = 1\ m^{-1} \cdot s^{-1}$, $B = -\frac{1}{2}\ m^{-1} \cdot s^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. Determine la rotación en el punto $(x, y) = (1, 1)$. Evalúe la circulación alrededor de la "curva" delimitada por $y = 0, x = 1, y = 1$ y $x = 0$.

****5.69** Considere el campo de flujo representado por la función de corriente $\psi = 10xy + 17$. ¿Éste es un posible flujo bidimensional incompresible? ¿El flujo es irrotacional?

****5.70** Considere un campo de velocidad con esfuerzo de corte constante para movimiento paralelo al eje x. La relación del corte es $du/dy = A$, donde $A = 0.1\ s^{-1}$. Obtenga una expresión para el campo de velocidad, $\vec{V}$. Calcule la relación de rotación y evalúe la función de corriente para este campo de flujo.

****5.71** Considere el campo de velocidad dado por $\vec{V} = Axy\hat{i} + By^2\hat{j}$, donde $A = 4\ m^{-1} \cdot s^{-1}$, $B = -2\ m^{-1} \cdot s^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. Determine la rotación del fluido. Evalúe la circulación alrededor de la "curva" delimitada por $y = 0, x = 1, y = 1$ y $x = 0$. Obtenga una expresión para la función de corriente.

****5.72** Considere el flujo representado por el campo de velocidad $\vec{V} = (Ay + B)\hat{i} + Ax\hat{j}$, donde $A = 6\ s^{-1}$, $B = 3\ m \cdot s^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. Obtenga una expresión para la función de corriente y evalúe la circulación alrededor de la "curva" delimitada por $y = 0, x = 1, y = 1$ y $x = 0$.

5.73 Considere otra vez el flujo viscométrico del problema ejemplo 5.7. Evalúe la relación de rotación promedio de un par de segmentos de línea perpendiculares, orientados a $\pm 45°$ a partir del eje x. Demuestre que las relaciones de rotación para estos segmentos son los mismos que para el ejemplo.

5.74 Considere el flujo accionado debido a la presión entre placas estacionarias paralelas que se encuentran separadas por una distancia b. La coordenada y se mide desde la placa inferior. El campo de velocidad está dado por $u = U(y/b)\,[1 - (y/b)]$. Obtenga una expresión para la circulación alrededor del contorno cerrado de altura h y longitud L. Evalúe cuándo $h = b/2$ y cuándo $h = b$. Muestre que se obtienen los mismos resultados a partir de la integral de área del teorema de Stokes (ecuación 5.18).

****5.75** Un campo de flujo se representa mediante la función de corriente $\psi = x^2 - y^2$. Encuentre el campo de velocidad correspondiente. Dibuje varias líneas de corriente e ilustre el campo de velocidad. Demuestre que este campo de flujo es irrotacional.

****5.76** El campo de velocidad cercano al núcleo de un tornado puede aproximarse como

$$\vec{V} = -\frac{q}{2\pi r}\hat{e}_r + \frac{K}{2\pi r}\hat{e}_\theta$$

¿Es éste un campo de flujo irrotacional? Obtenga una función de corriente para este flujo.

5.77 El perfil de velocidad para un flujo totalmente desarrollado en un tubo circular es $V_z = V_{máx}\,[1 -$

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

5.78

5.79

5.80

5.81

5.82

5.83

5.84

5.85

$V_r + \hat{e}_\theta V_\theta$. Por sustitución
e la ecuación 5.16.
delar la componente x de
te vertical de la velocidad.
$= 0.6$ m, $y = 0$ y $y = 8$
nás aguas abajo? Suponga

ılar, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, con
:orno al cuadrado unitario

xy y $v = By^2$, donde $A =$
etermine la rotación en el
ada por $y = 0, x = 1, y =$

$= 10xy + 17$. ¿Éste es un

ıovimiento paralelo al eje
presión para el campo de
iente para este campo de

$= 4\ m^{-1} \cdot s^{-1}$, $B = -2$
ón del fluido. Evalúe la
0. Obtenga una expresión

$+ Ax\hat{j}$, donde $A = 6\ s^{-1}$,
·esión para la función de
)r $y = 0, x = 1, y = 1$ y

ıe la relación de rotación
$\pm 45°$ a partir del eje x.
mos que para el ejemplo.
ıralelas que se encuentran
)r. El campo de velocidad
:irculación alrededor del
lo $h = b$. Muestre que se
: Stokes (ecuación 5.18).
$- y^2$. Encuentre el campo
el campo de velocidad.

: como

para este flujo.
·cular es $V_z = V_{máx}$ [1 −

ad en el material del texto.

$(r/R)^2$]. Evalúe las relaciones de deformación lineal y angular para este flujo. Obtenga una expresión para el vector de vorticidad, $\vec{\zeta}$.

5.78 Considere el campo de velocidad dado por $\vec{V} = Ax^3yt\hat{i} + By^2z\hat{j} + Cxyt^2\hat{k}$, donde $A = 1\ m^{-3} \cdot s^{-2}$, $B = 1\ m^{-2} \cdot s^{-1}$, $C = 1\ m^{-1} \cdot s^{-3}$, y las coordenadas se miden en metros. Obtenga una expresión para la componente y de la aceleración de una partícula de fluido. Desarrolle una expresión algebraica para la relación de la deformación lineal en el tiempo en la dirección z.

5.79 Considere el flujo accionado por presión entre placas paralelas estacionarias separadas por una distancia $2b$. La coordenada y se mide desde la línea central del canal. El campo de velocidad está dado por $u = u_{máx}[1 - (y/b)^2]$. Evalúe las relaciones de deformación lineal y angular. Obtenga una expresión para el vector de vorticidad, $\vec{\zeta}$, y encuentre la posición donde la vorticidad es un máximo.

5.80 Un perfil de velocidad lineal se empleó para modelar flujo en una capa límite laminar incompresible en el problema 5.7. Exprese la rotación de una partícula de fluido y establezca la máxima relación de rotación. Exprese la relación de deformación angular para una partícula de fluido y encuentre la relación máxima de deformación angular. Exprese las relaciones de deformación lineal para una partícula de fluido y determine las relaciones máximas de deformación lineal. Exprese la fuerza de corte por unidad de volumen en la dirección x y encuentre la máxima fuerza de corte por unidad de volumen. Interprete este resultado.

5.81 Resuelva el problema 5.80 empleando el perfil de velocidad parabólico del problema 5.8.

5.82 Resuelva el problema 5.80 empleando el perfil de velocidad senoidal del problema 5.9.

5.83 El problema 4.31 brindó el perfil de velocidad para un flujo laminar completamente desarrollado entre placas paralelas estacionarias separadas por la distancia $2h$, como $u = u_{máx}\ [1 - (y/h)^2]$. La coordenada y se mide desde la línea central del canal. Obtenga una expresión para la fuerza de corte por unidad de volumen en la dirección x para este flujo. Calcule su valor máximo si $u_{máx} = 0.4$ m/s y $h = 1.5$ mm.

5.84 La componente x de velocidad en una capa límite laminar en agua es aproximada como $u = U$ sen$(\pi y/2\delta)$, donde $U = 3$ m/s y $\delta = 2$ mm. La componente y de la velocidad es mucho más pequeña que u. Obtenga una expresión para la fuerza de corte neta por unidad de volumen, en la dirección x, sobre un elemento de fluido. Calcule su valor máximo para este flujo.

5.85 El problema 4.23 brindó el perfil de velocidad para flujo laminar completamente desarrollado en un tubo circular, como $u = u_{máx}\ [1 - (r/R)^2]$. Obtenga una expresión para la fuerza de corte por unidad de volumen en la dirección x para este flujo. Evalúe su valor máximo para las condiciones del problema 4.33.

Capítulo 6

Flujo incompresible no viscoso

Todos los fluidos reales poseen viscosidad. Sin embargo, hay muchos casos de flujo en los que resulta razonable despreciar los efectos de la viscosidad. (Esto es análogo a despreciar las fuerzas de fricción en el análisis de sistemas sólidos para ciertas situaciones.) En consecuencia, es útil investigar la dinámica de un *fluido ideal* que es incompresible y tiene viscosidad cero. El análisis de los movimientos de fluido ideal es más simple que el de flujos viscosos debido a que no hay esfuerzos de corte en un flujo no viscoso. Los esfuerzos normales son los únicos que deben considerarse en el análisis. Para un fluido no viscoso en movimiento, el esfuerzo normal en un punto es el mismo en todas las direcciones (es una cantidad escalar). El esfuerzo normal en un flujo no viscoso es el negativo de la presión termodinámica, $\sigma_{nn} = -p$. (Este resultado es congruente con las ecuaciones 5.25 para $\mu = 0$.)

6-1 ECUACIONES DE MOMENTO PARA FLUJOS SIN FRICCIÓN: ECUACIONES DE EULER

Las ecuaciones de movimiento para flujos sin fricción, denominadas ecuaciones de Euler, pueden obtenerse de las ecuaciones de movimiento generales (ecuaciones 5.24). Puesto que, en un flujo sin fricción, no puede haber esfuerzos de corte y el esfuerzo normal es el negativo de la presión termodinámica, entonces las ecuaciones de movimiento para un flujo sin fricción son

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{6.1a}$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{6.1b}$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{6.1c}$$

Podemos también escribir las ecuaciones anteriores como una sola ecuación vectorial

$$\rho\vec{g} - \nabla p = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right)$$

o

$$\rho\vec{g} - \nabla p = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt} \tag{6.2}$$

Si la coordenada z se dirige verticalmente, entonces, como $\nabla z = \hat{k}$,

$$\rho\vec{g} = -\rho g\hat{k} = -\rho g\nabla z$$

y la ecuación de Euler puede escribirse como

$$-g\nabla z - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} \tag{6.3}$$

En coordenadas cilíndricas, las componentes de las ecuaciones, con la gravedad como única fuerza másica, son

$$g_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \tag{6.4a}$$

$$g_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = a_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \tag{6.4b}$$

$$g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{6.4c}$$

Si el eje z se dirige verticalmente hacia arriba, $g_r = g_\theta = 0$ y $g_z = -g$.

En el capítulo 3 encontramos que si un fluido se acelera de tal manera que no haya movimiento relativo entre capas adyacentes, el fluido se mueve sin deformación y no ocurren esfuerzos de corte. Fuimos capaces de determinar la variación de presión dentro del fluido aplicando las ecuaciones de movimiento a un cuerpo libre apropiado. Consideramos dos casos específicos. Para el caso de aceleración rectilínea, obtuvimos la ecuación diferencial de movimiento, ecuación 3.16; en el problema ejemplo 3.8 aplicamos la ecuación a un tanque de agua que se movía como un cuerpo rígido. En el problema ejemplo 3.9 consideramos el caso de un líquido sometido a rotación estable en torno a un eje vertical. Se le deja como ejercicio demostrar que el empleo de las ecuaciones de Euler para resolver los problemas ejemplo 3.8 y 3.9, conduce a resultados idénticos a los que se obtuvieron previamente.

6-2 ECUACIONES DE EULER EN COORDENADAS DE LÍNEA DE CORRIENTE

En el capítulo 2 señalamos que las líneas de corriente, dibujadas tangentes a los vectores de velocidad en todo punto en el campo de flujo, brindan una representación gráfica conveniente. En flujo estacionario, una partícula de fluido se moverá a lo largo de una línea de corriente debido a que, en este caso, coinciden las líneas de trayectoria y las de corriente. De tal modo, al describir el movimiento de una partícula de fluido en un flujo estacionario, la distancia a lo largo de una línea de corriente es una coordenada lógica que puede emplearse al escribir las ecuaciones de movimiento. "Las coordenadas de línea de corriente" también pueden utilizarse para describir

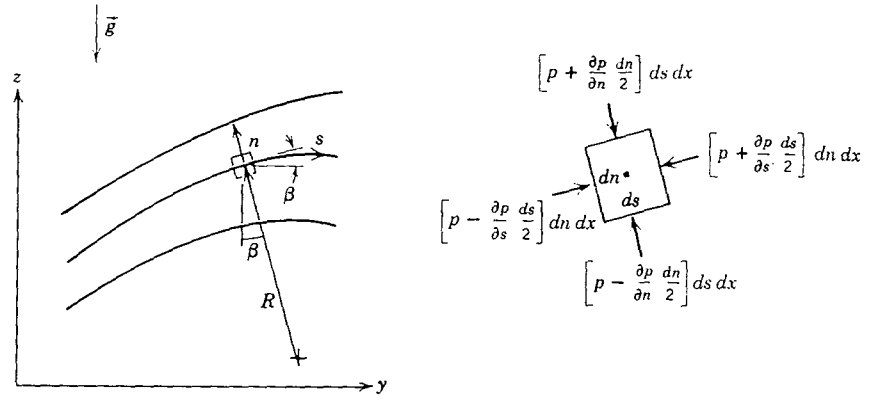


Fig. 6.1 Partícula de fluido moviéndose a lo largo de una línea de corriente.

flujo no estacionario. Las líneas de corriente en flujo no estacionario proporcionan una representación gráfica del campo de velocidad instantáneo.

Por simplicidad, considere el flujo en el plano *yz* que se muestra en la figura 6.1. Las ecuaciones de movimiento se van a escribir en términos de la coordenada *s*, la distancia a lo largo de una línea de corriente, y la coordenada *n*, la distancia normal a la línea de corriente. Puesto que el vector de velocidad debe ser tangente a la línea de corriente, el campo de velocidad está dado por $\vec{V} = \vec{V}(s, t)$. La presión en el centro del elemento de fluido es *p*. Si aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección de la corriente (la *s*) a un elemento de fluido de volumen *ds dn dx*, entonces despreciando fuerzas viscosas obtenemos

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right) dn\,dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right) dn\,dx - \rho g \,\text{sen}\beta\, ds\,dn\,dx = \rho a_s\, ds\,dn\,dx$$

donde β es el ángulo entre la tangente a la línea de corriente y la horizontal y a_s es la aceleración de la partícula de fluido a lo largo de la línea de corriente. Simplificando la ecuación, obtenemos

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \,\text{sen}\beta = \rho a_s$$

Como sen $\beta = \partial z/\partial s$, podemos escribir

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = a_s$$

A lo largo de cualquier línea de corriente $V_s = V_s(s, t)$ y la aceleración total de una partícula de fluido en la dirección de la corriente está dada por

$$a_s = \frac{DV_s}{Dt} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}$$

La velocidad es tangente a la línea de corriente, de modo que el subíndice, *s*, en V_s es redundante y puede omitirse. La ecuación de Euler en la dirección de la corriente con el eje *z* orientado verticalmente es, entonces,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} \qquad (6.5a)$$

Para flujo estable, y despreciando las fuerzas másicas, la ecuación de Euler en la dirección de la corriente se reduce a

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -V\frac{\partial V}{\partial s} \tag{6.5b}$$

la cual indica que una reducción en la velocidad se acompaña de un aumento en la presión e inversamente.[1]

Para obtener la ecuación de Euler en una dirección normal a las líneas de corriente, aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección n al elemento de fluido. De nuevo, despreciando las fuerzas viscosas, obtenemos

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right)ds\,dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right)ds\,dx - \rho g\cos\beta\, dn\,dx\,ds = \rho a_n\, dn\,dx\,ds$$

donde β es el ángulo entre la dirección n y la vertical, y a_n es la aceleración de la partícula de fluido en la dirección n. Al simplificar la ecuación, obtenemos

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g\cos\beta = \rho a_n$$

Como $\cos\beta = \partial z/\partial n$, escribimos

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - g\frac{\partial z}{\partial n} = a_n$$

La aceleración normal del elemento de fluido es hacia el centro de curvatura de la línea de corriente, en la dirección menos n; de modo que en el sistema de coordenadas de la figura 6.1, la familiar aceleración centrípeta se escribe

$$a_n = \frac{-V^2}{R}$$

para flujo estable,[2] donde R es el radio de curvatura de la línea de corriente. En consecuencia, la ecuación de Euler normal a la línea de corriente se escribe para flujo estable como

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \tag{6.6a}$$

En flujo estable en un plano horizontal, la ecuación de Euler normal a la línea de corriente se convierte en

[1] La relación entre las variaciones en la presión y la velocidad en la dirección de la corriente para un flujo no viscoso, incompresible y estable se ilustra en la película de la NCFMF, *Pressure Fields and Fluid Acceleration*, A. H. Shapiro, director.

[2] Si el flujo no fuera estable, el patrón de líneas de corriente cambiaría con el tiempo. En ese caso,

$$a_n = -\frac{V_s^2}{R} + \frac{\partial V_n}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \tag{6.6b}$$

La ecuación 6.6b indica que la presión aumenta en la dirección hacia afuera del centro de curvatura de las líneas de corriente.[3] En regiones donde las líneas de corriente son rectas, el radio de curvatura, R, es infinito y no hay variación de presión normal a las líneas de corriente.

EJEMPLO 6.1 Flujo en un codo

El flujo de aire, en condiciones estándar, en un ducto plano se va a determinar instalando tomas de presión a través de un codo. El ducto tiene 0.3 m de profundidad y 0.1 m de ancho. El radio interior del codo es 0.25 m. Si la diferencia de presión medida entre las tomas es 40 mm de agua, calcule el flujo aproximado, suponiendo que la velocidad es uniforme a través del codo.

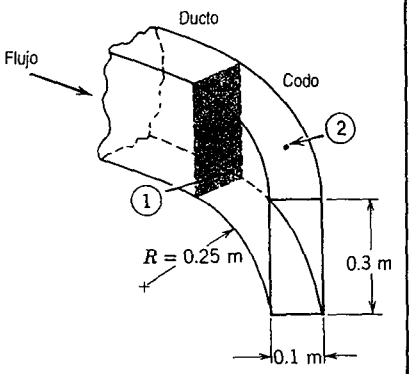
PROBLEMA EJEMPLO 6.1

DATOS: Un flujo a través del codo del ducto, como se indica.

$p_2 - p_1 = \rho_{H_2O} g\, \Delta h$,

donde $\Delta h = 40$ mm H_2O.

Flujo uniforme. Aire en condiciones TPE.

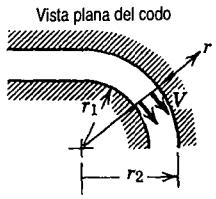


ENCUENTRE: Q.

SOLUCIÓN:

Aplique la ecuación de componente n a través de las líneas de corriente del flujo.

Ecuación básica: $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{\rho V^2}{r}$



Suposiciones:
1) Flujo sin fricción
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en una sección de medición

Para este flujo, $p = p(r)$, por lo que

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} = \frac{\rho V^2}{r} \qquad \text{o} \qquad dp = \rho V^2 \frac{dr}{r}$$

La integración produce

$$p_2 - p_1 = \rho V^2 \ln r \Big]_{r_1}^{r_2} = \rho V^2 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

[3] El efecto de la curvatura de la línea de corriente en el gradiente de presión normal a la línea de corriente se ilustra en la película de la NCFMF, *Pressure Fields and Fluid Acceleration*, A. H. Shapiro, director.

Por tanto.

Pero Δp

Para fluj

En las
de vel
varía i

6-3 ECUACIÓN DE A LO LARGO D

Hemos
Teórican
obtener
una rela
resolver
podemo
de corri
ecuació
Bernoul
resultad

6-3.1 Derivación e

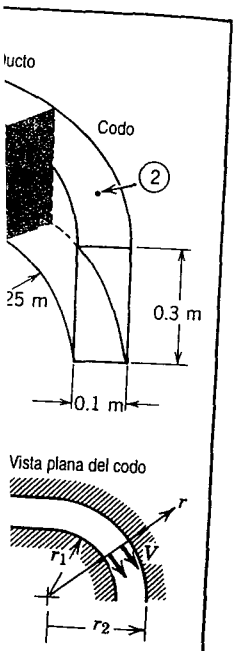
La ecua

Si una

(6.6b)

a del centro de curvatura
as, el radio de curvatura,
te.

minar instalando tomas
l m de ancho. El radio
nas es 40 mm de agua,
ivés del codo.



iente se ilustra en la

Por tanto,

$$V = \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho \ln(r_2/r_1)}\right]^{1/2}$$

Pero $\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_{H_2O} g\, \Delta h$, por lo que

$$V = \left[\frac{\rho_{H_2O} g\, \Delta h}{\rho \ln(r_2/r_1)}\right]^{1/2}$$

$$= \left[999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.04 \text{ m} \times \frac{\text{m}^3}{1.23 \text{ kg}} \times \frac{1}{\ln(0.35 \text{ m}/0.25 \text{ m})}\right]^{1/2}$$

$$V = 30.8 \text{ m/s}$$

Para flujo uniforme

$$Q = VA = 30.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.1 \text{ m} \times 0.3 \text{ m} = 0.924 \text{ m}^3/\text{s} \qquad Q$$

En las aplicaciones actuales, el perfil de velocidad en un codo de canal no será uniforme. El perfil de velocidad en un codo tiende a un perfil de vórtice libre (irrotacional) en el cual la velocidad varía inversamente con el radio (sección 6-7.4).

6-3 ECUACIÓN DE BERNOULLI. INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER A LO LARGO DE UNA LÍNEA DE CORRIENTE PARA FLUJO ESTACIONARIO

Hemos escrito las ecuaciones de momento y la ecuación de continuidad en forma diferencial. Teóricamente, en un fluido no viscoso e incompresible, estas ecuaciones pueden resolverse para obtener los campos completos de velocidad y presión. (Si la densidad no es constante, se requiere una relación termodinámica adicional para ésta.) Aunque, en teoría, las ecuaciones pueden resolverse, la solución para un campo de flujo particular puede ser muy complicada. Sin embargo, podemos integrar la ecuación de Euler con facilidad para flujo estacionario a lo largo de una línea de corriente. El análisis del volumen de control diferencial de la sección 4-4.1 condujo a una ecuación diferencial (ecuación 4.24), que al integrarse, nos lleva a una forma de la ecuación de Bernoulli. Con el propósito de brindar mayor claridad física en torno a las restricciones en los resultados, se presentan dos deducciones adicionales de la ecuación de Bernoulli.

6-3.1 Derivación empleando coordenadas de línea de corriente

La ecuación de Euler para flujo estacionario a lo largo de una línea de corriente está dada por

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = V\frac{\partial V}{\partial s} \tag{6.7}$$

Si una partícula de fluido se mueve una distancia, ds, a lo largo de una línea de corriente, entonces

$$\frac{\partial p}{\partial s} ds = dp \qquad \text{(el cambio en la presión a lo largo de } s\text{)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} ds = dz \qquad \text{(el cambio en la altura a lo largo de } s\text{)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} ds = dV \qquad \text{(el cambio en la velocidad a lo largo de } s\text{)}$$

Así, después de multiplicar la ecuación 6.7 por ds, podemos escribir

$$-\frac{dp}{\rho} - g\,dz = V\,dV \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

o

$$\frac{dp}{\rho} + V\,dV + g\,dz = 0 \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

La integración de esta ecuación da como resultado

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g\,z = \text{constante} \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)} \tag{6.8}$$

Antes de que pueda aplicarse la ecuación 6.8, debemos especificar la relación entre la presión, p, y la densidad, ρ. En el caso especial de flujo incompresible, ρ = constante, y la ecuación 6.8 se convierte en la ecuación de Bernoulli,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.9}$$

Restricciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo sin fricción
4) Flujo a lo largo de una línea de corriente

La ecuación de Bernoulli es eficaz y útil porque relaciona los cambios de presión con los cambios en la velocidad y la altura a lo largo de una línea de corriente. Sin embargo, brinda resultados correctos sólo cuando se aplica a situaciones de flujo donde las cuatro restricciones son razonables. Por lo tanto, es necesario que usted mantenga firmemente presentes las restricciones cada vez que considere el empleo de la ecuación de Bernoulli. (En general, la constante de Bernoulli en la ecuación 6.9 tiene diferentes valores a lo largo de diferentes líneas de corriente.[4])

** 6-3.2 Derivación empleando coordenadas rectangulares

La forma vectorial de la ecuación de Euler, ecuación 6.3, también puede integrarse a lo largo de una línea de corriente. Puesto que el campo de velocidad, $\vec{V}$, se especifica en términos de las

[4] Para el caso de flujo irrotacional, la constante tiene un solo valor por todo el campo de flujo (sección 6-7.1).

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

coordenadas rectangulares, x, y, z, es conveniente emplear la notación vectorial. Debemos restringir la deducción a flujo estable; de tal modo, el resultado final de nuestro esfuerzo debe ser la ecuación 6.8.

Para flujo estable, la ecuación de Euler en coordenadas rectangulares puede expresarse como

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\,\nabla z = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} \tag{6.10}$$

Para flujo estable, el campo de velocidad está determinado por $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$. Las líneas de corriente se dibujan en el campo de flujo tangentes al vector de velocidad en cada punto. Recuerde también aquí que en flujo estable, coinciden las líneas de corriente, las líneas de trayectoria y las línea de traza. El movimiento de una partícula a lo largo de una línea de corriente está gobernado por la ecuación 6.10. En el intervalo de tiempo dt, la partícula se mueve a una distancia $d\vec{s}$, a lo largo de la línea de corriente.

Si tomamos el producto punto de los términos en la ecuación 6.10 con la distancia, $d\vec{s}$, a lo largo de la línea de corriente, obtenemos una ecuación escalar que relaciona la presión, p, la velocidad, V, y la altura, z, a lo largo de la línea de corriente. Tomando el producto punto de $d\vec{s}$ con la ecuación 6.10, se obtiene

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{s} - g\nabla z\cdot d\vec{s} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\cdot d\vec{s} \tag{6.11}$$

donde

$$d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

Después de esto, evaluaremos cada uno de los tres términos en la ecuación 6.11

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}\left[\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right]\cdot[dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}]$$

$$= -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right] \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}dp \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

y

$$-g\,\nabla z\cdot d\vec{s} = -g\,\hat{k}\cdot[dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}]$$

$$-g\,\nabla z\cdot d\vec{s} = -g\,dz \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

Empleando una identidad vectorial,[5] podemos escribir el tercer término como

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\cdot d\vec{s} = [\tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}) - \vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})]\cdot d\vec{s}$$

$$= \{\tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})\}\cdot d\vec{s} - \{\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})\}\cdot d\vec{s}$$

[5] La identidad vectorial

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}) - \vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})$$

puede verificarse desarrollando cada lado en componentes.

El último término en el lado derecho de esta ecuación es cero, ya que $\vec{V}$ es paralelo a $d\vec{s}$. En consecuencia,

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\cdot d\vec{s} = \tfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})\cdot d\vec{s} = \tfrac{1}{2}\nabla(V^2)\cdot d\vec{s} \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{i}\frac{\partial V^2}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V^2}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V^2}{\partial z}\right]\cdot[dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V^2}{\partial x}dx + \frac{\partial V^2}{\partial y}dy + \frac{\partial V^2}{\partial z}dz\right]$$

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\cdot d\vec{s} = \tfrac{1}{2}d(V^2) \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

La sustitución de estos tres términos en la ecuación 6.11 produce

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(V^2) + g\,dz = 0 \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

Al integrar esta ecuación, obtenemos

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \qquad \text{(a lo largo de } s\text{)}$$

Si la densidad es constante, obtenemos la ecuación de Bernoulli

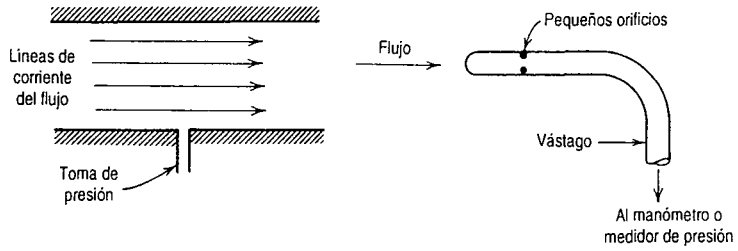
$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Como se esperaba, vemos que las últimas dos ecuaciones son idénticas a las ecuaciones 6.8 y 6.9 deducidas previamente, empleando coordenadas de línea de corriente. La ecuación de Bernoulli, obtenida mediante el empleo de coordenadas rectangulares, está aún sujeta a las restricciones: 1) flujo estable, 2) flujo incompresible, 3) flujo sin fricción y 4) flujo a lo largo de una línea de corriente.

6-3.3 Presiones estática, de estancamiento y dinámica

La presión, p, que se ha empleado al deducir la ecuación de Bernoulli, ecuación 6.9, es la presión termodinámica a la que, comúnmente, se le llama presión estática. Ésta es la presión que se mediría mediante un instrumento en movimiento con el flujo. Sin embargo, ¡tal medición es bastante difícil de efectuar en una situación práctica! ¿Cómo medimos la presión estática experimentalmente?

En la sección 6.2 demostramos que no hay variación de presión normal a las líneas de corriente rectas. Este hecho hace posible medir la presión estática en un fluido que fluye empleando una "toma" de presión en la pared, ubicada en una región donde las líneas de corriente del flujo son rectas, como se muestra en la figura 6.2*a*. La toma de presión es un pequeño orificio perforado cuidadosamente en la pared, con su eje perpendicular a la superficie. Si el orificio es perpendicular a la pared del ducto y libre de rebabas, pueden efectuarse mediciones precisas de la presión estática conectando la toma a un instrumento de medición adecuado.



a) Toma de presión de pared *b)* Probeta de presión estática

Fig. 6.2 Medición de la presión estática.

En una corriente de fluido alejada de una pared, o donde las líneas de corriente son curvas, pueden realizarse mediciones precisas de la presión estática mediante el empleo cuidadoso de una probeta de presión estática, mostrada en la figura 6.2*b*. Tales probetas deben diseñarse de modo que los orificios de medición se sitúen correctamente con respecto a la punta y el vástago del medidor para evitar resultados erróneos. Al usarlos, la sección de medición debe alinearse con la dirección de flujo local.

Las probetas de presión estática, tal como la mostrada en la figura 6.2*b*, y en una variedad de otras formas, se disponen comercialmente en tamaños tan pequeños como 1.5 mm ($\frac{1}{16}$ pulg) de diámetro.

La presión de estancamiento se obtiene cuando un fluido que fluye se desacelera hasta una velocidad cero mediante un proceso sin fricción. En flujo incompresible, la ecuación de Bernoulli puede utilizarse para relacionar los cambios en la velocidad y la presión, a lo largo de una línea de corriente, para uno de tales procesos. Despreciando las diferencias de altura, la ecuación 6.9 se vuelve

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

Si la presión estática es p en un punto en el flujo donde la velocidad es V, entonces la presión de estancamiento, p_0, donde la velocidad de estancamiento, V_0, es cero, puede calcularse a partir de

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{\overbrace{V_0^2}^{=0}}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

o

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{6.12}$$

La ecuación 6.12 es el enunciado matemático de la definición de presión de estancamiento, válida para flujo incompresible. El término $\frac{1}{2}\rho V^2$ se llama generalmente la *presión dinámica*. Al resolver para la presión dinámica, se obtiene

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 - p$$

y para la velocidad

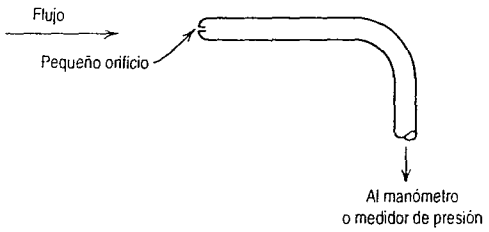


Fig. 6.3 Medición de la presión de estancamiento.

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \tag{6.13}$$

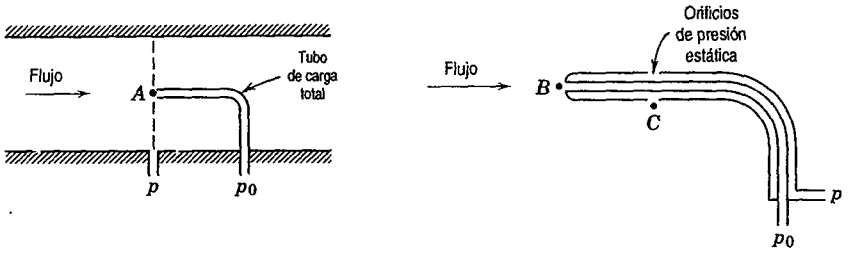
Por consiguiente, si la presión de estancamiento y la presión estática pudieran medirse en un punto, la ecuación 6.13 proporcionaría la velocidad de flujo local.

La presión de estancamiento se mide en el laboratorio empleando una probeta con un orificio colocado directamente enfrente de la corriente aguas arriba, como se muestra en la figura 6.3. Dicha probeta se llama probeta de presión de estancamiento o tubo pitot. También en este caso, la sección de medición debe alinearse con la dirección de flujo local.

Hemos visto que la presión estática en un punto puede medirse con una toma o probeta de presión estática (Fig. 6.2). Si conociéramos la presión de estancamiento en el mismo punto, entonces la velocidad de flujo podría calcularse a partir de la ecuación 6.13. Dos posibles arreglos experimentales se muestran en la figura 6.4.

En la figura 6.4*a*, la presión estática correspondiente al punto *A* se lee de la toma de presión estática de la pared. La presión de estancamiento se mide directamente en *A* mediante el tubo de carga total, como se ilustra. (El vástago del tubo de carga total se sitúa aguas abajo de la posición de medida para minimizar la perturbación del flujo local.)

Con frecuencia se combinan dos probetas, como en el tubo estático de pitot mostrado en la figura 6.4*b*. El tubo interior se utiliza para medir la presión de estancamiento en el punto *B*, en tanto que la presión estática en *C* se registra mediante los pequeños orificios en el tubo exterior. En campos de flujo donde es pequeña la variación de la presión estática en la dirección de la corriente, es posible emplear el tubo estático de pitot para inferir la velocidad en el punto *B* en el flujo, suponiendo $p_B = p_C$ y utilizando la ecuación 6.13. (Advierta que cuando $p_B \neq p_C$, este procedimiento brindará un resultado erróneo.)



a) Tubo de carga total empleado con la toma estática de pared

b) Tubo estático de pitot

Fig. 6.4 Medición simultánea de las presiones de estancamiento y estática.

Recuerde que la ecuación de Bernoulli se aplica sólo para flujo incompresible (número de Mach, $M \leq 0.3$). La definición y el cálculo de la presión de estancamiento para flujo compresible, serán analizados en la sección 12-3.1.

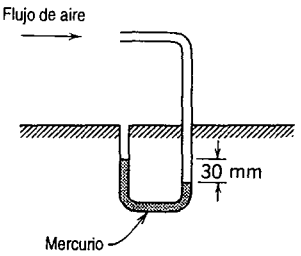
EJEMPLO 6.2 Tubo de pitot

Una probeta de pitot se inserta en un flujo de aire (en condiciones TPE) para medir la velocidad de flujo. El tubo se inserta de manera que apunte aguas arriba dentro del flujo y la presión registrada por el medidor sea la de estancamiento. La presión estática se mide en la misma posición en el flujo, empleando una toma de presión de pared. Si la diferencia de presión es 30 mm de mercurio, determine la velocidad del flujo.

PROBLEMA EJEMPLO 6.2

DATOS: Un tubo de pitot dentro de un flujo como el que se muestra. El fluido que circula es aire y el líquido del manómetro es mercurio.

ENCUENTRE: La velocidad del flujo.



SOLUCIÓN:

Ecuación básica: $$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo a lo largo de una línea de corriente
4) Desaceleración sin fricción a lo largo de la línea de corriente de estancamiento

Al escribir la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de corriente de estancamiento, tomando $\Delta z = 0$, se obtiene

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

p_0 es la presión de estancamiento en la abertura del tubo donde la velocidad se ha reducido, sin fricción, a cero. Resolviendo para V, encontramos que

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_{\text{aire}}}}$$

Del diagrama,

$$p_0 - p = \rho_{\text{Hg}} g h = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g h (\text{SG}_{\text{Hg}})$$

y

$$V = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{H}_2\text{O}} g h (\text{SG}_{\text{Hg}})}{\rho_{\text{aire}}}}$$

(6.13)

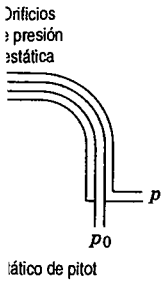
eran medirse en un punto,

na probeta con un orificio
stra en la figura 6.3. Dicha
én en este caso, la sección

ın una toma o probeta de
ınto en el mismo punto,
13. Dos posibles arreglos

lee de la toma de presión
en A mediante el tubo de
guas abajo de la posición

ɔ de pitot mostrado en la
niento en el punto B, en
ïcios en el tubo exterior.
ica en la dirección de la
cidad en el punto B en el
ıe cuando $p_B \neq p_C$, este



lático de pitot

ática.

$$= \sqrt{2 \times \frac{1000 \text{ kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 30 \text{ mm} \times \frac{\text{m}}{1000 \text{ mm}} \times 13.6 \times \frac{\text{m}^3}{1.23 \text{ kg}}}$$

$V = 80.8$ m/s ⟵ V

En $T = 20$ C, la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s. En consecuencia, $M = 0.236$ y la suposición de flujo incompresible es válida.

Este problema ilustra el empleo de un tubo de pitot para determinar la velocidad en un punto.

6-3.4 Aplicaciones

La ecuación de Bernoulli puede aplicarse entre cualesquiera dos puntos sobre una línea de corriente siempre que se satisfagan las otras tres restricciones. El resultado es

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \tag{6.14}$$

donde los subíndices 1 y 2 representan dos puntos cualesquiera sobre una línea de corriente. Las aplicaciones de las ecuaciones 6.9 y 6.14 a problemas de flujo típicos se ilustran en los problemas ejemplo del 6.3 al 6.5.

En algunas situaciones, el flujo parece inestable respecto a un marco de referencia, pero estable desde otro, que se traslada en el flujo. Como la ecuación de Bernoulli se dedujo integrando la segunda ley de Newton para una partícula de fluido, puede aplicarse en cualquier marco de referencia inercial (véase la discusión de marcos de traslación en la sección 4-4.2). El procedimiento se ilustra en el problema ejemplo 6.6.

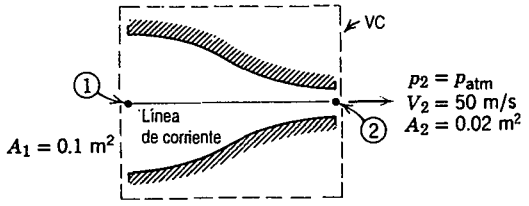
EJEMPLO 6.3 Flujo en una tobera

A través de una tobera horizontal fluye aire establemente y a baja velocidad, descargándose en la atmósfera. En la entrada de la tobera, el área es de 0.1 m^2 y en la salida de la misma, de 0.02 m^2. El flujo es esencialmente incompresible y se desprecian los efectos friccionantes. Determine la presión manométrica requerida en la entrada de la tobera para producir una velocidad de salida de 50 m/s.

PROBLEMA EJEMPLO 6.3

DATOS: El flujo a través de una tobera de la manera que se indica. El flujo de aire es estable, incompresible y sin fricción.

ENCUENTRE: $p_1 - p_{atm}$.



SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas: $\dfrac{p_1}{\rho} + \dfrac{V_1^2}{2} + gz_1 = \dfrac{p_2}{\rho} + \dfrac{V_2^2}{2} + gz_2$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo sin fricción
4) Flujo a lo largo de una línea de corriente
5) $z_1 = z_2$
6) Flujo uniforme en las secciones ① y ②

La velocidad máxima de 50 m/s se encuentra bastante abajo del valor de 100 m/s, que corresponde a un número de Mach $M \approx 0.3$ en aire estándar. En consecuencia, el flujo puede tratarse como incompresible.

Aplique la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente entre los puntos ① y ② para evaluar p_1. Por tanto,

$$p_1 - p_{atm} = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

Aplicando la ecuación de continuidad para determinar V_1,

$$0 = \{-|\rho V_1 A_1|\} + \{|\rho V_2 A_2|\} \qquad \text{o} \qquad V_1 A_1 = V_2 A_2$$

por lo que

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{0.02\ \text{m}^2}{0.1\ \text{m}^2} = 10\ \text{m/s}$$

Para aire en condiciones estándar, $\rho = 1.23\ \text{kg/m}^3$. Entonces,

$$p_1 - p_{atm} = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.23\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left[(50)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - (10)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$p_1 - p_{atm} = 1.48\ \text{kPa} \longleftarrow p_1 - p_{atm}$$

Este problema ilustra una aplicación típica de la ecuación de Bernoulli. Observe que si las líneas de corriente del flujo son rectas en la entrada y la salida de la tobera, la presión será uniforme en esas secciones.

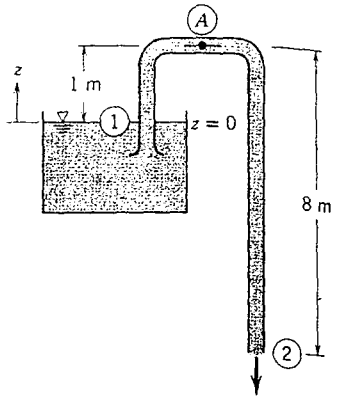
EJEMPLO 6.4 Flujo a través de un sifón

Un tubo en U actúa como un sifón de agua. La curvatura en el tubo está 1 m por arriba de la superficie del agua, mientras que a 7 m por debajo de la misma, se encuentra la salida del tubo. El fluido se emite desde el fondo del sifón como un chorro libre a presión atmosférica. Si el flujo es

sin fricción como una primera aproximación, determine (después de listar las suposiciones necesarias) la velocidad del chorro libre y la presión absoluta del fluido en el codo.

PROBLEMA EJEMPLO 6.4

DATOS: Agua que fluye por un sifón, como se muestra.



ENCUENTRE: *a*) La velocidad del agua que sale como un chorro libre.

b) La presión en el punto Ⓐ en el flujo.

SOLUCIÓN:

Ecuación básica: $\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$

Suposiciones:
1) No hay fricción
2) Flujo estable
3) Flujo incompresible
4) Flujo a lo largo de una línea de corriente
5) El depósito es grande comparado con el tubo

Aplique la ecuación de Bernoulli entre los puntos ① y ②.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Como $\text{área}_{\text{depósito}} \gg \text{área}_{\text{tubo}}$, $V_1 \approx 0$. Además $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$, de modo que

$$gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \qquad \text{y} \qquad V_2^2 = 2g(z_1 - z_2)$$

$$V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 7 \text{ m}} = 11.7 \text{ m/s} \longleftarrow V_2$$

Para determinar la presión en la posición Ⓐ, escribimos la ecuación de Bernoulli entre ① y Ⓐ.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gz_A$$

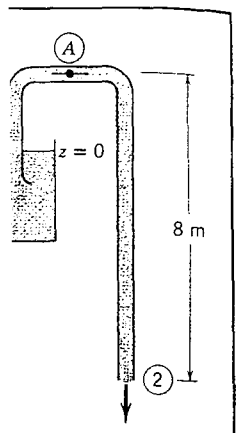
De nuevo $V_1 \approx 0$ y de la conservación de la masa $V_A = V_2$. Por consiguiente,

$$\frac{p_A}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + gz_1 - \frac{V_2^2}{2} - gz_A = \frac{p_1}{\rho} + g(z_1 - z_A) - \frac{V_2^2}{2}$$

$$p_A = p_1 + \rho g(z_1 - z_A) - \rho\frac{V_2^2}{2}$$

$$= 1.01 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times (-1 \text{ m}) \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

star las suposiciones
el codo.



l/s V_2

i entre ① y Ⓐ.

$\frac{s^2}{\cdot m}$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{999\ \text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{(11.7)^2\ \text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$p_A = 22.8$ kPa (abs) o -78.5 kPa (manométrica) $\longleftarrow p_A$

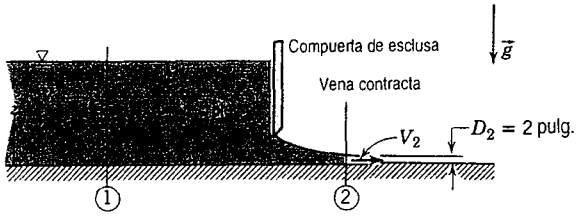
Este problema ejemplifica una aplicación directa de la ecuación de Bernoulli con cambios de altura incluidos.

EJEMPLO 6.5 Flujo bajo una compuerta de esclusa

Agua fluye bajo una compuerta de esclusa sobre un lecho horizontal en la entrada hacia una garganta. Aguas arriba de la compuerta, la profundidad del agua es de 1.5 pies y la velocidad es despreciable. En la vena contracta aguas abajo de la compuerta, las líneas de corriente del flujo son rectas y la profundidad es de 2 pulg. En cada sección pueden suponerse distribuciones hidrostáticas de presión y flujo uniforme; la fricción es despreciable. Determine la velocidad del flujo aguas abajo de la compuerta y la descarga en pies cúbicos por segundo por pie de ancho.

PROBLEMA EJEMPLO 6.5

DATOS: El flujo de agua bajo una compuerta de esclusa. El flujo es sin fricción, uniforme en cada sección y la distribución de presión es hidrostática en las secciones ① y ②.



ENCUENTRE: *a*) V_2.
b) Q en pies^3/s/pie de ancho.

SOLUCIÓN:
El flujo satisface todas las condiciones necesarias para aplicar la ecuación de Bernoulli. La pregunta es, ¿qué línea de corriente usaremos?

Ecuación básica: $$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo sin fricción
4) Flujo a lo largo de una línea de corriente
5) Flujo uniforme en cada sección
6) Distribución de presión hidrostática

De la suposición 6,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \text{por lo que} \quad p = p_{atm} + \rho g(D - z) \qquad \text{o} \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{p_{atm}}{\rho} + g(D - z)$$

La sustitución de esta relación en la ecuación de Bernoulli produce

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + g(D_1 - z_1) + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_{atm}}{\rho} + g(D_2 - z_2) + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

o

$$\frac{V_1^2}{2} + gD_1 = \frac{V_2^2}{2} + gD_2$$

Este resultado implica que $V^2/2 + gD$ = constante, y la constante tiene el mismo valor a lo largo de *cualquier* línea de corriente para este flujo. Despejando V_2 se obtiene

$$V_2 = \sqrt{2g(D_1 - D_2) + V_1^2}$$

Pero $V_1^2 \approx 0$, por lo que

$$V_2 = \sqrt{2g(D_1 - D_2)} = \sqrt{2 \times 32.2 \ \frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \left(1.5 \text{ pie} - 2 \text{ pulg} \times \frac{\text{pie}}{12 \text{ pulg}}\right)}$$

$V_2 = 9.27$ pies/s $\qquad V_2$

Para flujo uniforme, $Q = VA = VDw$, o

$$\frac{Q}{w} = VD = V_2 D_2 \ 9.27 \ \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times 2 \text{ pulg} \times \frac{\text{pie}}{12 \text{ pulg}} = 1.55 \text{ pie}^2/\text{s}$$

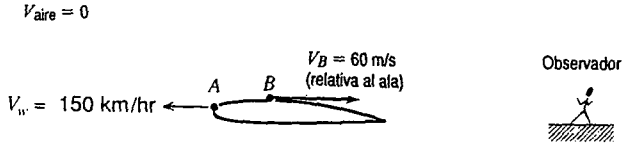
$\frac{Q}{w} = 1.55$ pies^3/s por pie de ancho $\qquad \frac{Q}{w}$

EJEMPLO 6.6 Ecuación de Bernoulli en un marco de referencia en traslación

Un aeroplano ligero vuela a 150 km/hr en aire estándar a una altitud de 1000 m. Determine la presión de estancamiento en el borde delantero del ala. En cierto punto cercano al ala, la velocidad del aire *relativa* a la misma es 60 m/s. Calcule la presión en este punto.

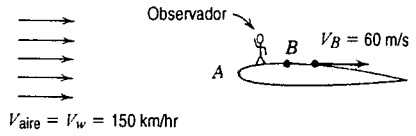
PROBLEMA EJEMPLO 6.6

DATOS: Un avión en vuelo a 150 km/hr y 1000 m de altura en aire estándar.



ENCUENTRE: La presión de estancamiento, p_{0_A}, en el punto A y la presión estática, p_B, en el punto B.

SOLUCIÓN:
El flujo es inestable cuando se observa desde un marco fijo, esto es, por un observador en el suelo. Sin embargo, un observador *en* el ala ve el siguiente flujo estable:



En z = 1000 m en aire estándar, la temperatura es de 281 K y la velocidad del sonido corresponde a 336 m/s. En consecuencia, en el punto B, $M_B = V_B/c = 0.178$. Esto es menor que 0.3, por lo que el flujo puede tratarse como incompresible. De tal modo, la ecuación de Bernoulli puede aplicarse a lo largo de una línea de corriente en el marco de referencia inercial del observador en movimiento.

Ecuación básica: $$\frac{p_{aire}}{\rho} + \frac{V_{aire}^2}{2} + gz_{aire} = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + g z_A = \frac{p_B}{\rho} + \frac{V_B^2}{2} + g z_B$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible ($V < 100$ m/s)
3) Flujo sin fricción
4) Flujo a lo largo de una línea de corriente
5) Se desprecia Δz

Los valores para la presión y la densidad pueden encontrarse en la tabla A.3. Así, a 1000 m, $p/p_{SL} = 0.8870$ y $\rho/\rho_{SL} = 0.9075$. En consecuencia,

$$p = 0.8870\, p_{SL} = 0.8870 \times 1.01 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 8.96 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

y

$$\rho = 0.9075 \rho_{SL} = 0.9075 \times 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.12 \text{ kg/m}^3$$

Como la velocidad es $V_A = 0$ en el punto de estancamiento, entonces

$$p_{0_A} = p_{aire} + \frac{1}{2}\rho V_{aire}^2$$

$$= 8.96 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + \frac{1}{2} \times 1.12 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(150 \frac{\text{km}}{\text{hr}} \times 1000 \frac{\text{m}}{\text{km}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \text{ s}}\right)^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$p_{0_A} = 90.6 \text{ kPa (abs)} \qquad \longleftarrow p_{0_A}$$

Resolviendo para la presión estática en B, obtenemos

$$p_B = p_{aire} + \frac{\rho}{2}(V_{aire}^2 - V_B^2)$$

$$p_B = \frac{8.96 \times 10^4 \ \text{N}}{\text{m}^2} + \frac{1}{2} \times 1.12 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left[\left(150 \ \frac{\text{km}}{\text{hr}} \times 1000 \ \frac{\text{m}}{\text{km}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \ \text{s}} \right)^2 - (60)^2 \ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$p_B = 88.6 \text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_B$$

6-3.5 Precauciones en el uso de la ecuación de Bernoulli

Hemos visto, en los problemas ejemplo del 6.3 al 6.6, varias situaciones en las que la ecuación de Bernoulli podía aplicarse debido a que las restricciones respecto a su uso llevaban a un razonable modelo de flujo. Sin embargo, en algunas situaciones usted podría estar tentado a aplicar la ecuación de Bernoulli donde no se satisfacieran las restricciones. Algunos casos sutiles que violan las restricciones se analizan brevemente en esta sección.

El flujo a través de la tobera del problema ejemplo 6.3 se modeló bien mediante la ecuación de Bernoulli. En vista de que el gradiente de presión en la tobera es favorable, no hay separación y las capas límite sobre las paredes permanecen delgadas. La fricción tiene un efecto despreciable sobre el perfil de velocidad del flujo, de modo que un flujo unidimensional resulta un buen modelo. La velocidad en cualquier sección puede calcularse a partir del área de flujo correspondiente.

Un pasaje divergente o una expansión repentina no deben modelarse empleando la ecuación de Bernoulli. Los gradientes de presión adversos provocan el rápido crecimiento de las capas límite, perfiles de velocidad severamente perturbados y la posible separación del flujo.[6] Un flujo unidimensional es un modelo pobre para tales flujos. Debido al bloqueo de área que resulta del crecimiento de la capa límite, el aumento de presión en los difusores reales siempre es menor que el predicho para flujo unidimensional no viscoso.

La ecuación de Bernoulli fue un modelo razonable para el sifón del problema ejemplo 6.4 porque la entrada era bastante redonda, los codos de curvatura suave y la longitud total muy corta. La separación de flujo, que puede ocurrir en entradas con esquinas pronunciadas y curvaturas abruptas, ocasiona que el flujo se aparte del predicho por un modelo unidimensional y la ecuación de Bernoulli. Los efectos friccionantes no serían despreciables si el tubo fuera largo.

El problema ejemplo 6.5 presentó una situación de flujo en canal abierto análoga a la de una tobera, para la cual la ecuación de Bernoulli es un buen modelo de flujo. El salto hidráulico[7] es un ejemplo de un flujo en canal abierto con gradiente de presión adverso. El flujo a través de un salto hidráulico se mezcla violentamente, haciendo imposible identificar las líneas de corriente. Por ello, la ecuación de Bernoulli no puede utilizarse para modelar flujo a través de un salto hidráulico.

La ecuación de Bernoulli no puede aplicarse *a través* de una máquina tal como un propulsor, una bomba o un molino de viento. La ecuación se dedujo integrando a lo largo de un tubo de corriente (sección 4-4.1) o de una línea de corriente (sección 6-3) en ausencia de superficies móviles tales como aspas o álabes. Resulta imposible tener flujo estable localmente o identificar líneas de corriente durante el flujo a través de la máquina. Como se sugirió en el problema 4.114, es posible aplicar la ecuación de Bernoulli antes y después de una máquina si se satisfacen las

[6] Véase la película de la NCFMF, *Flow Visualization*, S. J. Kline, director.

[7] Véase la película de la NCFMF, *Waves in Fluids*, A. E. Bryson, director, y *Stratified Flow*, R. R. Long, director, para ejemplos de este comportamiento.

restricciones respecto a su uso. Sin embargo, no puede aplicarse a través de una máquina o de un impulsor.

Por último, es necesario considerar la compresibilidad en el flujo de gases. Los cambios de densidad ocasionados por la compresión dinámica debida al movimiento, pueden despreciarse para fines de ingeniería si el número local de Mach permanece por debajo, aproximadamente, de $M \approx 0.3$, como se señaló en los problemas ejemplo 6.3 y 6.6. Los cambios de temperatura pueden provocar variaciones significativas en la densidad de un gas, incluso en flujos de baja velocidad. Por ello, la ecuación de Bernoulli no podría aplicarse al flujo de aire a través de un elemento calefactor (por ejemplo, de un secador de pelo manual) donde se presentan cambios importantes de temperatura.

6-4 RELACIÓN ENTRE LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA Y LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli, ecuación 6.9, se obtuvo integrando la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente para flujo estable, incompresible y sin fricción. Por tanto, la ecuación 6.9 se dedujo a partir de la ecuación de momento para una partícula de fluido.

Una ecuación idéntica en forma a la ecuación 6.9 (aunque implique restricciones muy diferentes) puede obtenerse de la primera ley de la termodinámica. Nuestro objetivo en esta sección es reducir la ecuación de la energía a la forma de la ecuación de Bernoulli, dada por la ecuación 6.9. Habiendo llegado a esta forma, compararemos luego las restricciones en estas dos ecuaciones para auxiliarnos en el entendimiento más claro de las restricciones relativas al uso de la ecuación 6.9.

Considere flujo estable en la ausencia de fuerzas de corte. Elija un volumen de control delimitado por líneas de corriente a lo largo de su periferia. Tal volumen de control, mostrado en la figura 6.5, recibe a menudo el nombre de *tubo de corriente.*

Ecuación básica:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otros}} = 0(1) \quad = 0(2) \quad = 0(3) \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0(4) \tag{4.57}$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Restricciones:
1) $\dot{W}_s = 0$
2) $\dot{W}_{\text{corte}} = 0$
3) $\dot{W}_{\text{otro}} = 0$
4) Flujo estable
5) Flujo y propiedades uniformes en cada sección

Bajo estas restricciones, la ecuación 4.57 se vuelve

$$0 = \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1\right)\{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2\right)\{|\rho_2 V_2 A_2|\} - \dot{Q}$$

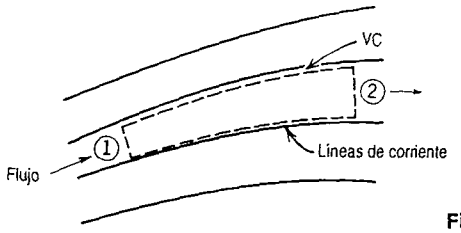


Fig. 6.5 Flujo a través de un tubo de corriente.

Pero de la continuidad, bajo estas restricciones,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (= 0 (4))$$

o

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

Esto es,

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Además,

$$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta Q}{dm}\frac{dm}{dt} = \frac{\delta Q}{dm}\dot{m}$$

Por consiguiente, de la ecuación de la energía

$$0 = \left[\left(p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2\right) - \left(p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1\right)\right]\dot{m} + \left(u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}\right)\dot{m}$$

o

$$p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 + \left(u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}\right)$$

Bajo la restricción de flujo incompresible, $v_1 = v_2 = 1/\rho$ y por tanto,

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 + \left(u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{dm}\right) \qquad (6.15)$$

La ecuación 6.15 se reduciría a la ecuación de Bernoulli si el término en el paréntesis fuera cero. En consecuencia, bajo las restricciones adicionales,

6) Flujo incompresible, $v_1 = v_2 = 1/\rho$ = constante
7) $(u_2 - u_1 - \delta Q/dm) = 0$

la ecuación de la energía se reduce a

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

o

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.16}$$

La ecuación 6.16 es de forma idéntica a la de Bernoulli, ecuación 6.9. Ésta se dedujo a partir de consideraciones del momento (segunda ley de Newton) y es válida para flujo estable, incompresible y sin fricción a lo largo de una línea de corriente. La ecuación 6.16 se obtuvo aplicando la primera ley de la termodinámica a un volumen de control de tubo de corriente, sujeto a las restricciones de la 1 a la 7 anteriores. De tal modo, la ecuación de Bernoulli (ecuación 6.9) y la forma idéntica de la ecuación de la energía (ecuación 6.16) se desarrollaron a partir de modelos por completo diferentes, que provenían de conceptos básicos totalmente distintos y cuyas restricciones no eran las mismas.

Observe que la restricción 7,

$$(u_2 - u_1) - \frac{\delta Q}{dm} = 0$$

resultó necesaria para obtener la ecuación de Bernoulli a partir de la primera ley de la termodinámica. Esta restricción puede satisfacerse si $\delta Q/dm$ es cero (no hay transferencia de calor al fluido) y $u_2 = u_1$ (no hay cambio en la energía térmica interna del fluido). La restricción también se satisface si $(u_2 - u_1)$ y $\delta Q/dm$ son diferentes de cero, siempre que los dos términos sean iguales. En el problema ejemplo 6.7 se demuestra que esto es cierto para flujo incompresible sin fricción.

Para el caso especial considerado en esta sección, es cierto que la primera ley de la termodinámica se reduce a la ecuación de Bernoulli. Es importante subrayar que la ecuación de Bernoulli se obtuvo integrando la forma diferencial de la segunda ley de Newton (ecuación de Euler) para flujo estable, incompresible y sin fricción a lo largo de una línea de corriente. Cada término en la ecuación de Bernoulli tiene dimensiones de energía por unidad de masa. Por ello, dicha ecuación se obtuvo de forma similar a la manera en que el método de la energía se introduce en la mecánica de las partículas. La ecuación de Bernoulli puede verse como un balance de energía mecánica. En aquellos casos en los que no hay conversión de energía mecánica a térmica, ambas energías se conservan por separado. Para estos casos, la primera ley de la termodinámica y la segunda ley de Newton no producen información independiente. Sin embargo, en general, la primera ley de la termodinámica y la segunda ley de Newton son ecuaciones independientes que deben satisfacerse por separado.

EJEMPLO 6.7 Energía interna y transferencia de calor en un flujo incompresible sin fricción

Considere un flujo incompresible sin fricción con transferencia de calor. Demuestre que

$$u_2 - u_1 = \frac{\delta Q}{dm}$$

PROBLEMA EJEMPLO 6.7

DATOS: Un flujo incompresible sin fricción con transferencia de calor.

DEMUESTRE: $u_2 - u_1 = \dfrac{\delta Q}{dm}$.

SOLUCIÓN:

En general, la energía interna, u, puede expresarse como $u = u(T, v)$. Para flujo incompresible, v = constante, y $u = u(T)$. Por tanto, el estado termodinámico del fluido se determina por medio de la sola propiedad termodinámica, T. El cambio de la energía interna para cualquier proceso, $u_2 - u_1$, depende sólo de las temperaturas en los estados finales.

De la ecuación de Gibbs, $T\,ds = du + p\,dv$, válida para una sustancia pura sometida a cualquier proceso, obtenemos

$$T\,ds = du$$

para flujo incompresible, ya que $dv = 0$. Puesto que el cambio en la energía interna, du, entre estados finales especificados, es independiente del proceso, tomamos un proceso reversible para el cual $T\,ds = d(\delta Q/dm) = du$. Por tanto,

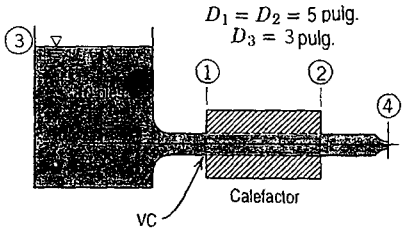
$$u_2 - u_1 = \frac{\delta Q}{dm}$$

EJEMPLO 6.8 Flujo sin fricción con transferencia de calor

Agua fluye establemente proveniente de un gran depósito abierto, a través de un corto tramo de tubería y de una tobera con área de sección transversal $A = 0.864$ pulg^2. Un calefactor de 10 kW bien aislado rodea la tubería. El flujo se considera estable, sin fricción e incompresible. Encuentre el aumento de temperatura del fluido.

PROBLEMA EJEMPLO 6.8

DATOS: Agua que circula desde un gran depósito a través del sistema mostrado y que se descarga a presión atmosférica. El calefactor es de 10 kW; $A_4 = 0.864$ pulg^2.



ENCUENTRE: El aumento de temperatura del fluido entre los puntos ① y ②.

SOLUCIÓN:

Ecuaciones básicas:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0\,(1)} \int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \cancel{\dot{W}_s}^{=0(4)} - \cancel{\dot{W}_{\text{corte}}}^{=0(4)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo sin fricción
3) Flujo incompresible
4) No hay trabajo de eje ni de corte
5) Flujo a lo largo de una línea de corriente

Bajo las suposiciones listadas, la primera ley de la termodinámica para el VC mostrado se vuelve

$$\dot{Q} = \int_{SC} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{A_1} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Para propiedades uniformes en ① y ②

$$\dot{Q} = -|\rho V_1 A_1| \left(u_1 + p_1 v + \frac{V_1^2}{2} + g z_1\right) + |\rho V_2 A_2| \left(u_2 + p_2 v + \frac{V_2^2}{2} + g z_2\right)$$

De la conservación de la masa, $|\rho V_1 A_1| = |\rho V_2 A_2| = \dot{m}$, por lo que

$$\dot{Q} = \dot{m}\left[u_2 - u_1 + \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1\right)\right]$$

Para flujo estable, incompresible y sin fricción a lo largo de una línea de corriente,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Por tanto,

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

Puesto que, para un fluido incompresible, $u_2 - u_1 = c(T_2 - T_1)$, entonces

$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c}$$

De la continuidad,

$$\dot{m} = \rho V_4 A_4$$

Para encontrar V_4, se escribe la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre en ③ y el punto ④.

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} + g z_3 = \frac{p_4}{\rho} + \frac{V_4^2}{2} + g z_4$$

Como $p_3 = p_4$ y $V_3 \approx 0$, entonces

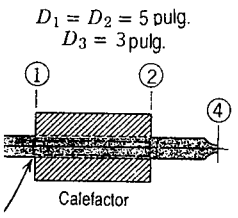
$$V_4 = \sqrt{2g(z_3 - z_4)} = \sqrt{2 \times 32.2 \frac{\text{pies}}{\text{s}^2} \times 10 \text{ pies}} = 25.4 \text{ pies/s}$$

flujo incompresible, $v =$
mina por medio de la sola
proceso, $u_2 - u_1$, depende

ura sometida a cualquier

ergía interna, du, entre
un proceso reversible

vés de un corto tramo de
Un calefactor de 10 kW
ncompresible. Encuentre



y

$$\dot{m} = \rho V_4 A_4 = 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times 25.4 \frac{\text{pies}}{\text{s}} \times 0.864 \text{ pulg.}^2 \times \frac{\text{pie}^2}{144 \text{ pulg.}^2}$$

$$\dot{m} = 0.296 \text{ slug/s}$$

Suponiendo que no hay pérdida de calor hacia los alrededores, obtenemos

$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c} = 10 \text{ kW} \times 3413 \frac{\text{Btu}}{\text{kW} \cdot \text{hr}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \text{ s}} \times \frac{\text{s}}{0.296 \text{ slug}} \times \frac{\text{slug}}{32.2 \text{ lbm}} \times \frac{\text{lbm} \cdot \text{R}}{1 \text{ Btu}}$$

$$T_2 - T_1 = 0.995 \text{ R} \longleftarrow T_2 - T_1$$

Este problema ilustra que, en general, la primera ley de la termodinámica y la ecuación de Bernoulli son ecuaciones independientes.

En el caso de flujo incompresible, estable y sin fricción a lo largo de una línea de corriente, hemos demostrado que la primera ley de la termodinámica se reduce a la ecuación de Bernoulli. De la ecuación 6.16, concluimos que no hay pérdida de energía mecánica en un flujo de tales características.

Con frecuencia resulta conveniente representar gráficamente el nivel de energía mecánica de un flujo. La ecuación de la energía en la forma de la ecuación 6.16 sugiere tal representación. Dividiendo la ecuación 6.16 entre g, obtenemos

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{constante} \tag{6.17}$$

Cada término en la ecuación 6.17 tiene dimensiones de longitud o "carga" del fluido que fluye. Los términos individuales son

$\frac{p}{\rho g}$ es la carga debida a la presión estática local

$\frac{V^2}{2g}$ es la carga debida a la presión dinámica local (energía cinética por mg unitaria de flujo que fluye)

z es la carga de elevación

H es la carga total para el flujo

La *línea de gradiente de energía* (LGE) representa la altura de carga total. Como muestra la ecuación 6.17, la altura de la LGE permanece constante para flujos sin fricción cuando no se efectúa trabajo sobre o por el fluido circulante. El líquido ascendería a la altura de la LGE en un tubo de carga total situada en el flujo.

La altura de la *línea de gradiente hidráulico* (LGH) representa la suma de la altura y las cargas de presión estática, $z + p/\rho g$. En una toma de presión estática unida al conducto del flujo, el líquido ascendería a la altura de la LGH. Para flujo en canal abierto, la LGH está en la superficie libre del líquido.

La diferencia en alturas entre la LGE y la LGH representa la carga dinámica (de velocidad),

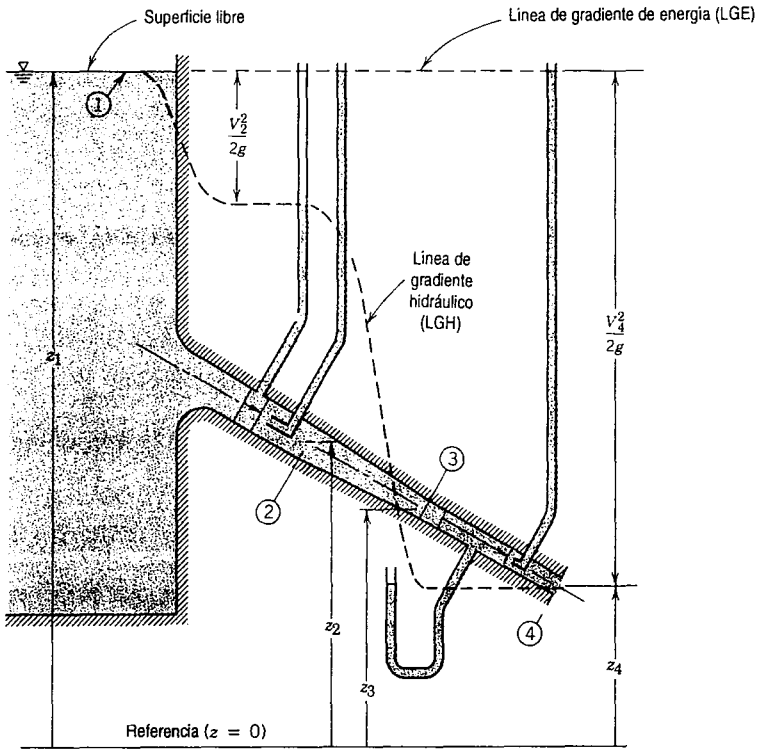


Fig. 6.6 Líneas de gradiente de energía e hidráulico para flujo sin fricción.

$V^2/2g$. La relación entre la LGE, la LGH y la carga de velocidad se ilustra esquemáticamente en la figura 6.6 para flujo sin fricción de un tanque, a través de una tubería con un reductor.

La carga total del flujo mostrado en la figura 6.6 se obtiene aplicando la ecuación 6.17 en el punto ①, la superficie libre en el depósito grande. Ahí, la velocidad es despreciable y la presión es la atmosférica (cero manométrica). De tal manera, la carga total es igual a z_1. Ésta define la altura de la línea de gradiente de energía, la cual permanece constante para este flujo, ya que no hay fricción o trabajo.

La carga de velocidad aumenta de cero a $V_2^2/2g$ conforme el fluido se acelera dentro de la primera sección del tubo de diámetro constante. Puesto que la altura de la LGE es constante, la correspondiente a la LGH debe disminuir. Cuando la velocidad se vuelve constante, la altura de la LGH permanece constante.

La velocidad aumenta otra vez en el reductor entre las secciones ② y ③. A medida que aumenta la carga de velocidad, disminuye la altura de la LGH. Cuando la velocidad se vuelve constante entre las secciones ③ y ④, la LGH permanece constante a una altura menor.

En la descarga libre en la sección ④, la carga estática es cero (manométrica). Ahí, la altura de la LGH es igual a z_4. Como se muestra, la carga de velocidad es $V_4^2/2g$. La suma de la altura LGH y la carga de velocidad es igual a la altura de la LGE. (La carga estática es negativa entre las secciones ③ y ④, debido a que la línea central de la tubería está por arriba de la LGH.)

Las tomas estáticas y los tubos de carga total conectados a los manómetros se muestran esquemáticamente en la figura 6.6. Mientras que las tomas estáticas proporcionan lecturas iguales a la altura de la LGH, los tubos de carga total lo hacen para la altura de la LGE.

Los efectos de la fricción, y las interacciones de trabajo con un flujo, se analizarán en detalle en el capítulo 8. El efecto de la fricción es convertir la energía mecánica en energía térmica interna. Por ello, la fricción reduce la carga total del fluido que circula, provocando una reducción gradual en la altura LGE. El trabajo que se añade al fluido, como el entregado por una bomba por ejemplo, aumenta la altura de la LGE.

** 6-5 ECUACIÓN DE BERNOULLI INESTABLE. INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER A LO LARGO DE UNA LÍNEA DE CORRIENTE

No es necesario restringir el desarrollo de la ecuación de Bernoulli a un flujo estable. El propósito de esta sección es desarrollar la ecuación correspondiente para flujo inestable a lo largo de una línea de corriente e ilustrar su uso.

La ecuación de momento para flujo sin fricción se encontró en la sección 6.1 como

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = \frac{D\vec{V}}{Dt} \tag{6.3}$$

La ecuación 6.3 es vectorial y puede convertirse en una ecuación escalar tomando el producto punto con $d\vec{s}$, donde $d\vec{s}$ es un elemento de distancia a lo largo de una línea de corriente. En consecuencia,

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} - g\nabla z \cdot d\vec{s} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} = \frac{DV_s}{Dt}ds = V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}ds + \frac{\partial V_s}{\partial t}ds \tag{6.18}$$

Al examinar los términos en la ecuación 6.18, observamos que

$\nabla p \cdot d\vec{s} = dp$ (el cambio en la presión a lo largo de s)

$\nabla z \cdot d\vec{s} = dz$ *(el cambio en* z a lo largo de s)

$\frac{\partial V_s}{\partial s}ds = dV_s$ (el cambio en V_s a lo largo de s)

Sustituyendo en la ecuación 6.18, obtenemos

$$-\frac{dp}{\rho} - g\,dz = V_s\,dV_s + \frac{\partial V_s}{\partial t}ds \tag{6.19}$$

La integración a lo largo de una línea de corriente, desde el punto 1 hasta el punto 2, produce

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t}ds = 0 \tag{6.20}$$

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

Para flujo incompresible, la densidad es constante. En este caso especial, la ecuación 6.20 se vuelve

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds \tag{6.21}$$

Restricciones:
1) Flujo incompresible
2) Flujo sin fricción
3) Flujo a lo largo de una línea de corriente

Para evaluar el término integral en la ecuación 6.21, la variación en $\partial V_s/\partial t$ debe conocerse como una función de s, la distancia a lo largo de la línea de corriente medida desde el punto 1. (Para flujo estable, $\partial V_s/\partial t = 0$, y la ecuación 6.21 se reduce a la ecuación 6.9.) La ecuación 6.21 puede aplicarse a cualquier flujo en el cual las restricciones sean compatibles con la situación física.

La aplicación de la ecuación 6.21 se ilustra en el problema ejemplo 6.9.

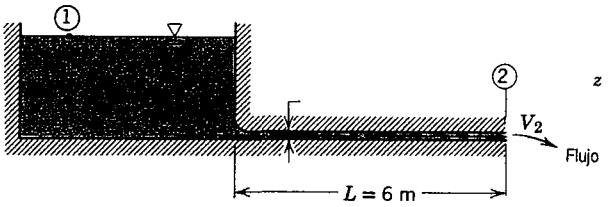
EJEMPLO 6.9 Ecuación inestable de Bernoulli

Una larga tubería se conecta a un gran depósito que está inicialmente lleno de agua a una profundidad de 3 m. La tubería mide 150 mm de diámetro y 6 m de longitud. Como una primera aproximación, la fricción puede despreciarse. Determine la velocidad del flujo que sale de la tubería como función del tiempo después de que una tapa se quita de su extremo libre. El depósito es lo suficientemente grande para que un cambio en su nivel pueda despreciarse.

PROBLEMA EJEMPLO 6.9

DATOS: Una tubería y el gran depósito que se muestra.

ENCUENTRE: $V_2(t)$.



SOLUCIÓN:

Aplique la ecuación de Bernoulli al flujo inestable a lo largo de una línea de corriente que va del punto ① al punto ②.

$$\text{Ecuación básica:} \quad \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

$\simeq 0$ (5) en $V_1^2/2$; $= 0$ (6) en gz_2

Suposiciones:
1) Flujo incompresible
2) Flujo sin fricción
3) Flujo a lo largo de una línea de corriente de ① a ②.
4) $p_1 = p_2 = p_{atm}$
5) $V_1^2 \simeq 0$
6) $z_2 = 0$

7) $z_1 = h$ = constante
8) Desprecie la velocidad en el depósito, excepto en la pequeña región cercana a la entrada al tubo

Entonces

$$g z_1 = g h = \frac{V_2^2}{2} + \int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

En vista de la suposición 8), la integral se vuelve

$$\int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds \approx \int_0^L \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

En el tubo, $V_s = V_2$ en todas partes, por lo que

$$\int_0^L \frac{\partial V_s}{\partial t} ds = \int_0^L \frac{d V_2}{dt} ds = L \frac{d V_2}{dt}$$

La sustitución produce

$$g h = \frac{V_2^2}{2} + L \frac{d V_2}{dt}$$

Al separar variables obtenemos

$$\frac{d V_2}{2 g h - V_2^2} = \frac{dt}{2L}$$

Integrando entre los límites $V = 0$ en $t = 0$ y $V = V_2$ en $t = t$,

$$\int_0^{V_2} \frac{dV}{2gh - V^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2gh}} \tanh^{-1} \left(\frac{V}{\sqrt{2gh}} \right) \right]_0^{V_2} = \frac{t}{2L}$$

Como $\tanh^{-1}(0) = 0$, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2gh}} \tanh^{-1} \left(\frac{V_2}{\sqrt{2gh}} \right) = \frac{t}{2L}$$

o

$$\frac{V_2}{\sqrt{2gh}} = \tanh \left(\frac{t}{2L} \sqrt{2gh} \right) \qquad V_2(t)$$

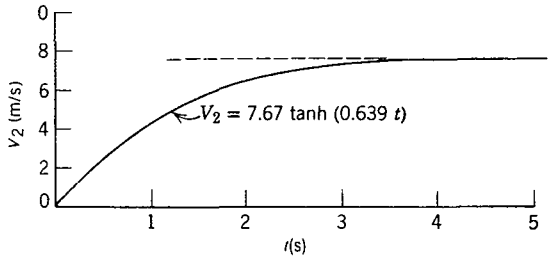
Para las condiciones dadas,

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3 \text{ m}} = 7.67 \text{ m/s}$$

y

$$\frac{t}{2L} \sqrt{2gh} = \frac{t}{2} \times \frac{1}{6 \text{ m}} \times 7.67 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.639t$$

El resultado es entonces $V_2 = 7.67 \tanh(0.639t)$ m/s.



** 6-6 FLUJO IRROTACIONAL

Un *flujo irrotacional* es aquél en el que los elementos de fluido que se mueven en el campo de flujo no están sujetos a ninguna rotación. Para $\vec{\omega} = 0$, $\nabla \times \vec{V} = 0$, y de la ecuación 5.13,

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6.22}$$

En coordenadas cilíndricas, de la ecuación 5.16, la condición de irrotacionalidad requiere que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0 \tag{6.23}$$

6-6.1 Ecuación de Bernoulli aplicada al flujo irrotacional

En la sección 6-3.1, integramos la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente en flujo no viscoso, incompresible y estable para obtener la ecuación de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.9}$$

La ecuación 6.9 puede aplicarse entre cualesquiera dos puntos en la misma línea de corriente. El valor de la constante variará, en general, de una línea a otra.

Si, además de ser no viscoso, estable e incompresible, el campo de flujo también es irrotacional (el campo de velocidad es tal que $2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = 0$), podemos demostrar que la ecuación de Bernoulli puede aplicarse entre dos puntos cualesquiera en el flujo. Por consiguiente, el valor de la constante en la ecuación 6.9 es el mismo para todas las líneas de corriente. Para ilustrar esto, empezamos con la ecuación de Euler en forma vectorial,

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \tag{6.10}$$

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto. (Advierta que la sección 5-2 contiene los fundamentos necesarios para el estudio de las secciones 6-6.3, 6-6.4 y 6-6.5.)

Empleando la identidad vectorial

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}) - \vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})$$

vemos que para flujo irrotacional, puesto que $\nabla \times \vec{V} = 0$, entonces,

$$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})$$

y la ecuación de Euler para flujo irrotacional puede escribirse como

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}) = \frac{1}{2}\nabla(V^2) \tag{6.24}$$

Durante el intervalo dt, una partícula de fluido se mueve de la posición vectorial $\vec{r}$, a la $\vec{r} + d\vec{r}$; el desplazamiento $d\vec{r}$ es infinitesimal y arbitrario en cualquier dirección. Tomando el producto punto de $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ con cada uno de los términos en la ecuación 6.24, tenemos

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\vec{r} - g\nabla z\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\nabla(V^2)\cdot d\vec{r}$$

y, en consecuencia,

$$-\frac{dp}{\rho} - g\,dz = \frac{1}{2}d(V^2)$$

o

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(V^2) + g\,dz = 0$$

La integración de esta ecuación produce

$$\int\frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.25}$$

En flujo incompresible, ρ = constante, y

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.26}$$

Puesto que $d\vec{r}$ fue un desplazamiento arbitrario, entonces para un flujo no viscoso, incompresible y estable que es también irrotacional, la ecuación 6.26 es válida entre cualesquiera dos puntos en el campo de flujo.

6-6.2 Potencial de velocidad

En la sección 5-2 formulamos la función de corriente, ψ, como una relación entre las líneas de corriente y la conservación de la masa para flujo bidimensional incompresible.

Podemos formular una relación llamada la función potencial, ϕ, para un campo de velocidad que es irrotacional. Para hacerlo, debemos emplear la identidad vectorial fundamental[8]

$$\text{rot}(\text{grad}\ \phi) = \nabla \times \nabla \phi = 0 \tag{6.27}$$

que es válida si ϕ es una función escalar (de las coordenadas espaciales y el tiempo) con primera y segunda derivadas continuas.

Por tanto, para un flujo irrotacional en el cual $\nabla \times \vec{V} = 0$, debe existir una función escalar, ϕ, tal que el gradiente de ϕ sea igual al vector velocidad, $\vec{V}$. Para que la dirección positiva del flujo esté en la dirección de disminución de ϕ (en forma análoga a la dirección positiva de la transferencia de calor que se define en la dirección de la temperatura decreciente), definimos ϕ tal que

$$\vec{V} \equiv -\nabla\phi \tag{6.28}$$

Por consiguiente,

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{6.29}$$

Con la función potencial definida de esta manera, la condición de irrotacionalidad, ecuación 6.22, se satisface idénticamente.

En coordenadas cilíndricas,

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.18}$$

De la ecuación 6.28, por tanto, en coordenadas cilíndricas

$$V_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad V_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{6.30}$$

El potencial de velocidad, ϕ, existe sólo para flujo irrotacional. La función de corriente, ψ, satisface la ecuación de continuidad para flujo incompresible; la función de corriente no está sujeta a la restricción de flujo irrotacional.

Es posible que la irrotacionalidad sea una suposición válida para aquellas regiones de un flujo en las que son despreciables las fuerzas viscosas.[9] (Por ejemplo, una región de tales características existe fuera de la capa límite en el flujo sobre una superficie sólida.) La teoría para flujo irrotacional se desarrolla en términos de un fluido imaginario ideal cuya viscosidad es idénticamente cero. Puesto que, en flujo irrotacional, el campo de velocidad puede definirse por la función potencial, ϕ, la teoría a menudo se conoce como teoría de flujo potencial.

Todos los fluidos reales poseen viscosidad, pero hay muchas situaciones en las que la suposición de flujo no viscoso simplifica considerablemente el análisis y, al mismo tiempo, brinda

[8] La prueba de esta identidad puede encontrarse en cualquier libro de análisis vectorial o puede probarse descomponiendo la ecuación 6.27 en sus componentes.

[9] Se muestran ejemplos de movimiento rotacional e irrotacional en la película de la NCFMF, *Vorticidad*, A. H. Shapiro, director.

resultados significativos. En virtud de su utilidad y encanto matemático, el flujo potencial se ha estudiado ampliamente.[10]

6-6.3 Función de corriente y potencial de velocidad para flujo bidimensional, incompresible e irrotacional; ecuación de Laplace

Para un flujo bidimensional, incompresible e irrotacional tenemos expresiones para las componentes de velocidad, u y v, en términos tanto de la función de corriente, ψ, como del potencial de velocidad, ϕ,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.4}$$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{6.29}$$

Sustituyendo u y v de la ecuación 5.4 en la condición de irrotacionalidad,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6.22}$$

obtenemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.31a}$$

Con la sustitución de u y v de la ecuación 6.29 en la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.3}$$

resulta

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.31b}$$

Las ecuaciones 6.31a y 6.31b son formas de la ecuación de Laplace —una ecuación que surge en muchas áreas de las ciencias físicas y la ingeniería—. Cualquier función de ψ o ϕ que satisface la ecuación de Laplace representa un posible campo de flujo bidimensional, irrotacional e incompresible.

En la sección 5-2 demostramos que la función de corriente, ψ, es constante a lo largo de una línea de corriente. Para ψ = constante, $d\psi = 0$ y

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

[10] Los lectores interesados en el estudio detallado de la teoría de flujo potencial pueden encontrar de interés las referencias [1-3].

La pendiente de una línea de corriente —una línea de ψ constante— está dada por

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = -\frac{\partial\psi/\partial x}{\partial\psi/\partial y} = -\frac{-v}{u} = \frac{v}{u} \tag{6.32}$$

A lo largo de una línea de ϕ constante, $d\phi = 0$ y

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0$$

Consecuentemente, la pendiente de una línea de potencial —una línea de ϕ constante— está dada por

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} = -\frac{u}{v} \tag{6.33}$$

La última igualdad de la ecuación 6.33 resulta del empleo de la ecuación 6.29.

Al comparar las ecuaciones 6.32 y 6.33, vemos que la pendiente de una línea de ψ constante en cualquier punto es el recíproco negativo de la pendiente de la línea ϕ constante en ese punto: las líneas de ψ y ϕ constantes son ortogonales. Esta propiedad de las líneas de potencial y de las líneas de corriente es útil en los análisis gráficos de campos de flujo.

EJEMPLO 6.10 Potencial de velocidad

Considere el campo de flujo dado por $\psi = ax^2 - ay^2$, donde $a = 3\ \text{s}^{-1}$. Demuestre que el flujo es irrotacional. Determine el potencial de velocidad para este flujo.

PROBLEMA EJEMPLO 6.10

DATOS: Un campo de flujo incompresible con $\psi = ax^2 - ay^2$, donde $a = 3\ \text{s}^{-1}$.

ENCUENTRE: *a*) Demuestre que el flujo es irrotacional.
b) Determine el potencial de velocidad para este flujo.

SOLUCIÓN:
Si el flujo es irrotacional, entonces $\omega_z = 0$. Puesto que

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

entonces

$$u = \frac{\partial}{\partial y}(ax^2 - ay^2) = -2ay \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 - ay^2) = -2ax$$

por lo que

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2ax) - \frac{\partial}{\partial y}(-2ay) = -2a + 2a = 0 \qquad \longleftarrow 2\omega_z$$

Por tanto, el flujo es irrotacional.

Las componentes de la velocidad pueden escribirse en términos del potencial de velocidad como

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

En consecuencia, $u = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -2ay$ y $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2ay$. Integrando con respecto a x resulta $\phi = 2axy + f(y)$, donde $f(y)$ es una función arbitraria de y. Entonces,

$$v = -2ax = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}[2axy + f(y)]$$

Por tanto, $-2ax = -2ax - \dfrac{\partial f(y)}{\partial y} = -2ax - \dfrac{df}{dy}$, por lo que $\dfrac{df}{dy} = 0$ y $f =$ constante. De tal modo

$\phi = 2axy +$ constante ϕ

También podemos demostrar que las líneas de ψ y ϕ constantes son ortogonales.

$$\psi = ax^2 - ay^2 \qquad \text{y} \qquad \phi = 2axy + c$$

Para $\psi =$ constante, $d\psi = 0 = 2ax\,dx - 2ay\,dy$; por tanto $\left.\dfrac{dy}{dx}\right)_{\psi = c} = \dfrac{x}{y}$

Para $\phi =$ constante, $d\phi = 0 = 2ay\,dx + 2ax\,dy$; por tanto $\left.\dfrac{dy}{dx}\right)_{\phi = c} = -\dfrac{y}{x}$

Las pendientes de las líneas de ϕ y ψ constantes son recíprocos negativos. Por ello, las líneas de ϕ constante son ortogonales a las líneas de ψ constante.

Este problema ilustra la relación entre la función de corriente, el campo de velocidad y el potencial de velocidad.

6-6.4 Flujos planos elementales

Es posible construir una variedad de flujos de potencial mediante la superposición de patrones de flujo elementales. Las funciones ψ y ϕ correspondientes a cinco flujos bidimensionales elementales —un flujo uniforme, una fuente, un sumidero, un vórtice y un doblete— se resumen en la tabla 6.1. Las funciones ψ y ϕ pueden obtenerse del campo de velocidad de cada flujo elemental.

Un *flujo uniforme* de velocidad constante paralelo al eje x satisface idénticamente la ecuación de continuidad y la condición de irrotacionalidad. En la tabla 6.1 hemos mostrado las funciones ψ y ϕ para un flujo uniforme en la dirección x positiva.

Para un flujo uniforme de magnitud constante, V, que forma un ángulo α con el eje x,

$$\psi = (V \cos \alpha)y - (V \operatorname{sen} \alpha)x$$

$$\phi = -(V \operatorname{sen} \alpha)y - (V \cos \alpha)x$$

Una *fuente* simple es un patrón de flujo en el plano xy en el cual el flujo se desplaza radialmente hacia afuera a partir del eje z y simétricamente en todas las direcciones. La intensidad, q, de la fuente es la relación de flujo volumétrico por unidad de profundidad. A cualquier radio, r, desde

Tabla 6.1 Flujos planos elementales

Tabla 6.1 Flujos planos elementales

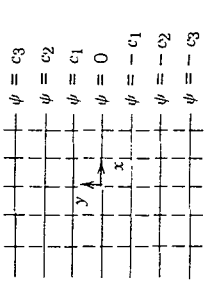
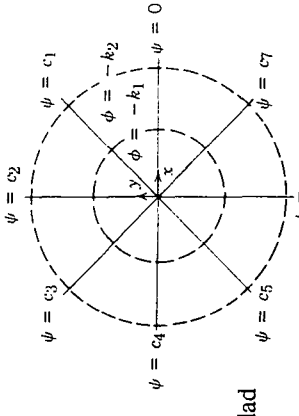
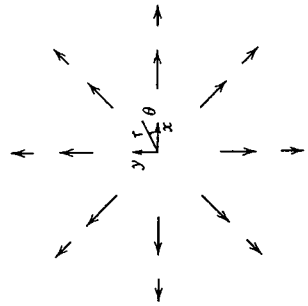
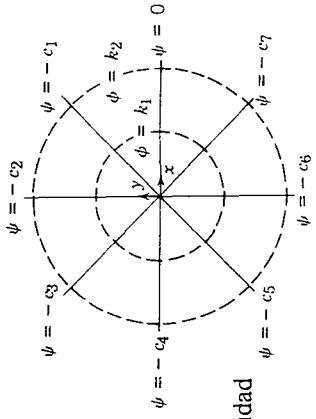
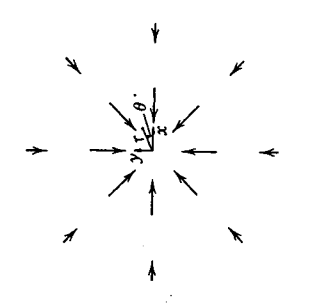
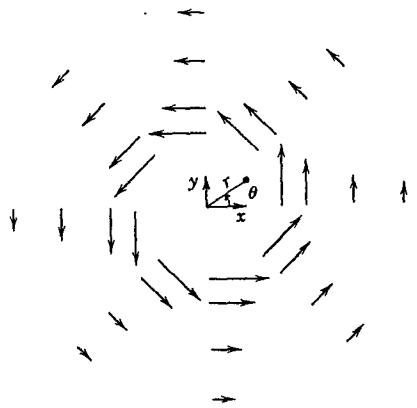
Flujo uniforme (dirección x positiva) $u = U$ $\quad \psi = Uy$ $v = 0$ $\quad \phi = -Ux$ $\Gamma = 0$ alrededor de cualquier curva cerrada		
Flujo de fuente (desde el origen) $V_r = \dfrac{q}{2\pi r}$ $\quad \psi = \dfrac{q}{2\pi}\theta$ $V_\theta = 0$ $\quad \phi = -\dfrac{q}{2\pi}\ln r$ El origen es un punto singular q es el flujo volumétrico por unidad de profundidad $\Gamma = 0$ alrededor de cualquier curva cerrada		
Flujo de sumidero (hacia el origen) $V_r = -\dfrac{q}{2\pi r}$ $\quad \psi = -\dfrac{q}{2\pi}\theta$ $V_\theta = 0$ $\quad \phi = \dfrac{q}{2\pi}\ln r$ El origen es un punto singular q es el flujo volumétrico por unidad de profundidad $\Gamma = 0$ alrededor de cualquier curva cerrada		

Tabla 6.1 Flujos planos elementales (continuación)

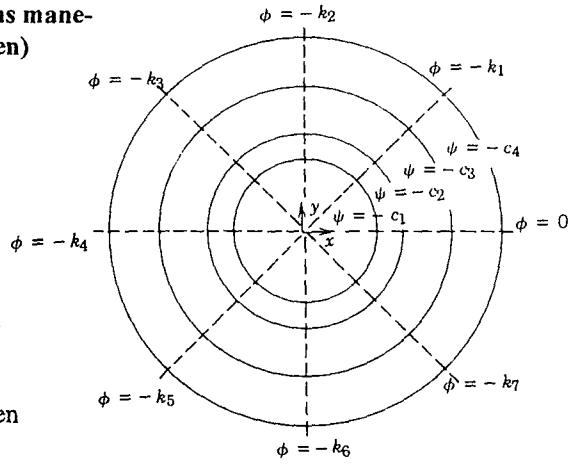


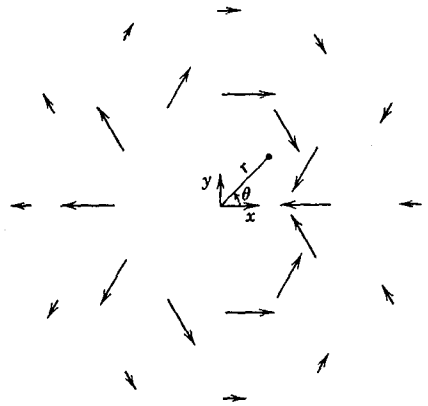
Vórtice irrotacional (contrario a las manecillas del reloj, centrado en el origen)

$$V_r = 0 \qquad \psi = -\frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$V_\theta = \frac{K}{2\pi r} \qquad \phi = -\frac{K}{2\pi}\theta$$

El origen es un punto singular
K es la intensidad del vórtice
$\Gamma = K$ alrededor de cualquier curva cerrada que encierre el origen
$\Gamma = 0$ alrededor de cualquier curva cerrada que no encierre el origen



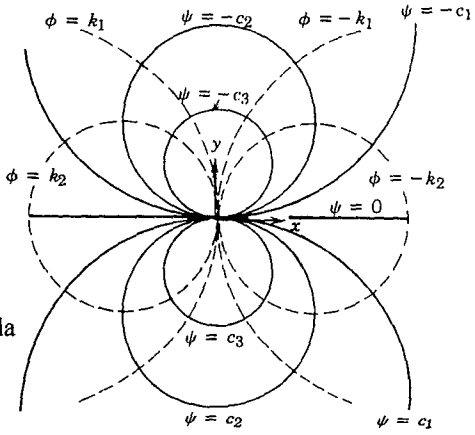


Doblete (centrado en el origen)

$$V_r = -\frac{\Lambda}{r^2}\cos\theta \qquad \psi = -\frac{\Lambda \operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$V_\theta = -\frac{\Lambda}{r^2}\operatorname{sen}\theta \qquad \phi = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r}$$

El origen es un punto singular
Λ es la intensidad del doblete
$\Gamma = 0$ alrededor de cualquier curva cerrada



una fuente, la velocidad tangencial, V_θ, es cero; la velocidad radial, V_r, es la relación de flujo volumétrico por unidad de profundidad, q, dividida por el área de flujo por unidad de profundidad, $2\pi r$. De tal modo, $V_r = q/2\pi r$ para una fuente. Las funciones ψ y ϕ para una fuente se muestran en la tabla 6.1.

En un *sumidero* simple, el flujo se desplaza radialmente hacia adentro; un sumidero es una fuente negativa. Las funciones ψ y ϕ para un sumidero que se presentan en la tabla 6.1, son las negativas de las funciones correspondientes para un flujo de fuente.

El origen ya sea de un sumidero o de una fuente es un punto singular, puesto que la velocidad radial se aproxima a infinito conforme el radio se acerca a cero. De ese modo, mientras un flujo real puede semejar una fuente o un sumidero para algunos valores de r, las fuentes y los sumideros no tienen contrapartes físicas exactas. El valor fundamental del concepto de fuentes y sumideros consiste en que, cuando se combinan con otros flujos elementales, producen patrones de flujo que representan adecuadamente flujos reales.

Un patrón de flujo en el que las líneas de corriente son círculos concéntricos es un vórtice; en un *vórtice libre (irrotacional)*, las partículas del fluido no rotan cuando se mueven alrededor del centro del vórtice. La distribución de velocidad en un vórtice irrotacional puede determinarse a partir de las ecuaciones de Euler y de Bernoulli. Para flujo irrotacional, la ecuación de Bernoulli es válida entre cualesquiera dos puntos en el campo de flujo. En el caso de flujo en un plano horizontal,

$$\frac{1}{\rho} dp = -V_\theta \, dV_\theta$$

La ecuación de Euler normal a la línea de corriente es

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{V_\theta^2}{r}$$

La combinación de estas ecuaciones produce

$$\frac{dp}{\rho} = -V_\theta \, dV_\theta = \frac{V_\theta^2}{r} \, dr$$

De la última igualdad

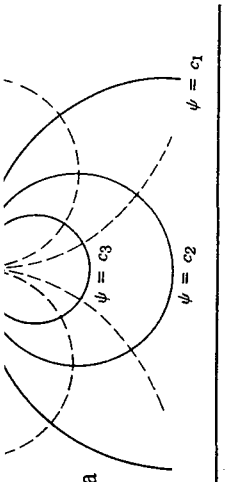
$$V_\theta \, dr + r \, dV_\theta = 0$$

La integración de esta ecuación da como resultado

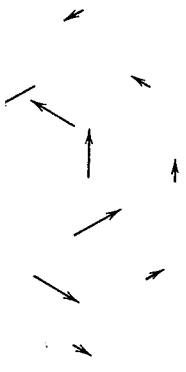
$$V_\theta r = \text{constante}$$

La intensidad, K, del vórtice se define como $K = 2\pi r V_\theta$; las dimensiones de K son L^2/t (relación de flujo volumétrico por unidad de profundidad). El vórtice irrotacional es una aproximación razonable al campo de flujo en un tornado (excepto en la región del origen, ya que éste es un punto singular).

El flujo "elemental" final listado en la tabla 6.1 es el *doblete*. Este flujo se produce matemáticamente dejando que se combinen una fuente y un sumidero de intensidades numéricas



El origen es un punto singular
Λ es la intensidad del doblete
$\Gamma = 0$ alrededor de cualquier curva cerrada



iguales. En el límite, cuando la distancia, δs, entre ellos se aproxima a cero, sus intensidades aumentan de modo que el producto $q\ \delta s/2\pi$ tiende a un valor finito, Λ, que se denomina la intensidad del doblete.

6-6.5 Superposición de flujos planos elementales

Mostramos en la sección 6-6.3 que tanto ϕ como ψ satisfacen la ecuación de Laplace para flujo que es incompresible e irrotacional. Como ésta es una ecuación diferencial parcial homogénea y lineal, las soluciones pueden superponerse (sumarse en conjunto) para desarrollar patrones de flujo más complejos e interesantes. De manera que si ψ_1 y ψ_2 satisfacen la ecuación de Laplace, entonces ocurre lo mismo con $\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$. Los flujos planos elementales son los bloques constitutivos en este proceso de supérposición.

El objetivo de la superposición de flujos elementales es producir patrones de flujo similares a los de interés práctico. El modelo de flujo ideal postula un fluido ideal con viscosidad cero y, por tanto, esfuerzos de corte cero. Como no hay flujo a través de una línea de corriente, cualquier contorno de una de ellas puede imaginarse para representar una superficie sólida.

La combinación de la elegancia matemática y la utilidad del flujo potencial ha atraído a muchos estudiosos. Algunos de los matemáticos aplicados más famosos de la historia estudiaron la teoría y aplicaciones de la "hidrodinámica" y antes de 1900, la denominaron flujo potencial. La lista incluye a Bernoulli, Lagrange, d'Alembert, Cauchy, Rankine y Euler [4].

Hasta el final del siglo diecinueve, los estudiosos de la hidrodinámica pura fracasaron en la obtención de resultados que concordaran con el experimento. Los flujos potenciales producían formas de cuerpo con sustentación pero predecían arrastre cero (la "paradoja de d'Alembert"). Dos influencias cambiaron esta situación: en primer lugar, Prandtl introdujo el concepto de capa límite y comenzó a desarrollar la teoría, y en segundo, el interés en la aeronáutica aumentó considerablemente al inicio de este siglo.

Prandtl demostró mediante el análisis matemático y elegantes experimentos de gran sencillez que los efectos viscosos están confinados en una capa límite delgada sobre la superficie de un cuerpo. Incluso para fluidos reales, el flujo hacia afuera de la capa límite se comporta como si el fluido tuviera viscosidad cero. Los gradientes de presión del flujo externo se ejercen sobre la capa límite.

La entrada más importante para el cálculo del flujo de fluido real en la capa límite (y, en consecuencia, el arrastre sobre un cuerpo) es la distribución de presión. Una vez que se conoce el campo de velocidad a partir de la solución del flujo potencial, es posible calcular la distribución de presión. El conocimiento del comportamiento de la capa límite permite predecir el arrastre, y en algunos casos, la sustentación sobre un objeto.

Pueden emplearse dos métodos de combinación de flujos elementales. El método directo se basa en la combinación de flujos elementales y posteriormente, en el cálculo directo del patrón de la línea de corriente, la forma del cuerpo, el campo de velocidad, el punto de estancamiento y la distribución de presión. En la tabla 6.2 se presentan varios ejemplos de patrones de flujo producidos por el método directo.

El problema ejemplo 6.11 ilustra el método de superposición. La combinación de un doblete con un flujo uniforme produce el flujo estable de un fluido ideal que pasa por un cilindro. Esta combinación se usó para desarrollar el patrón de flujo para un flujo ideal alrededor del cilindro mostrado en la figura 2.12. La solución del flujo potencial proporciona el campo de velocidad. La

Tabla 6.2 Superposición de flujos planos elementales

cero, sus intensidades
1, que se denomina la

de Laplace para flujo
l parcial homogénea y
rollar patrones de flujo
n de Laplace, entonces
oques constitutivos en

nes de flujo similares
on viscosidad cero y,
le corriente, cualquier
ólida.
ncial ha atraído a mu-
historia estudiaron la
on flujo potencial. La
4].
pura fracasaron en la
otenciales producían
oja de d'Alembert").
) el concepto de capa
utica aumentó consi-

ntos de gran sencillez
e la superficie de un
comporta como si el
ejercen sobre la capa

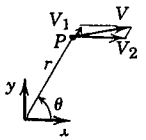
la capa límite (y, en
vez que se conoce el
lcular la distribución
redecir el arrastre, y

El método directo se
directo del patrón de
e estancamiento y la
s de flujo producidos

ación de un doblete
or un cilindro. Esta
redeor del cilindro
po de velocidad. La

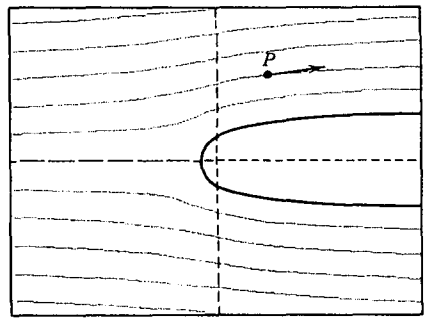
Tabla 6.2 Superposición de flujos planos elementales

Fuente y flujo uniforme (flujo que pasa por medio cuerpo)

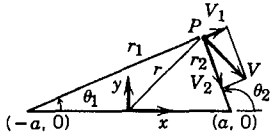


$$\psi = \psi_{so} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta + Uy = \frac{q}{2\pi}\theta + Ur\,\text{sen}\,\theta$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln r - Ux = -\frac{q}{2\pi}\ln r - Ur\cos\theta$$

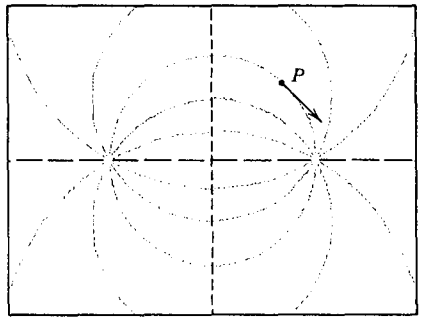


Fuente y sumidero (igual intensidad, distancia de separación sobre el eje $x = 2a$)

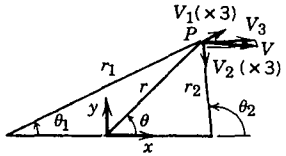


$$\psi = \psi_{so} + \psi_{si} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{si} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln r_1 + \frac{q}{2\pi}\ln r_2 = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$



Fuente, sumidero y flujo uniforme (flujo que pasa por un cuerpo de Rankine)



$$\psi = \psi_{so} + \psi_{si} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 + Uy$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) + Ur\,\text{sen}\,\theta$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{si} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{q}{2\pi}\ln r_1 + \frac{q}{2\pi}\ln r_2 - Ux$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} - Ur\cos\theta$$

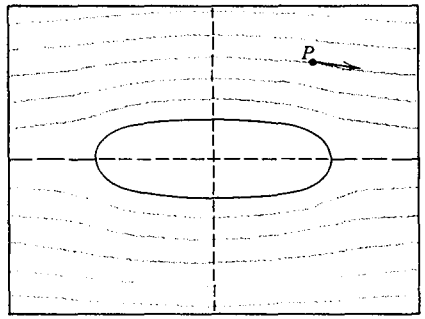
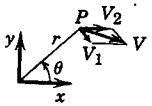


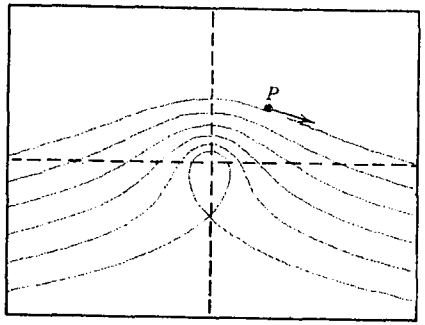
Tabla 6.2 Superposición de flujos planos elementales (continuación)

Vórtice (en el sentido de las manecillas del reloj) y flujo uniforme

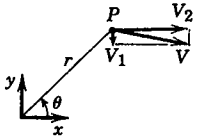


$$\psi = \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{K}{2\pi}\ln r + Uy = \frac{K}{2\pi}\ln r + Ur\,\text{sen}\,\theta$$

$$\phi = \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = \frac{K}{2\pi}\theta - Ux = \frac{K}{2\pi}\theta - Ur\cos\theta$$



Doblete y flujo uniforme (flujo que pasa por un cilindro)

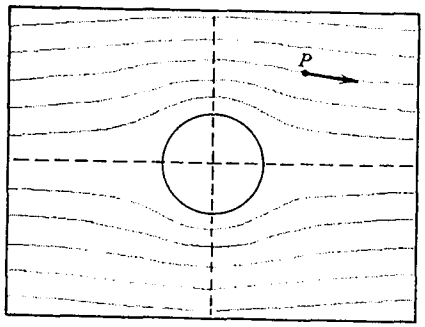


$$\psi = \psi_d + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\Lambda\,\text{sen}\,\theta}{r} + Uy = -\frac{\Lambda\,\text{sen}\,\theta}{r} + Ur\,\text{sen}\,\theta$$

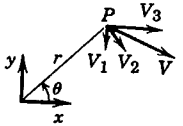
$$\psi = U\left(r - \frac{\Lambda}{Ur}\right)\text{sen}\,\theta = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\text{sen}\,\theta \qquad a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}$$

$$\phi = \phi_d + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} - Ux = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} - Ur\cos\theta$$

$$\phi = -U\left(r + \frac{\Lambda}{Ur}\right)\cos\theta = -Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$



Doblete, vórtice (en el sentido de las manecillas del reloj) y flujo uniforme (flujo que pasa por un cilindro con circulación)



$$\psi = \psi_d + \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = -\frac{\Lambda\,\text{sen}\,\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\ln r + Uy$$

$$\psi = -\frac{\Lambda\,\text{sen}\,\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\ln r + Ur\,\text{sen}\,\theta = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\text{sen}\,\theta + \frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$\phi = \phi_d + \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\theta - Ux$$

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}};\ K < 4\pi aU \qquad \phi = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\theta - Ur\cos\theta = -Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{K}{2\pi}\theta$$

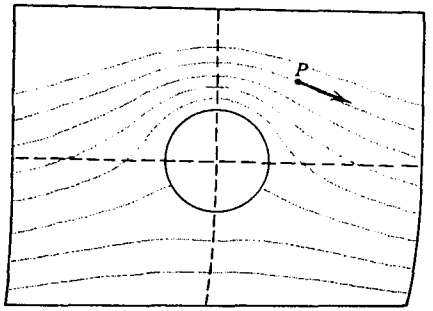
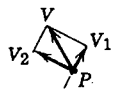


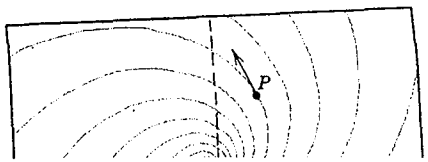
Tabla 6.2 Superposición de flujos planos elementales (continuación)

Fuente y vórtice (vórtice espiral)



$$\psi = \psi_{so} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$\frac{q}{2\pi}\ln r - \frac{K}{2\pi}\theta$$



$$\psi = -\frac{\Lambda \operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\ln r + Ur\operatorname{sen}\theta = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$\phi = \phi_d + \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\theta - Ux$$

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}};\ K < 4\pi aU \qquad \phi = -\frac{\Lambda\cos\theta}{r} + \frac{K}{2\pi}\theta - Ur\cos\theta = -Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{K}{2\pi}\theta$$

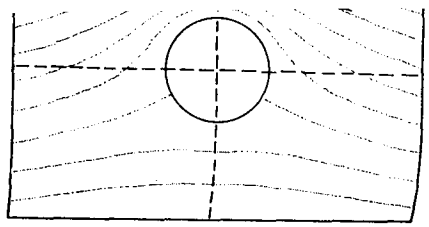
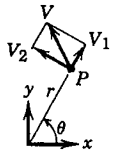


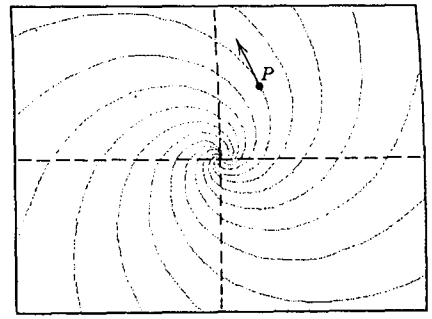
Tabla 6.2 Superposición de flujos planos elementales (continuación)

Fuente y vórtice (vórtice espiral)

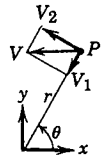


$$\psi = \psi_{so} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln r - \frac{K}{2\pi}\theta$$

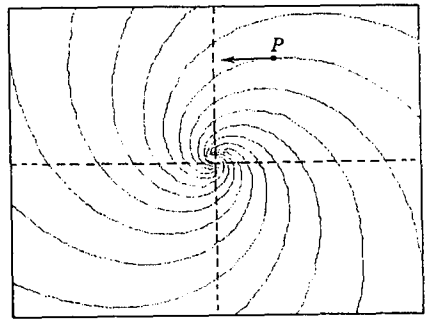


Sumidero y vórtice

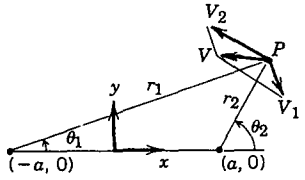


$$\psi = \psi_{si} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi}\ln r$$

$$\phi = \phi_{si} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q}{2\pi}\ln r - \frac{K}{2\pi}\theta$$

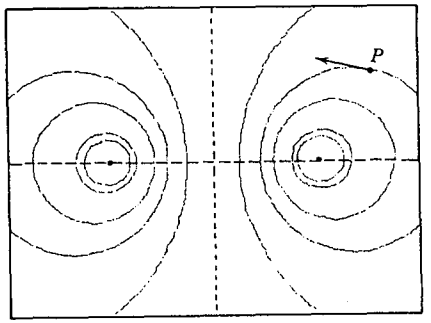


Par de vórtices (igual intensidad, rotación opuesta, distancia de separación sobre el eje $x = 2a$)



$$\psi = \psi_{v1} + \psi_{v2} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{K}{2\pi}\ln r_1 + \frac{K}{2\pi}\ln r_2 = \frac{K}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi = \phi_{v1} + \phi_{v2} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{K}{2\pi}\theta_1 + \frac{K}{2\pi}\theta_2 = \frac{K}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)$$



ecuación de Bernoulli puede utilizarse después para obtener el campo de presión. Varios ejemplos adicionales de superposición se incluyen en los problemas al final del capítulo.

Los patrones de flujo complejos pueden desarrollarse combinando flujos elementales. Es posible emplear fuentes de línea distribuidas, sumideros e "imágenes" para crear cuerpos de forma arbitraria. Además, pueden utilizarse técnicas matemáticas poderosas, tales como variables complejas y transformaciones conformes, para obtener campos de flujo correspondientes a geometrías de interés [5-8].

El método inverso de superposición calcula la forma del cuerpo para producir una distribución de presión deseada. Las singularidades distribuidas —vórtices, fuentes y sumideros localizados en el eje o en la superficie del cuerpo— se emplean para modelar el cuerpo [9]. Es necesario utilizar un gran código de computadora para evaluar la distribución de singularidades requeridas para producir la distribución de presión deseada [10].

El empleo de computadoras cada vez más grandes y el desarrollo de códigos más rápidos de hoy en día está permitiendo la solución de problemas complejos tridimensionales utilizando los métodos directo o inverso [11].

EJEMPLO 6.11 Flujo sobre un cilindro: superposición de un doblete y flujo uniforme

Para flujo irrotacional, incompresible y bidimensional, la superposición de un doblete y un flujo uniforme representa el flujo alrededor de un cilindro circular. Obtenga la función de corriente y el potencial de velocidad para este patrón de flujo. Encuentre el campo de velocidad, localice los puntos de estancamiento y la superficie del cilindro y obtenga la distribución de presión en la superficie.

PROBLEMA EJEMPLO 6.11

DATOS: Un flujo irrotacional, incompresible y bidimensional formado a partir de la superposición de un doblete y un flujo uniforme.

ENCUENTRE: *a*) La función de corriente y el potencial de velocidad.
b) El campo de velocidad.
c) Los puntos de estancamiento.
d) La superficie del cilindro.
e) La distribución de presión en la superficie.

SOLUCIÓN:
Las funciones de corriente pueden sumarse debido a que el campo de flujo es incompresible e irrotacional. De modo que de la tabla 6.1, la función de corriente para la combinación es

$$\psi = \psi_d + \psi_{uf} = -\Lambda \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} + U r \operatorname{sen}\theta \qquad \psi$$

El potencial de velocidad es

$$\phi = \phi_d + \phi_{uf} = -\frac{\Lambda \cos\theta}{r} - U r \cos\theta \qquad \phi$$

Las componentes de velocidad correspondientes se obtienen usando la ecuación 6.29 como

$$V_r \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\Delta \cos \theta}{r^2} + U \cos \theta$$

$$V_\theta \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1\,\Delta \operatorname{sen} \theta}{r \quad r^2} + U \operatorname{sen} \theta$$

El campo de velocidad es

$$\vec{V} = V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta \; 5 \left(\frac{\Delta \cos \theta}{r^2} + U \cos \theta \right) \hat{e}_r + \left(-\frac{\Lambda \operatorname{sen} \theta}{r_2} - U \operatorname{sen} \theta \right) - \hat{e}_\theta \qquad \vec{V}$$

Los puntos de estancamiento se encuentran donde $\vec{V} = V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta = 0$, por lo que

$$V_r = 0 = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r^2} + U \cos \theta = \cos \theta \left(U - \frac{\Lambda}{r^2} \right)$$

De tal modo $V_r = 0$ cuando $r = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}} = a$. Además,

$$V_\theta = 0 = -\frac{\Delta \operatorname{sen} \theta}{r^2} - U \operatorname{sen} \theta + -U \operatorname{sen} \theta \left(U + \frac{\Lambda \operatorname{sen} \theta}{r_2} \right)$$

De tal modo $V_\theta = 0$ cuando $\theta = 0, \pi$.

Los puntos de estancamiento son $(r, \theta) = (a, 0), (a, \pi)$. — Puntos de estancamiento

Advierta que $V_r = 0$ a lo largo de $r = a$, de modo que esto representa flujo alrededor de un cilindro circular, como se muestra en la tabla 6.2.

El flujo es irrotacional, por lo que la ecuación de Bernoulli puede aplicarse entre cualesquiera dos puntos. Aplicando la ecuación entre un punto alejado aguas arriba y un punto en la superficie del cilindro (despreciando las diferencias de altura), obtenemos

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} + g z = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z$$

Por consiguiente,

$$p - p_\infty = \tfrac{1}{2} \rho (U^2 - V^2)$$

A lo largo de la superficie, $r = a$, y

$$v^2 \quad V_\theta^2 = \left(-\frac{\Lambda}{a^2} - U \right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 4U^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

puesto que $\Lambda = Ua^2$, la sustitución produce

$$p - p_\infty = \tfrac{1}{2} \rho (U^2 - 4U^2 \operatorname{sen}^2 \theta) = \tfrac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta)$$

o

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_2} = 1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Distribución de presión

Este problema ilustra la técnica utilizada para combinar flujos planos elementales con el fin de formar un patrón de flujo de interés práctico.

6-8 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 6, usted será capaz de efectuar lo siguiente:

1. Escribir las ecuaciones de Euler en *a*) forma vectorial, *b*) coordenadas rectangulares, *c*) coordenadas cilíndricas y *d*) coordenadas de línea de corriente.
2. Integrar la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente en flujo estable para obtener la ecuación de Bernoulli. Enunciar las restricciones en el uso de la ecuación de Bernoulli.
3. Definir la presión estática, la presión de estancamiento y la presión dinámica.
4. Para flujo estable, incompresible y no viscoso a través de un tubo de corriente, enunciar las condiciones bajo las cuales la primera ley de la termodinámica se reduce a la ecuación de Bernoulli.

**5. Escribir la ecuación inestable de Bernoulli para flujo a lo largo de una línea de corriente. Indicar las restricciones en el uso de la ecuación.

**6. Para un flujo estable, no viscoso e incompresible que es irrotacional, mostrar que la ecuación de Bernoulli puede aplicarse entre cualesquiera dos puntos en el campo de flujo.

**7. Para un campo de flujo bidimensional, irrotacional e incompresible:
   a) Dado el campo de velocidad, determinar el potencial de velocidad, ϕ.
   b) Dado el potencial de velocidad, determinar el campo de velocidad.
   c) Demostrar que las líneas de ψ constante y ϕ constante son ortogonales.
   d) Dada ψ, determinar ϕ (y viceversa).

**8. Dada la función de corriente, ψ, para un flujo bidimensional e irrotacional que fluye alrededor de un cuerpo, determinar:
   a) La ecuación del cuerpo.
   b) La distribución de presión a lo largo de la superficie del cuerpo.

9. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionan con el material que usted ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Robertson, J. M., *Hydrodynamics in Theory and Application*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1965.
2. Streeter, V. L., *Fluid Dynamics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1948.
3. Vallentine, H. R., *Applied Hydrodynamics*. Londres: Butterworths, 1959.
4. Rouse, H., y S. Ince, *History of Hydraulics*. Nueva York: Dover, 1957.
5. Lamb, H., *Hydrodynamics*. Nueva York: Dover, 1945.
6. Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, 4a ed. Nueva York: Macmillan, 1960.
7. Karamcheti, K., *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*. Nueva York: Wiley, 1966.
8. Kirchhoff, R. H., *Potential Flows: Computer Graphic Solutions*. Nueva York: Marcel Dekker, 1985.
9. Kuethe, A. M., y C.-Y. Chow, *Foundations of Aerodynamics: Bases of Aerodynamic Design*, 4a ed. Nueva York: Wiley, 1986.
10. Hess, J. L., y A. M. O. Smith, "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies", in *Progress in Aeronautical Sciences*, Volumen 8, ed. por D. Kuchemann. Oxford: Pergamon Press, 1966.
11. Shang, J. S., "An Assessment of Numerical Solutions of the Complete Navier-Stokes Equations", *AIAA J. Aircraft, 22*, 5, mayo 1985, pp. 353-370.

** Estos objetivos se aplican a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

PROBLEMAS

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.7

6.8

6.9

6.10

PROBLEMAS

6.1 Considere el campo de flujo con la velocidad dada por $\vec{V} = (Axy - Bx^2)\hat{i} + (Axy - By^2)\hat{j}$, donde $A = 2/\text{pies} \cdot \text{s}$, $B = 1/\text{pie} \cdot \text{s}$ y las coordenadas se miden en pies. La densidad es 2 slug/pie^3 y la gravedad actúa en la dirección y negativa. Determine la aceleración de una partícula de fluido y el gradiente de presión en el punto $(x, y) = (1, 1)$.

6.2 Un campo de flujo incompresible está dado por $\vec{V} = (Ax + By)\hat{i} - Ay\hat{j}$, donde $A = 1\ \text{s}^{-1}$, $B = 2\ \text{s}^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. Encuentre la magnitud y la dirección de la aceleración de una partícula de fluido en el punto $(x, y) = (1, 2)$. Encuentre el gradiente de presión en el mismo punto, si $\vec{g} = -g\hat{j}$ y el fluido es agua.

6.3 Un flujo de agua horizontal se describe mediante el campo de velocidad $\vec{V} = (Ax + Bt)\hat{i} + (-Ay + Bt)\hat{j}$, donde $A = 10\ \text{s}^{-1}$, $B = 5\ \text{pies} \cdot \text{s}^{-2}$, x y y están en pies y t, en segundos. Calcule la aceleración de una partícula de fluido en el punto $(x, y) = (1, 5)$ en $t = 10$ s. Evalúe $\partial p/\partial x$ bajo las mismas condiciones.

6.4 Un campo de velocidad en un fluido con densidad de 1500 kg/m^3 está dado por $\vec{V} = (Ax - By)t\hat{i} - (Ay + Bx)t\hat{j}$, donde $A = 1\ \text{s}^{-2}$, $B = 2\ \text{s}^{-2}$, x y y están en metros y t, en segundos. Las fuerzas másicas son despreciables. Evalúe ∇p en el punto $(x, y) = (1, 2)$ en $t = 1$ s.

6.5 La componente x de velocidad en un campo de flujo incompresible está dada por $u = Ax$, donde $A = 2\ \text{s}^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. La presión en el punto $(x, y) = (0, 0)$ es $p_0 = 190$ kPa (manométrica). La densidad es $\rho = 1.50$ kg/m^3 y el eje z es vertical. Evalúe la componente y de velocidad más simple posible. Calcule la aceleración del fluido y determine el gradiente de presión en el punto $(x, y) = (2, 1)$. Encuentre la distribución de presión a lo largo del eje x positivo.

6.6 En un flujo incompresible sin fricción el campo de velocidad en m/s y la fuerza de cuerpo están dados por $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ y $\vec{g} = -g\hat{k}$; las coordenadas se miden en metros. La presión es p_0 en el punto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Obtenga una expresión para el campo de presión, $p(x, y, z)$.

6.7 La distribución de velocidad en un campo de flujo estable bidimensional en el plano xy es $\vec{V} = (Ax - B)\hat{i} + (C - Ay)\hat{j}$, donde $A = 2\ \text{s}^{-1}$, $B = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ y $C = 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; las coordenadas se miden en metros y la distribución de la fuerza másica es $\vec{g} = -g\hat{k}$. ¿El campo de velocidad representa el flujo de un fluido incompresible? Encuentre el punto de estancamiento del campo de flujo. Obtenga una expresión para el gradiente de presión en el campo de flujo. Evalúe la diferencia de presión entre el punto $(x, y) = (1, 3)$ y el origen, si la densidad es 1.2 kg/m^3.

6.8 Considere un movimiento de fluido estable con un giro de cuerpo rígido alrededor del eje z. Suponga que $\vec{g} = -g\hat{k}$. Demuestre que las ecuaciones 6.4 se reducen a

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2 \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

6.9 Para el flujo del problema 4.123 muestre que la variación de la velocidad radial uniforme es $V_r = Q/2\pi rh$. Obtenga expresiones para la componente r de la aceleración de una partícula de fluido en el claro y para la variación de la presión, como una función de la distancia radial a partir de los hoyos centrales.

6.10 Un fluido incompresible y no viscoso fluye hacia un tubo redondo horizontal a través de su pared porosa. El tubo se encuentra cerrado en el extremo izquierdo y el flujo se descarga del tubo a la atmósfera en el lado derecho. Por simplicidad, considere uniforme la componente x de velocidad en el tubo a través de cualquier sección transversal. La densidad del fluido es ρ, el diámetro y la longitud del tubo son D y L, respectivamente, y la velocidad uniforme de la entrada es v_0. El flujo es estable. Obtenga una expresión algebraica para la componente x de la aceleración de una partícula de fluido localizada en la posición x, en términos de v_0, x y D. Encuentre una expresión para el gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, en la posición x. Integre para obtener una expresión para la presión manométrica en $x = 0$.

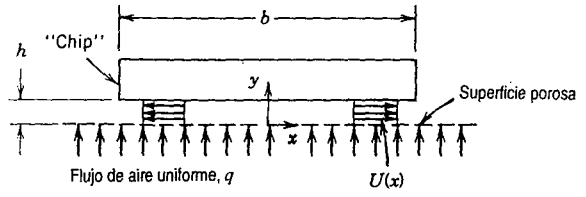
6.11 Considere el campo de flujo $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, donde $A = 3\ s^{-1}$ y las coordenadas se miden en pies. La gravedad está en la dirección z negativa, $\vec{g} = -g\hat{k}$. Encuentre la fuerza del fluido en el plano yz en la región limitada por $y = 1$, $y = 2$, $z = 0$ y $z = 2$, si la presión en $(x, y, z) = (0, \frac{1}{2}, 0)$ es 250 libras por pie cuadrado y el fluido tiene la densidad del agua.

6.12 Considere el flujo del problema 5.40. Evalúe la magnitud y dirección de la fuerza de presión neta que actúa sobre la placa superior entre r_i y R, si $r_i = R/2$.

6.13 Considere flujo incompresible y estable sin fricción en el claro estrecho entre discos paralelos sólidos. Suponga que el flujo es uniforme a través de cada plano, r = constante. Muestre que las ecuaciones de Euler se reducen a $dp = -\rho V dV$ en esta situación. Demuestre que se obtiene el mismo resultado aplicando las ecuaciones de continuidad y momento a un segmento, $d\theta$, de un volumen de control diferencial anular de espesor dr.

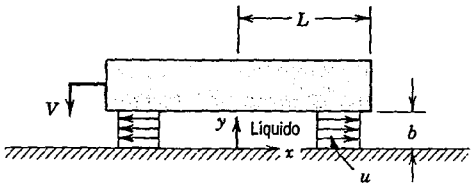
6.14 Considere otra vez el campo de flujo del problema 5.53. Suponga que el flujo es incompresible con $\rho = 1.23\ kg/m^3$ y la fricción es despreciable. Suponga además que la velocidad del flujo de aire vertical es $v_0 = 15$ mm/s, la mitad del ancho de la cavidad es $L = 22$ mm y su altura es $h = 1.2$ mm. Calcule el gradiente de presión en $(x, y) = (L, h)$. Obtenga una ecuación para las líneas de corriente del flujo en la cavidad.

6.15 Un "chip" de microcircuito rectangular flota sobre una delgada capa de aire, $h = 0.5$ mm de espesor, sobre una superficie porosa. El ancho del chip es $b = 20$ mm, como se muestra. Su longitud, L, es muy larga en la dirección perpendicular al diagrama. No hay flujo en la dirección z. Suponga que el flujo en la dirección x en el claro bajo el chip es uniforme. El flujo es incompresible y los efectos friccionantes pueden despreciarse. Emplee un volumen de control elegido adecuadamente para demostrar que $U(x) = qx/h$ en el claro. Encuentre una expresión general para la aceleración de una partícula de fluido en el claro. Evalúe la aceleración máxima. Obtenga una expresión para el gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, y dibuje la distribución de presión bajo el chip. Muestre p_{atm} en su dibujo. ¿La fuerza neta de presión sobre el chip se dirige hacia arriba o hacia abajo? Explique. Para las condiciones mostradas, con $q = 0.06\ m^3/s/m$, estime la masa por unidad de longitud del chip.



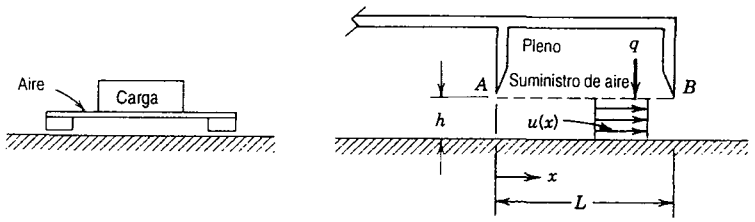
P6.15

6.16 Una capa líquida separa dos superficies planas como se muestra. La superficie inferior es estacionaria, mientras que la superficie superior se mueve hacia abajo a velocidad constante, V. La superficie móvil tiene ancho w, perpendicular al plano del diagrama, y $w \gg L$. La capa de líquido incompresible, de densidad ρ, se oprime entre las superficies. Suponga que el flujo es uniforme en cualquier sección transversal y desprecie la viscosidad como una primera aproximación. Use un volumen de control elegido adecuadamente para mostrar que $u = Vx/b$ dentro del claro, donde $b = b_0 - Vt$. Obtenga una expresión algebraica para la aceleración de una partícula de fluido localizada en x. Determine el gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, en la capa líquida. Encuentre la distribución de presión, $p(x)$. Obtenga una expresión para la fuerza de presión neta que actúa sobre la superficie plana superior (en movimiento).



P6.16

6.17 Una cierta carga pesada puede moverse con relativa facilidad sobre cojines de aire, usando una paleta de carga en la forma que se muestra. El aire se alimenta de los alrededores a través de una superficie porosa AB y entra en el claro verticalmente a velocidad uniforme, q. Una vez en el claro, el aire fluye en la dirección x positiva (no hay flujo a través del plano en $x = 0$). Suponga que el flujo de aire en el claro es incompresible y uniforme en cada sección transversal, con velocidad $u(x)$, como se muestra en la vista amplificada. Aunque el claro es estrecho ($h \ll L$), desprecie los efectos friccionantes como una primera aproximación. Use un volumen de control elegido adecuadamente para mostrar que $u(x) = qx/h$ en el claro. Calcule la aceleración de una partícula del fluido en el claro. Evalúe el gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, y dibuje la distribución de presión dentro del claro. Asegúrese de indicar la presión en $x = L$.



P6.17

6.18 El campo de flujo en un vórtice forzado (movimiento de cuerpo rígido) está dado por $\vec{V} = \omega r \hat{e}_\theta$, donde $\omega = 10\ s^{-1}$ y r está en metros. Considere un fluido sin fricción con $\rho = 1000\ kg/m^3$. Exprese el gradiente de presión radial, $\partial p/\partial r$, como función de r. Evalúe el cambio de presión entre $r_1 = 1$ m y $r_2 = 2$ m.

6.19 El campo de flujo en un vórtice libre (irrotacional) está dado por $\vec{V} = \hat{e}_\theta K/2\pi r$, para $r > 0$, donde r está en metros. Suponga un fluido sin fricción con $\rho = 1000\ kg/m^3$ y $K = 20\pi\ m^2/s$. Exprese el gradiente de presión radial, $\partial p/\partial r$, como una función de r, y evalúe el cambio de presión entre $r_1 = 1$ m y $r_2 = 2$ m.

6.20 Aire fluye a 20 psia y 100 F alrededor de una esquina lisa en la entrada de un difusor. La velocidad del aire es 150 pies/s y el radio de curvatura de las líneas de corriente es 3 pulg. Determine la magnitud de la aceleración centrípeta experimentada por una partícula del fluido que da vuelta a la esquina y exprese su respuesta en g s. Evalúe el gradiente de presión, $\partial p/\partial r$.

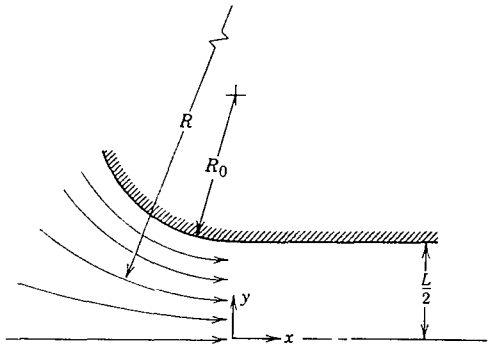
6.21 Un flujo estable, sin fricción e incompresible que fluye de derecha a izquierda sobre un cilindro circular estacionario de radio a, está determinado por el campo de velocidad

$$\vec{V} = U\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1\right]\cos\theta\,\hat{e}_r + U\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 1\right]\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$$

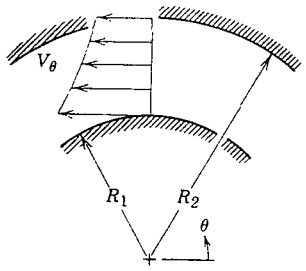
Considere el flujo a lo largo de la línea de corriente que forma la superficie del cilindro, $r = a$. Exprese las componentes del gradiente de presión en términos del ángulo θ. Grafique la velocidad, V, como una función de r a lo largo de la línea radial $\theta = \pi/2$ para $r > a$.

6.22 Para modelar la distribución de velocidad en la sección de entrada curva de un túnel de viento, el radio de curvatura de las líneas de corriente se expresa como $R = LR_0/2y$. Como una primera aproximación, considere que la velocidad del aire a lo largo de cada línea de corriente es $V = 20$ m/s. Evalúe el cambio de presión desde $y = 0$ hasta la pared del túnel en $y = L/2$, si $L = 150$ mm y $R_0 = 0.6$ m.

6.23 La variación radial de velocidad en la sección media del codo de 180° que se muestra, está dada por rV_θ = constante. La sección transversal del codo es cuadrada. Suponga que la velocidad no es una función de z. Deduzca una ecuación para la diferencia de presión entre el exterior y el interior del codo. Exprese su respuesta en términos de la relación de flujo másico, la densidad del fluido, los parámetros geométricos, R_1 y R_2 y la profundidad del codo, $h = R_2 - R_1$.



P6.22



P6.23

6.24 La componente y de velocidad en un campo de flujo bidimensional incompresible está dada por $v = -Axy$, donde v está en m/s, las coordenadas se miden en metros y A es una constante dimensional. No hay componente o variación de la velocidad en la dirección z. Calcule la aceleración de una partícula del fluido en el punto $(x, y) = (1, 2)$. Estime el radio de curvatura de la línea de corriente que pasa por este punto.

6.25 Un tubo estático de pitot se sumerge en una corriente de aire atmosférico. Un manómetro indica una presión dinámica de 1.05 pulgadas de agua. Calcule la velocidad del aire.

6.26 Un tubo estático de pitot se emplea para medir la velocidad de la línea central en un ducto que conduce aire del ambiente a una presión de 101 kPa (abs) y temperatura de 32 C. Determine la lectura de presión diferencial en milímetros de agua que corresponde a una velocidad de aire de 28.5 m/s.

6.27 Un tubo estático de pitot se emplea para medir la velocidad de aire que fluye en condiciones estándares en un túnel de viento. Los valores de la presión de estancamiento y la presión estática en el túnel son -0.56 y -1.54 pulgadas de agua (manométrica), respectivamente. Calcule la velocidad del aire que circula.

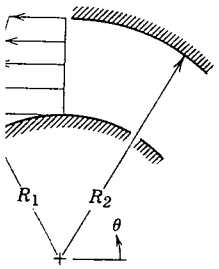
6.28 Un avión vuela en el aire a una velocidad de 315 kilómetros por hora a 2500 m de altura a través de una atmósfera estándar. Evalúe la presión de estancamiento en la nariz del avión.

6.29 Un tubo estático de pitot se utiliza para medir la velocidad del aire en condiciones estándar en un punto en un flujo. Para asegurar que el flujo pueda suponerse incompresible en cálculos de precisión ingenieril, la velocidad se va a mantener en 100 m/s o menos. Determine la desviación del manómetro, en milímetros de agua, que corresponde a la máxima velocidad deseada.

6.30 Un chorro de aire de una tobera se expele en ángulos rectos contra una pared en la cual se localiza una toma de presión. Un manómetro conectado a la toma muestra una carga de 0.14 pulg de mercurio arriba de la atmosférica. Determine la velocidad aproximada del aire que sale de la tobera, si éste se encuentra a 40 F y 14.7 psia.

6.31 El trabajo de mantenimiento en sistemas hidráulicos de alta presión requiere precauciones especiales. Es posible que una pequeña fuga origine un chorro de alta velocidad de fluido hidráulico que pueda penetrar la piel y ocasionar serias lesiones (por ello se les recomienda a los reparadores utilizar un pedazo de papel o de cartón, *no un dedo*, para buscar las fugas). Calcule y grafique la velocidad del chorro de una fuga contra la presión del sistema, para presiones de hasta 40 MPa (manométrica). Explique cómo un chorro de alta velocidad de fluido hidráulico puede provocar una lesión.

6.32 Un túnel de viento de circuito abierto absorbe aire de la atmósfera a través de una tobera de contornos bien definidos. En la última sección, donde el flujo es recto y casi uniforme, la toma de presión estática se perfora en la pared del túnel. Un manómetro conectado a la toma indica que la presión estática dentro del túnel es 45 mm de agua por debajo de la atmosférica. Suponga que el aire es incompresible y está a 25 C y 100 kPa (abs). Calcule la velocidad del aire en la sección de prueba del túnel de viento.



compresible está dada por una constante dimensional. cule la aceleración de una ura de la línea de corriente

Un manómetro indica una

al en un ducto que conduce C. Determine la lectura de ad de aire de 28.5 m/s.

que fluye en condiciones nto y la presión estática en iente. Calcule la velocidad

500 m de altura a través de el avión.

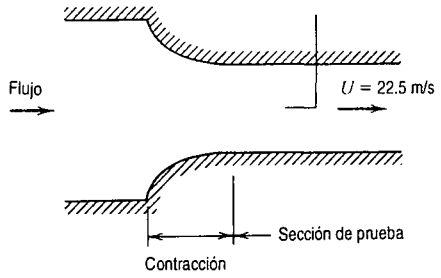
ondiciones estándar en un le en cálculos de precisión lesviación del manómetro,

ared en la cual se localiza a de 0.14 pulg de mercurio sale de la tobera, si éste se

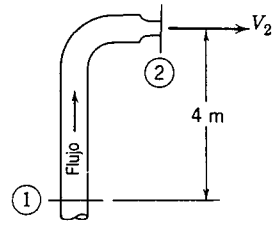
e precauciones especiales. uido hidráulico que pueda os reparadores utilizar un grafique la velocidad del a 40 MPa (manométrica). ovocar una lesión.

le una tobera de contornos orme, la toma de presión oma indica que la presión a. Suponga que el aire es e en la sección de prueba

6.33 Se muestran la contracción de entrada y la sección de prueba de un túnel de viento de laboratorio. La velocidad del aire en la sección de prueba es $U = 22.5$ m/s. Un tubo de carga total que apunta aguas arriba indica que la presión de estancamiento en la línea central de la sección de prueba está 6 mm de agua por debajo de la presión atmosférica. La presión barométrica corregida y la temperatura en el laboratorio son 99.1 kPa (abs) y 23 C. Evalúe la presión dinámica en la línea central de la sección de prueba del túnel de viento. Calcule la presión estática en el mismo punto. Compare cualitativamente la presión estática en la pared del túnel con la correspondiente a la línea central. Explique por qué las dos pueden no ser idénticas.



P6.33

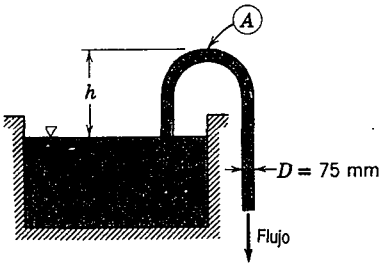


P6.34

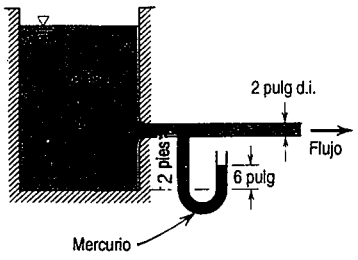
6.34 Agua fluye establemente hacia arriba por el tubo vertical de 0.1 m de diámetro y sale por la tobera, de 0.05 m de diámetro, descargando a la presión atmosférica. La velocidad de la corriente en la salida de la tobera debe ser 20 m/s. Calcule la presión manométrica requerida en la sección (1), suponiendo flujo sin fricción.

6.35 Agua fluye por una tubería circular. En una sección, el diámetro es 0.3 m, la presión estática, 260 kPa (manométrica), la velocidad, 3 m/s, y la altura, de 10 m sobre el nivel del suelo. En la sección aguas abajo, al nivel del suelo, el diámetro de la tubería es 0.15 m. Encuentre la presión manométrica en la sección aguas abajo si los efectos friccionantes pueden despreciarse.

6.36 Puede considerarse que el agua fluye sin fricción a través de un sifón. El agua fluye a un gasto de 0.03 m^3/s, su temperatura es de 20 C y el diámetro del tubo es 75 mm. Calcule la máxima altura permisible, h, para que la presión en el punto A esté por arriba de la presión de vapor de agua.



P6.36



P6.37

6.37 Agua proveniente de un gran tanque circula a través de un tubo de 2 pulg de diámetro. El líquido oscuro en el manómetro es mercurio. Estime la velocidad en el tubo y el caudal de descarga desde el tanque.

6.38 Una corriente de líquido que se mueve a baja velocidad sale de una tobera que apunta directamente hacia abajo. La velocidad puede considerarse uniforme a través de la salida de la tobera y pueden ignorarse los efectos de la fricción. En la salida de la tobera, localizada a la altura z_0, la velocidad y el área del chorro son V_0 y A_0, respectivamente. Determine la variación del área del chorro con la altura.

6.39 En un experimento de laboratorio, fluye agua radialmente hacia afuera a velocidades moderadas, a través del espacio entre discos paralelos, planos y circulares. El perímetro de los discos está abierto a la atmósfera. Éstos tienen diámetro $D = 150$ mm y el espaciamiento entre ellos es $h = 0.8$ mm. El flujo másico de agua medida es $\dot{m} = 305$ g/s. Suponiendo flujo sin fricción en el espacio entre los discos, estime la presión estática teórica entre los discos a un radio $r = 50$ mm. En la situación de laboratorio, donde *algo* de fricción está presente, ¿la presión medida en el mismo punto sería mayor o menor que el valor teórico? ¿Por qué?

6.40 Considere de nuevo la tobera de rocío plano del problema 4.91. Suponga que el espesor de la lámina de agua que sale de la tobera es $t = 0.5$ mm y que el diámetro interior del tubo de entrada es $D_1 = 20$ mm. Evalúe la presión aguas arriba mínima, p_1, requerida para producir un flujo volumétrico de $Q = 3.0$ m^3/hr a través del arreglo de la tobera.

6.41 Una tobera contra incendio está acoplada al extremo de una manguera con diámetro interior $D = 75$ mm. La tobera tiene contornos lisos y un diámetro de salida $d = 25$ mm. La presión de entrada de diseño para la tobera es $p_1 = 689$ kPa (manométrica). Evalúe el flujo máximo que la tobera puede entregar.

6.42 Considere un flujo de aire estable, sin fricción e incompresible sobre el ala de un aeroplano. El aire que se está aproximando al ala está a 10 psia, 40 F y tiene una velocidad de 200 pies/s relativa al ala. En cierto punto en el flujo, la presión es -0.40 psi (manométrica). Calcule la velocidad del aire relativa al ala en este punto.

6.43 Una entrada de agua de mar para el enfriamiento de un reactor se va a localizar en el casco exterior de un submarino nuclear. La máxima velocidad del submarino sumergido es de 35 nudos. En la posición de la entrada, la velocidad del agua paralela al casco es de 20 nudos cuando el submarino se mueve a su máxima velocidad. Determine la presión estática máxima que podría esperarse en la entrada, a 100 m de profundidad debajo de la superficie libre.

6.44 Un barómetro de mercurio se transporta en un automóvil un día en el que no hay viento. La temperatura es 20 C y la altura corregida del barómetro es 761 mm de mercurio. Se abre una ventana ligeramente cuando el automóvil viaja a 105 km/hr. La lectura del barómetro en el vehículo en movimiento es 5 mm inferior que cuando el auto está estacionario. Explique qué sucede. Calcule la velocidad local del aire, *relativa al* automóvil, que circula pasando por la ventana.

6.45 En la carrera de Indianápolis los autos viajan a una velocidad máxima de 350 km/hr. Un manómetro unido a la superficie de sustentación lee -50 mm de agua (manométrica). Estime la velocidad del aire relativa a la del auto en esa posición.

6.46 Una persona que viaja en un automóvil a 60 mph sostiene fuera de la ventana un tubo estático de pitot lo suficientemente alejado como para que éste se enfrente a la corriente aguas arriba en un flujo no perturbado. El tubo se conecta a un manómetro diferencial dentro del automóvil. Suponiendo que no hay viento, determine la lectura del manómetro que se observaría. ¿Cuál sería la lectura del manómetro si el automóvil viajara hacia un viento frontal de 20 mph?

6.47 Un carro de carreras de Indianápolis viaja a 98.3 m/s a lo largo de una recta. El ingeniero del equipo desea ubicar una entrada de aire sobre el cuerpo del carro para obtener aire de enfriamiento para el uniforme del piloto. El plan es colocar la entrada en una posición donde la velocidad del aire sea 25.5 m/s a lo largo de la superficie del automóvil. Calcule la presión estática en la posición de entrada propuesta. Exprese el aumento de presión sobre la ambiente como una fracción de la presión dinámica de corriente libre.

6.48 Un submarino miniatura es impulsado por un sistema de chorro de agua. El submarino "se desliza" aguas arriba en un río, a 10.5 nudos con relación al agua. La línea central del ducto de entrada se localiza a 8.5 pies por debajo de la superficie del río. En la sección (1) en el ducto, la velocidad del agua es 23.5 pies/s relativa al submarino. Calcule las presiones manométricas estática y de estancamiento en la sección (1).

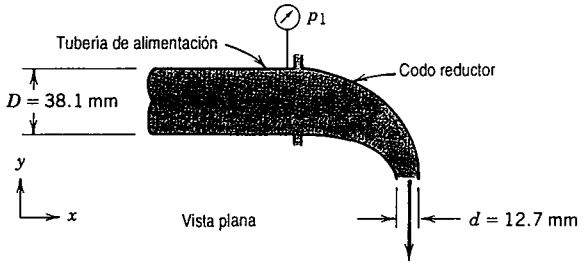
6.49 Una tobera contra incendio se acopla al extremo de una manguera con diámetro interno $D = 3.0$

pulg. La tobera tiene contornos lisos y su diámetro de salida es $d = 1.0$ pulg. La tobera se diseña para operar a una presión de agua de entrada de 100 psig. Determine el flujo de diseño de la tobera. (Exprese su respuesta en gpm.) Evalúe la fuerza axial requerida para mantener fija la tobera. Indique si el acoplamiento de la manguera está en tensión o en compresión.

6.50 Agua fluye establemente a través de una tubería de 3.25 pulg de diámetro y se descarga a través de una tobera de 1.25 pulg de diámetro a la presión atmosférica. El flujo es de 24.5 gpm. Calcule la presión estática mínima requerida en la tubería para producir este flujo. Evalúe la fuerza axial del arreglo de la tobera sobre la brida de la tubería.

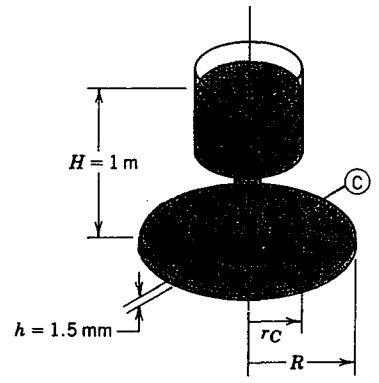
6.51 Una tobera de contornos lisos, con diámetro de salida $d = 20$ mm, se acopla a una tubería recta por medio de bridas. El agua circula en la tubería, de diámetro $D = 50$ mm, y la tobera descarga a la atmósfera. Para flujo estable e ignorando los efectos de la viscosidad, encuentre el flujo volumétrico en la tubería, correspondiente a una fuerza axial calculada de 45.5 N, necesaria para mantener la tobera unida a la tubería.

6.52 Agua circula establemente por el codo reductor que se muestra. El codo es liso y corto, y el flujo se acelera, por lo que el efecto de fricción es pequeño. El flujo volumétrico es $Q = 1.27$ L/s. Si el codo se encuentra en un plano horizontal, estime la presión manométrica en la sección (1). Calcule la componente x de la fuerza ejercida *por* el codo reductor *sobre* la tubería de alimentación.



P6.52

6.53 El sistema de flujo de discos paralelos que se muestra, contiene agua. Como una primera aproximación, la fricción puede despreciarse. Determine el flujo volumétrico y la presión en el punto (C). ($R = 300$ mm y $r_C = 150$ mm.)



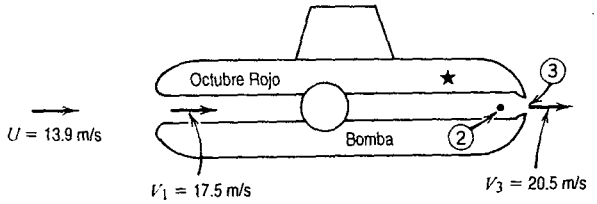
P6.53

6.54 Un chorro de agua se dirige hacia arriba desde una tobera bien diseñada de área $A_1 = 600$ mm^2; la velocidad del chorro de salida es $V_1 = 6.3$ m/s. El flujo es estable y la corriente del líquido no se rompe. El punto 2 se localiza a una altura $H = 1.55$ m sobre el plano de salida de la tobera. Determine la velocidad del chorro no perturbado en el punto 2. Calcule la presión que se registraría mediante

un tubo de estancamiento localizado ahí. Evalúe la fuerza que se ejercería sobre una placa plana colocada normal a la corriente en el punto 2. Dibuje la distribución de presión sobre la placa.

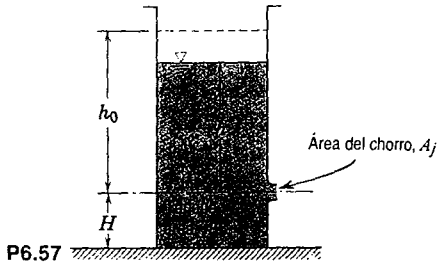
6.55 Un objeto, con una superficie inferior horizontal y plana, se mueve hacia abajo en el chorro del sistema de rociado del problema 4.72, con velocidad $U = 5$ pies/s. Determine la presión de alimentación mínima necesaria para producir un chorro que salga del sistema de rociado a $V = 15$ pies/s. Calcule la presión máxima ejercida por el chorro de líquido sobre el objeto plano en el instante en que el objeto está a $h = 1.5$ pies por arriba de la salida del chorro. Estime la fuerza del chorro de agua sobre el objeto plano.

6.56 De acuerdo con el autor Tom Clancy del *best-sellers*, *Octubre Rojo*, el submarino nuclear soviético, es impulsado por el sistema de propulsión de chorro de agua que se muestra. Cuando opera a una profundidad $H = 30.5$ m por debajo de la superficie libre, estime la presión estática en la sección ①. Calcule la presión requerida en la entrada de la tobera de propulsión, sección ②. Calcule la potencia de bombeo mínima necesaria para impulsar el submarino.



P6.56

6.57 El tanque que se muestra tiene un orificio bien redondeado con área A_j. En $t = 0$, el nivel del agua está a la altura h_0. Desarrolle una expresión para la altura adimensional del agua, h/h_0, en cualquier instante posterior.



P6.57

6.58 El nivel del agua en un gran tanque se mantiene a la altura H por arriba del nivel del suelo que lo rodea. Un orificio redondo situado en uno de los lados del tanque descarga un chorro horizontal. Despreciando la fricción, determine la altura a la cual el orificio debe colocarse para que el agua golpee el suelo a una distancia horizontal máxima desde el tanque.

6.59 Un chorro de aire axisimétrico horizontal con 10 mm de diámetro golpea un disco vertical estacionario de 200 mm de diámetro. La velocidad del chorro es de 50 m/s en la salida de la tobera. Si se conecta un manómetro en el centro del disco, calcule *a*) la separación, si el líquido del manómetro tiene DR = 1.75, y *b*) la fuerza ejercida por el chorro sobre el disco. Dibuje el patrón de línea de corriente y la distribución de presión sobre la cara del disco.

6.60 Obtenga una expresión para la distribución de presión, como una función del radio, para el disco de "hockey de aire" del problema 5.41. Estime la masa del disco.

6.61 La "burbuja" de tenis del problema 3.11 se somete a un viento que sopla a 50 km/hr en una dirección perpendicular al eje de la forma semicilíndrica. Empleando coordenadas polares, con el ángulo θ medido desde el suelo sobre el lado en dirección del viento de la estructura, la distribución de presión resultante puede expresarse como

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_w^2} = 1 - 4\,\text{sen}^2\,\theta$$

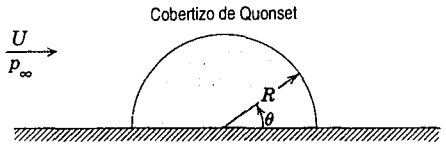
donde p es la presión en la superficie, p_∞ la presión atmosférica y V_w la velocidad del viento. Determine la fuerza vertical neta ejercida sobre la estructura.

6.62 Un flujo estable, sin fricción e incompresible que fluye de izquierda a derecha sobre un cilindro circular estacionario, de radio a, se representa por medio del campo de velocidad

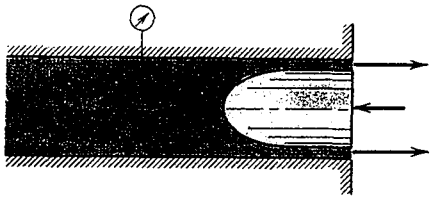
$$\vec{V} = U\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos\theta\,\hat{e}_r - U\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\theta$$

Obtenga una expresión para la distribución de presión a lo largo de la línea de corriente que forma la superficie del cilindro, $r = a$. Determine las posiciones donde la presión estática sobre el cilindro sea igual a la presión estática de corriente libre. Evalúe la fuerza de presión neta sobre el cilindro.

6.63 El flujo sobre un cobertizo de Quonset puede aproximarse mediante la distribución de velocidad del problema 6.62, con $0 \leq \theta \leq \pi$ (véase la siguiente figura). Durante una tormenta, la velocidad del viento alcanza 100 km/hr; la temperatura exterior es 5 C. Un barómetro dentro del cobertizo indica 720 mm de mercurio; la presión p_∞ es también 720 mm de mercurio. Si el cobertizo tiene un diámetro de 6 m y una longitud de 18 m, determine la fuerza neta que tiende a levantar el cobertizo de su cimiento.



6.64 Agua fluye a baja velocidad por un tubo circular con diámetro interior de 50 mm. Un obturador contorneado de 40 mm de diámetro se mantiene en el extremo del tubo, donde el agua se descarga a la atmósfera. Desprecie los efectos friccionantes y suponga perfiles de velocidad uniforme en cada sección. Determine la presión medida por el manómetro y la fuerza requerida para sostener el obturador.



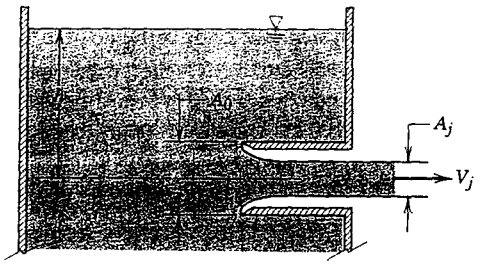
P6.64

6.65 La presión entregada por el turbocargador de un motor, utilizado para la carrera de las 500 millas de Indianápolis, se controla mediante una válvula de alivio de presión. La válvula se ajusta para que se abra cuando la presión en el múltiple de admisión alcance 75 pulg de mercurio por arriba de la presión exterior de la válvula. La válvula de alivio de presión se localiza en un punto sobre el automóvil, donde la velocidad del aire local es 1.3 veces la del aire en corriente libre lejos del auto. Para un día normal y a una velocidad del automóvil de 220 mph, estime la presión estática cerca de la válvula de alivio de presión. Especifique claramente si ésta es una presión manométrica o absoluta. ¿Cuál es el efecto sobre la presión de sobrealimentación entregada al motor?

6.66 Aire de alta presión fuerza una corriente de agua desde un orificio diminuto y redondo, de área A,

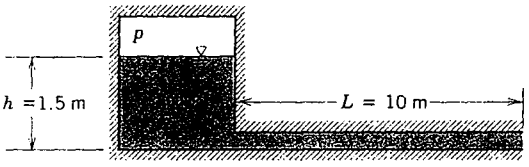
en un tanque. La presión es lo suficientemente alta como para que la gravedad pueda despreciarse. El aire se expande lentamente, por lo que la expansión puede considerarse isotérmica. El volumen inicial del aire en el tanque es $\forall_0$. En instantes posteriores, el volumen del aire es $\forall(t)$; el volumen total del tanque es $\forall_t$. Obtenga una expresión algebraica para el flujo másico del agua que sale del tanque. Encuentre una expresión algebraica para la relación de cambio en la masa de agua dentro del tanque. Desarrolle una ecuación diferencial ordinaria y resuélvala para la masa de agua en el tanque, en cualquier instante. Dibuje una gráfica de la masa del agua en el tanque contra el tiempo.

6.67 Se muestra un tanque con un orificio de *reentrada* llamado *embocadura de Borda*. El fluido es no viscoso e incompresible. El orificio de reentrada elimina esencialmente el flujo a lo largo de las paredes del tanque, por lo que ahí la presión es casi la hidrostática. Calcule el *coeficiente de contracción*, $C_c = A_j/A_0$. *Sugerencia:* Iguale la fuerza de la presión hidrostática desbalanceada y el flujo de momento del chorro.



P6.67

**6.68 Se emplea aire comprimido para acelerar el agua de un tubo. Desprecie la velocidad en el depósito y suponga que el flujo en el tubo es uniforme en cualquier sección. En un instante particular, se sabe que $V = 2$ m/s y $dV/dt = 2.50$ m/s^2. El área de la sección transversal del tubo es $A = 0.02$ m^2. Determine la presión en el tanque en este instante.



P6.68

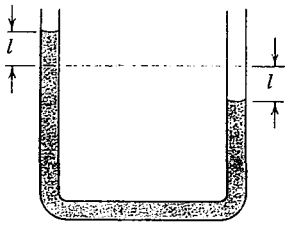
**6.69 La velocidad del aire en el múltiple de entrada de un motor de combustión interna se aproxima como $V = V_0(1 + \text{sen } \omega t)$. Suponga que $V_0 = 30$ m/s, $\omega = 50$ hz y que la densidad es la mitad que la del aire estándar. Si la longitud del pasaje de entrada es $L = 0.3$ m, calcule la variación de presión que se requiere para producir el movimiento. Desprecie los efectos friccionantes.

**6.70 Un fluido incompresible y sin fricción fluye por una tobera cuya área varía linealmente con la distancia, de acuerdo con $A = A_1(1 - ax/L)$. El flujo volumétrico es inestable y se describe por medio de $Q = Q_0(1 + qt)$. La sección (2) se localiza a la distancia L aguas abajo de la sección (1). Desarrolle una expresión para la diferencia de presión, $p_2 - p_1$.

**6.71 Considere el sistema de flujo de depósito y discos del problema 6.53, con el nivel del depósito mantenido constante. El flujo entre los discos se inicia desde el reposo en $t = 0$. Evalúe la relación de cambio del flujo volumétrico en $t = 0$, si $r_1 = 50$ mm.

**6.72 Aplique la ecuación inestable de Bernoulli al manómetro de tubo en U de diámetro constante que se muestra. Suponga que al inicio en el manómetro hay separación en las alturas de las ramas y que después, se libera. Obtenga una ecuación diferencial para l como una función del tiempo.

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.



P6.72

**6.73 Dos discos circulares, de radio R, están separados por la distancia b. El disco superior se mueve hacia el inferior a una velocidad constante, V. El espacio entre los discos se llena con un fluido incompresible sin fricción, el cual se distribuye hacia afuera de los discos a medida que éstos se acercan. Suponga que, en cualquier sección radial, la velocidad es uniforme a través del ancho del claro, b. Sin embargo, advierta que b es una función del tiempo. Si la presión circundante a los discos es la atmosférica, determine la presión manométrica en $r = 0$.

**6.74 Considere el tanque del problema 4.44. Empleando la ecuación de Bernoulli para flujo inestable a lo largo de una línea de corriente, evalúe la razón de diámetros mínima, D/d, requerida para justificar la suposición de que el flujo del tanque es cuasiestable.

**6.75 Considere un flujo incompresible de aire estándar, con campo de velocidad dado por $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j} + B\hat{k}$, donde $A = 10\ s^{-1}$, $B = 30$ m/s y las coordenadas se miden en metros. Desprecie la gravedad. ¿Es posible calcular el cambio de presión entre los puntos (0, 0, 0) y (3, 1, 0)? Si es posible, realice el cálculo.

**6.76 Considere el flujo de agua representado por el campo de velocidad $\vec{V} = Ay\hat{i} + Ax\hat{j}$, donde $A = 3\ s^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. ¿Es posible calcular el cambio de presión entre los puntos (0, 0, 0) y (1, 1, 1)? Si es posible, realice el cálculo.

**6.77 Un campo de flujo incompresible está dado como $\vec{V} = Ax^2y\hat{i} - Axy^2\hat{j}$, donde $A = 6/m^2 \cdot s$ y las coordenadas se miden en metros. Evalúe la rotación del flujo. ¿Qué se puede decir acerca del empleo de la ecuación de Bernoulli en este flujo?

**6.78 Determine si la ecuación de Bernoulli puede aplicarse entre diferentes radios para los campos de flujo de vórtice *a)* $\vec{V} = \omega r \hat{e}_\theta$ y *b)* $\vec{V} = \hat{e}_\theta \dfrac{K}{2\pi r}$.

**6.79 Considere el flujo representado por la función de corriente $\psi = Ax^2y$, donde A es una constante dimensional igual a $2.5\ m^{-1} \cdot s^{-1}$. La densidad es 2.45 slug/pie^3. ¿El flujo es rotacional? ¿Puede evaluarse la diferencia de presión entre los puntos $(x, y) = (1, 4)$ y (2, 1)? Si es así, efectúe el cálculo, y si no, explique por qué.

**6.80 Considere el campo de flujo representado por la función de corriente $\psi = Axy + Ay^2$, donde $A = 1\ s^{-1}$. Muestre que ésta representa un posible campo de flujo incompresible. Evalúe la rotación del flujo. Dibuje unas cuantas líneas de corriente en el plano medio superior.

**6.81 El campo de velocidad para un flujo bidimensional es $\vec{V} = (Ax - By)t\hat{i} - (Bx + Ay)t\hat{j}$, donde $A = 1\ s^{-1}$, $B = 2\ s^{-2}$, t está en segundos y las coordenadas se miden en metros. ¿Éste es un posible flujo incompresible? ¿El flujo es estable o inestable? Muestre que el flujo es irrotacional y obtenga una expresión para el potencial de velocidad.

**6.82 La función de corriente de un campo de flujo es $\psi = Ax^2y - By^3$, donde $A = 1\ m^{-1} \cdot s^{-1}$, $B = \frac{1}{3}\ m^{-1} \cdot s^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. Encuentre una expresión para el potencial de velocidad.

**6.83 Un campo de flujo se representa mediante la función de corriente $\psi = x^2 - y^2$. Encuentre el campo de velocidad correspondiente. Demuestre que este campo de flujo es irrotacional y obtenga la función de potencial.

**6.84 Considere el campo de flujo representado por la función de potencial $\phi = x^2 - y^2$. Verifique que es un flujo incompresible y obtenga la función de corriente correspondiente.

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

**6.85 Considere el campo de flujo representado por la función de potencial $\phi = Ax^2 + Bxy - Ay^2$. Verifique que éste es un flujo incompresible y determine la función de corriente correspondiente.

**6.86 Considere el campo de flujo representado por el potencial de velocidad $\phi = Ax + Bx^2 - By^2$, donde $A = 1\ s^{-1}$, $B = 1\ m^{-1} \cdot s^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. Obtenga expresiones para el campo de velocidad y la función de corriente. Calcule la diferencia de presión entre el origen y el punto $(xy) = (1, 2)$.

**6.87 Un campo de flujo se representa mediante la función de potencial $\phi = Ay^3 - Bx^2y$, donde $A = \frac{1}{3}\ m^{-1} \cdot s^{-1}$, $B = 1\ m^{-1} \cdot s^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. Obtenga una expresión para la magnitud del vector de velocidad. Encuentre la función de corriente para el flujo. Grafique las líneas de corriente $\psi = 0$ y $\psi = -4\ m^2/s$ para $x \geq 0$.

**6.88 Un campo de flujo incompresible está caracterizado por la función de corriente $\psi = 3Ax^2y - Ay^3$, donde $A = 1\ m^{-1} \cdot s^{-1}$. Dibuje unas cuantas líneas de corriente en el primer cuadrante. Muestre que este campo de flujo es irrotacional. Obtenga el potencial de velocidad para el flujo.

**6.89 La distribución de velocidad en un campo de flujo bidimensional, estable y no viscoso en el plano xy es $\vec{V} = (Ax + B)\hat{i} + (C - Ay)\hat{j}$, donde $A = 3\ s^{-1}$, $B = 6$ m/s, $C = 4$ m/s y las coordenadas se miden en metros. La distribución de la fuerza másica es $\vec{B} = -g\hat{k}$ y la densidad es 825 kg/m^3. ¿Esto representa un posible campo de flujo incompresible? Dibuje las líneas de corriente en el plano medio superior. Encuentre el (los) punto(s) de estancamiento del campo de flujo. ¿El flujo es irrotacional? Si es así, obtenga la función de potencial. Evalúe la diferencia de presión entre el origen y el punto $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

**6.90 Cierto campo de flujo irrotacional en el plano xy tiene la función de corriente $\psi = Bxy$, donde $B = 0.25\ s^{-1}$ y las coordenadas se miden en metros. Dibuje varias líneas de corriente en el primer cuadrante. Marque la dirección de la ψ creciente. Indique la dirección de flujo y determine el flujo entre los puntos $(x, y) = (2, 2)$ y $(3, 3)$. Encuentre el potencial de velocidad para este flujo. Dibuje algunas líneas de potencial de velocidad constante sobre la gráfica de líneas de corriente. Marque la dirección de la ϕ creciente.

**6.91 Considere el campo de flujo de agua dado por $\vec{V} = Ax^2y^2\hat{i} - Bxy^3\hat{j}$, donde $A = 3/m^3 \cdot s$ y $B = 2/m^3 \cdot s$. Determine la función de corriente para este flujo, así como la rotación del fluido. Despreciando la gravedad, ¿es posible calcular la diferencia de presión entre los puntos (0, 0, 0) y (1, 1, 1)? Si es así, efectúe el cálculo, y si no, explique por qué.

**6.92 Comenzando con las componentes de velocidad para una fuente simple que se muestran en la tabla 6.1, verifique las expresiones para la función de corriente y el potencial de velocidad.

**6.93 Comenzando con las componentes de velocidad para un sumidero simple que se muestran en la tabla 6.1, verifique las expresiones para la función de corriente y el potencial de velocidad.

**6.94 Comenzando con las componentes de velocidad para un vórtice libre que se muestran en la tabla 6.1, verifique las expresiones para la función de corriente y el potencial de velocidad.

**6.95 Considere la superposición de dos flujos: 1) velocidad en la dirección x positiva que varía linealmente desde cero en $y = 0$, hasta 100 pies/s en $y = 4$ y 2) velocidad en la dirección y positiva con velocidad de 20 pies/s. Encuentre la función de corriente para el flujo combinado. Evalúe el flujo volumétrico entre los puntos $(x, y) = (1, 1)$ y $(2, 2)$. Encuentre el potencial de velocidad para el flujo combinado, si éste existe.

**6.96 Considere el flujo que pasa por el cilindro circular del problema ejemplo 6.11. Grafique el coeficiente de presión

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}.$$

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

a lo largo de la superficie del cilindro contra θ para $0 \leq \theta \leq \pi$. Encuentre los valores máximo y mínimo de C_p. Localice los puntos sobre la superficie del cilindro donde la presión estática es igual a la presión de corriente libre. Evalúe la sensibilidad angular donde $C_p = 0$.

**6.97 Un vórtice espiral se forma combinando una fuente y un vórtice. Muestre que las líneas de corriente de este flujo combinado son espirales logarítmicas tales que $r = ce^{\pm q\theta/K}$.

**6.98 Considere el flujo que pasa por un cilindro circular, de radio a, como el utilizado en el problema ejemplo 6.11. Demuestre que $V_r = 0$, a lo largo de las líneas $(r, \theta) = (r, \pm \pi/2)$. Grafique V_θ/U contra el radio para $r \geq a$, a lo largo de la línea $(r, \theta) = (r, \pi/2)$. Encuentre la distancia que se encuentra más allá de aquella en la que la influencia del cilindro es menor que el 1 por ciento de U.

**6.99 Considere el flujo que pasa por un cilindro circular, de radio a, como el utilizado en el problema ejemplo 6.11. Integre la distribución de presión alrededor de la superficie del cilindro para demostrar que las fuerzas de arrastre y de sustentación predichas por este modelo de flujo ideal, son cero.

**6.100 Para modelar el flujo alrededor de un cilindro circular con circulación, se añade un vórtice en el sentido de las manecillas del reloj al flujo considerado en el problema ejemplo 6.11. Encuentre la función de corriente, el potencial de velocidad y el campo de velocidad para este flujo combinado. Localice los puntos de estancamiento sobre la superficie del cilindro. Evalúe la gama de intensidades del vórtice para la cual existen dos puntos de estancamiento.

**6.101 Considere de nuevo el flujo de fluido ideal alrededor de un cilindro circular, con la circulación dada en el problema 6.100. Muestre que la circulación puede expresarse como $\Gamma = -K$ integrando alrededor de la superficie del cilindro. Integre la distribución de presión para evaluar la sustentación aerodinámica (fuerza en la dirección y) sobre el cilindro. Demuestre que la fuerza de sustentación es $L = -\rho U\Gamma$.

**6.102 Un modelo burdo de un tornado se forma combinando un sumidero, de intensidad $q = 2800$ m^2/s, y un vórtice libre, de intensidad $K = 5600$ m^2/s. Obtenga la función de corriente y el potencial de velocidad para este campo de flujo. Calcule el radio más allá del cual el flujo puede tratarse como incompresible. Encuentre la presión manométrica en ese radio.

**6.103 Considere el flujo obtenido superponiendo una fuente, de intensidad q, y un vórtice libre, de intensidad K. Las componentes de la velocidad en el punto A, donde $(r_A, \theta_A) = (2, \pi/2)$, son $V_r = 2.5$ pies/s y $V_\theta = 3.75$ pies/s. Determine la intensidad de la fuente, q, y la intensidad del vórtice, K. Ignorando las fuerzas másicas, encuentre la diferencia de presión entre los puntos A y B, donde $(r_B, \theta_B) = (1.25, \pi/2)$, si la densidad es la del agua. Encuentre la ecuación de la línea que representa $\psi = 0$ (esto es, para $\psi = 0$, exprese r como una función de θ).

**6.104 Una fuente y un sumidero de igual intensidad se ponen sobre el eje x, en $x = -a$ y $x = a$ respectivamente. Obtenga la función de corriente y el potencial de velocidad para el campo de flujo resultante. Encuentre puntos sobre el eje y entre los cuales pase la mitad de flujo volumétrico total.

**6.105 Considere un flujo incompresible y no viscoso en el plano xy. Suponga que dos fuentes de igual intensidad, q, se ubican a lo largo del eje x, en $x = \pm a$. Dibuje las líneas de corriente para el campo de flujo producido por el par de fuentes. Indique la localización del (los) punto(s) de estancamiento del flujo. Evalúe la función de corriente para el campo de flujo combinado en el punto $(x, y) = (a, a)$. Determine el flujo volumétrico que pasa entre el eje y y el punto $(x, y) = (a, a)$. Si la presión en el punto de estancamiento es p_0, obtenga expresiones para las presiones estática y dinámica en el punto $(x, y) = (a, a)$.

**6.106 Se va a investigar el patrón de flujo de un par de vórtices. Uno de ellos, con la misma dirección que la de las manecillas del reloj, se localiza en $(x, y) = (-a, 0)$, y el otro, de igual intensidad pero en sentido contrario al de las manecillas del reloj, está en $(x, y) = (a, 0)$. Encuentre la función de corriente, el potencial de velocidad y el campo de velocidad para este flujo combinado. Evalúe la distribución de presión a lo largo del eje y.

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

**6.107 Una fuente y un sumidero con intensidades de igual magnitud, $q = 3\pi$ m^2/s, se sitúan en el eje x, en $x = -a$ y $x = a$, respectivamente. Un flujo uniforme, con velocidad $U = 20$ m/s, en la dirección x positiva, se añade para obtener el flujo que pasa por un cuerpo de Rankine. Obtenga la función de corriente, el potencial de velocidad y el campo de velocidad para el flujo combinado. Encuentre el valor de ψ = constante en la línea de corriente de estancamiento. Localice los puntos de estancamiento si $a = 0.3$ m.

**6.108 Considere nuevamente el flujo que pasa por el cuerpo de Rankine del problema 6.107. La mitad del ancho, h, del cuerpo en la dirección y, está dada por la ecuación trascendental

$$\frac{h}{a} = \cot\left(\frac{\pi U h}{q}\right)$$

Evalúe la mitad del ancho, h. Encuentre la velocidad y la presión locales en los puntos $(x, y) = (0, \pm h)$. Suponga que la densidad del fluido es la del aire estándar.

**6.109 Un campo de flujo se forma combinando un flujo uniforme en la dirección x positiva, con $U = 10$ m/s, y un vórtice con dirección contraria a la de las manecillas del reloj e intensidad $K = 4\pi$ m^2/s, localizado en el origen. Obtenga la función de corriente, el potencial de velocidad y el campo de velocidad para el flujo combinado. Localice el (los) punto(s) de estancamiento para el flujo. Dibuje la línea de corriente que pasa a través del punto $(r, \theta) = (5K/\pi U, \pi)$.

**6.110 Considere el campo de flujo formado al combinar un flujo uniforme en la dirección x positiva y una fuente localizada en el origen. Obtenga expresiones para la función de corriente, el potencial de velocidad y el campo de velocidad para el flujo combinado. Si $U = 25$ m/s, determine la intensidad de la fuente si el punto de estancamiento se localiza en $x = -0.5$ m. Dibuje la línea de corriente de estancamiento. Evalúe las posiciones, aguas abajo, de las ramas alejadas de la línea de estancamiento.

‡**6.111 Considere el campo de flujo formado al combinar un flujo uniforme en la dirección x positiva y una fuente localizada en el origen. Sea $U = 30$ m/s y $q = 150$ m^2/s. Utilice una calculadora o un programa de computadora sencillo para localizar los puntos sobre la línea de corriente de estancamiento, donde la velocidad alcanza su valor máximo. Encuentre la presión manométrica ahí, si la densidad del fluido es 1.2 kg/m^3.

**6.112 Considere el campo de flujo formado al combinar un flujo uniforme en la dirección x positiva con un sumidero localizado en el origen. Sea $U = 50$ m/s y $q = 90$ m^2/s. Emplee un volumen de control elegido adecuadamente para evaluar la fuerza neta por unidad de profundidad, necesaria para mantener fijo (en aire estándar) el perfil de la superficie formado por la línea de corriente de estancamiento.

**6.113 Un campo de flujo se va a construir combinando un par de vórtices y un flujo uniforme. Un vórtice con dirección contraria a la de las manecillas del reloj se sitúa en $(x, y) = (0, a)$ y uno con dirección opuesta y de igual intensidad, en $(0, -a)$. El flujo es uniforme en la dirección y positiva. Obtenga la función de corriente, el potencial de velocidad y el campo de velocidad para este flujo combinado. Evalúe la velocidad de flujo uniforme necesaria para formar una sola línea de corriente cerrada con punto de estancamiento en $(0, \pm a/2)$. Dibuje esta línea de corriente.

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.
‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para auxiliarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.

Capítulo 7

Análisis dimensional y similitud

En virtud de que muy pocos flujos reales pueden resolverse con exactitud sólo mediante métodos analíticos, el desarrollo de la mecánica de fluidos ha dependido en gran medida de los resultados experimentales. Las soluciones de los problemas reales suelen implicar una combinación del análisis y la información experimental. En primer término, la situación del flujo físico real se aproxima con un modelo matemático que es lo suficientemente simple para producir una solución. Después se efectúan las mediciones experimentales para verificar los resultados analíticos. Con base en las mediciones, se realizan refinamientos en el análisis. Los resultados experimentales son un enlace esencial en este proceso iterativo. Los diseños experimentales, elaborados sin análisis o una revisión cuidadosa de los datos experimentales disponibles, son con frecuencia costosos y pobres o inadecuados en su desempeño.

Sin embargo, el trabajo experimental en el laboratorio consume tiempo y es caro. Un objetivo evidente es obtener la mayor información posible de unos cuantos experimentos. El análisis dimensional es una herramienta importante que a menudo nos ayuda a alcanzar este objetivo. Los parámetros dimensionales que obtenemos también pueden utilizarse para correlacionar datos para presentación, empleando el mínimo número posible de gráficas.

Cuando la prueba experimental de un prototipo de tamaño natural es imposible o prohibitivamente costosa (lo que ocurre muy a menudo), la prueba de modelos en el laboratorio es la única manera factible de atacar el problema. Si vamos a predecir el comportamiento del prototipo a partir de mediciones en el modelo, es obvio que no podemos efectuar cualquier prueba sobre cualquier modelo. El flujo del modelo y el del prototipo deben relacionarse mediante leyes de escalamiento conocidas. Investigaremos las condiciones necesarias para obtener esta similitud de los flujos del modelo y del prototipo siguiendo la discusión del análisis dimensional.

7-1 NATURALEZA DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL

La mayor parte de los fenómenos en la mecánica de fluidos depende de una manera compleja en los parámetros geométricos y de flujo. Por ejemplo, considere la fuerza de arrastre sobre una esfera lisa estacionaria inmersa en una corriente uniforme. ¿Qué experimentos deben llevarse a cabo para determinar la fuerza de arrastre sobre la esfera? Para responder a esta pregunta debemos especificar

los parámetros que son importantes en la determinación de la fuerza de arrastre. Desde luego, esperaríamos que la fuerza de arrastre dependiera del tamaño de la esfera (caracterizado por el diámetro, D), la velocidad del fluido, V, y la viscosidad del mismo, μ. Además, la densidad del fluido, ρ, también podría ser importante. Representando la fuerza de arrastre mediante F, podemos escribir la ecuación simbólica

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

Aunque hemos ignorado parámetros de los cuales depende la fuerza de arrastre, tales como la rugosidad de la superficie (o hemos incluido parámetros de los cuales no depende), hemos formulado el problema de la determinación de la fuerza de arrastre en una esfera estacionaria en términos de cantidades que son tanto controlables como medibles en el laboratorio.

Vamos a imaginar una serie de experimentos para determinar la dependencia de F sobre las variables D, V, ρ y μ. Después de construir una instalación experimental adecuada, podría empezar el trabajo. Para obtener una curva de F contra V para valores fijos de ρ, μ y D, tal vez necesitaríamos pruebas en 10 valores de V. Para explorar el efecto del diámetro, cada prueba se repetiría para esferas de 10 diámetros diferentes. Si el procedimiento se repitiera para 10 valores de ρ y μ a su vez, el simple cálculo aritmético muestra que serían necesarias 10^4 pruebas independientes. Suponiendo que cada prueba requiriera $\frac{1}{2}$ hora y que trabajáramos durante ocho horas al día, la terminación de la prueba requeriría $2\frac{1}{2}$ años. Sobra decir que además habría ciertas dificultades en la presentación de los datos. Graficando F contra V, con D como un parámetro, para cada combinación de valores de densidad y viscosidad, todos los datos podrían representarse en un total de 100 hojas de papel gráfico. La utilidad de tales resultados sería, en el mejor de los casos, limitada.

Por fortuna, podemos obtener resultados significativos con mucho menor esfuerzo mediante el uso del análisis dimensional. Como se muestra en el problema ejemplo 7.1, todos los datos para la fuerza de arrastre sobre una esfera lisa pueden graficarse como una relación funcional entre dos parámetros no dimensionales en la forma

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

La forma de la función aún debe determinarse experimentalmente. Sin embargo, en lugar de que sea necesario efectuar 10^4 experimentos, podríamos establecer la naturaleza de la función con gran exactitud por medio de 10 pruebas solamente. El tiempo ahorrado al efectuar sólo 10 pruebas y no 10^4 es evidente. Incluso más importante es la mayor conveniencia experimental. Ya no debemos encontrar fluidos con 10 valores diferentes de densidad y viscosidad ni construir 10 esferas de diferente diámetro. En vez de eso, sólo debe variarse la *relación* $\rho VD/\mu$. Esto puede lograrse, por ejemplo, cambiando simplemente la velocidad.

El teorema Pi de Buckingham es un enunciado de la relación entre una función expresada en términos de parámetros dimensionales y una función relacionada expresada en términos de parámetros no dimensionales. El empleo del teorema Pi de Buckingham nos permite desarrollar rápida y fácilmente los importantes parámetros no dimensionales.

7-2 TEOREMA PI DE BUCKINGHAM

Dado un problema físico en el cual el parámetro dependiente es una función de $n - 1$ parámetros independientes, podemos expresar la relación entre las variables en forma funcional como

$$q_1 = f(q_2, q_3, \ldots, q_n)$$

donde q_1 es el parámetro dependiente y $q_2, q_3, \ldots, q_n$ son los $n - 1$ parámetros independientes. Matemáticamente, podemos expresar la relación funcional en la forma equivalente

$$g(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$$

donde g es una función no especificada, diferente de f. Para el arrastre sobre una esfera, escribimos la ecuación simbólica

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

Podríamos sólo haber escrito

$$g(F, D, V, \rho, \mu) = 0$$

El teorema Pi de Buckingham [1] establece que: Dada una relación entre n parámetros de la fórmula

$$g(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$$

entonces los n parámetros pueden agruparse en $n - m$ razones adimensionales independientes, o parámetros Π, lo que se expresa en forma funcional mediante

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-m}) = 0$$

o

$$\Pi_1 = G_1(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m})$$

El número m suele ser,[1] aunque no siempre, igual al número mínimo de dimensiones independientes requeridas para especificar las dimensiones de todos los parámetros, $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

El teorema no predice la forma funcional de G o G_1. La relación funcional entre los parámetros Π adimensionales independientes debe determinarse de manera experimental.

Los $n - m$ parámetros Π no son únicos. Un parámetro Π no es independiente si puede formarse a partir de un producto o cociente de los demás parámetros del problema. Por ejemplo, si

$$\Pi_5 = \frac{2\Pi_1}{\Pi_2\Pi_3} \qquad \text{o} \qquad \Pi_6 = \frac{\Pi_1^{3/4}}{\Pi_3^2}$$

entonces ni Π_5 ni Π_6 son independientes de los otros parámetros adimensionales.

Se disponen varios métodos para determinar los parámetros adimensionales. En la siguiente sección se presenta un procedimiento detallado.

7-3 DETERMINACIÓN DE LOS GRUPOS Π

Independientemente del método que se va a emplear para determinar los parámetros adimensionales, empezamos listando todos los parámetros que se sabe (o cree) que afectarán al fenómeno de flujo determinado. Cierta experiencia reconocida es útil para completar la lista. Los estudiantes, quienes no cuentan con este tipo de experiencia, a menudo encuentran complicaciones por la

[1] Véase el problema ejemplo 7.3.

necesidad de aplicar juicios de ingeniería en una dosis aparentemente masiva. Sin embargo, es difícil equivocarse si se realiza una selección amplia de parámetros.

Si usted sospecha que un fenómeno depende de un parámetro determinado, inclúyalo. Si su sospecha es correcta, los experimentos mostrarán que el parámetro debe incluirse para obtener resultados coherentes. Si el parámetro es extraño, es posible que se origine un parámetro Π adicional, pero los experimentos mostrarán que puede dejar de considerarse. Por consiguiente, no tema incluir *todos* los parámetros que usted sienta que son importantes.

Los seis pasos listados a continuación describen un procedimiento que se recomienda para determinar los parámetros Π:

Paso 1. *Liste todos los parámetros implicados.* (Sea n el número de parámetros.) Si no se incluyen todos los parámetros pertinentes, puede obtenerse una relación, pero ésta no brindará la historia completa. Si se incluyen parámetros que en realidad no afectan el fenómeno físico, el proceso del análisis dimensional mostrará que éstos no entran en la relación buscada, o bien, se obtendrán uno o más grupos adimensionales que, mediante los experimentos, resultarán ser extraños.

Paso 2. *Seleccione un conjunto de dimensiones fundamentales (primarias), esto es, MLt o FLt.* (Advierta que para los problemas de transferencia de calor es posible que necesite T para la temperatura, y en sistemas eléctricos, q para la carga.)

Paso 3. *Liste las dimensiones de todos los parámetros en términos de dimensiones primarias.* (Sea r el número de dimensiones primarias.) Ya sea la fuerza o la masa pueden seleccionarse como una dimensión primaria.

Paso 4. *Elija de la lista de parámetros un número de parámetros repetidos igual al número de dimensiones primarias, r, e incluya todas las dimensiones primarias.* Ningún par de parámetros repetidos puede tener las mismas dimensiones netas diferenciándose solamente por el simple exponente; por ejemplo, no incluya una longitud (L) y un momento de inercia de un área (L^4) como parámetros repetidos. Los parámetros repetidos que se eligen pueden aparecer en todos los grupos adimensionales obtenidos; en consecuencia, *no* incluya el parámetro dependiente entre aquellos seleccionados en este paso.

Paso 5. *Establezca ecuaciones dimensionales combinando los parámetros elegidos en el paso 4 con cada uno de los otros parámetros a su vez, para formar grupos adimensionales.* (Habrá $n - m$ ecuaciones.) Resuelva las ecuaciones dimensionales para obtener los $n - m$ grupos adimensionales.

Paso 6. *Compruebe que cada grupo obtenido es adimensional.* Si la masa se eligió inicialmente como una dimensión primaria, es sensato verificar los grupos utilizando la fuerza como dimensión primaria, o viceversa.

La relación funcional entre los parámetros Π debe determinarse experimentalmente. El procedimiento detallado para determinar los parámetros Π adimensionales se ilustra en los problemas ejemplo 7.1 y 7.2.

EJEMPLO 7.1 Fuerza de arrastre sobre una esfera lisa

Como se señaló en la sección 7-1, la fuerza de arrastre, F, sobre una esfera lisa depende de la velocidad relativa, V, el diámetro de la esfera, D, la densidad del fluido, ρ, y la viscosidad del fluido, μ. Obtenga un conjunto de grupos adimensionales que pueda utilizarse para correlacionar los datos experimentales.

PROBLEMA EJEMPLO 7.1

DATOS: $F = f(\rho, V, D, \mu)$ para una esfera lisa.

ENCUENTRE: Un conjunto apropiado de grupos adimensionales.

SOLUCIÓN:
(Los números en círculos se refieren a los pasos en el procedimiento para determinar los parámetros Π adimensionales.)

① $F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu$ $\qquad n = 5$ parámetros

② Dimensiones primarias seleccionadas M, L y t

③ $F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu$

$\dfrac{ML}{t^2} \quad \dfrac{L}{t} \quad L \quad \dfrac{M}{L^3} \quad \dfrac{M}{Lt}$ $\qquad r = 3$ dimensiones primarias

④ Seleccione los parámetros repetidos ρ, V, D

⑤ Después de esto, resultará que $n - m = 2$ grupos adimensionales. Estableciendo las ecuaciones dimensionales, obtenemos

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

Igualando los exponentes de M, L y t se obtiene

$$\left.\begin{array}{lll} M: & a+1=0 & a=-1 \\ L: & -3a+b+c+1=0 & c=-2 \\ t: & -b-2=0 & b=-2 \end{array}\right\} \quad \text{Por tanto, } \Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

De manera similar,

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu = \left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{lll} M: & d+1=0 & d=-1 \\ L: & -3d+e+f-1=0 & f=-1 \\ t: & -e-1=0 & e=-1 \end{array}\right\} \quad \text{Por tanto, } \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

⑥ Verificando mediante el empleo de las dimensiones F, L y t,

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2} : F \frac{L^4}{Ft^2} \left(\frac{t}{L}\right)^2 \frac{1}{L^2} = [1]$$

donde [ ] significa "tiene dimensiones de", y

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} : \frac{Ft}{L^2} \frac{L^4}{Ft^2} \frac{t}{L} \frac{1}{L} = [1]$$

La relación funcional es $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, o

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

como se señaló antes. La forma de la función, f, debe determinarse experimentalmente.

EJEMPLO 7.2 Caída de presión en un flujo de tubería

La caída de presión, Δp, para flujo estable, incompresible y viscoso a través de una tubería recta horizontal depende de la longitud de ésta, l, la velocidad promedio, $\bar{V}$, la viscosidad del fluido, μ, el diámetro de la tubería, D, la densidad del fluido, ρ, y la variación promedio de la rugosidad del material de la tubería, e. Determine un conjunto de grupos adimensionales que pueda utilizarse para correlacionar los datos.

PROBLEMA EJEMPLO 7.2

DATOS: $\Delta p = f(\rho, \bar{V}, D, l, \mu, e)$ para flujo en una tubería circular.

ENCUENTRE: Un conjunto adecuado de grupos adimensionales.

SOLUCIÓN:
(Los números en los círculos se refieren a los pasos en el procedimiento para determinar los parámetros Π adimensionales.)

① $\Delta p \quad \rho \quad \mu \quad \bar{V} \quad l \quad D \quad e$ $\qquad n = 7$ parámetros

② Dimensiones primarias elegidas M, L y t

③ $\Delta p \quad \rho \quad \mu \quad \bar{V} \quad l \quad D \quad e$

$\dfrac{M}{Lt^2} \quad \dfrac{M}{L^3} \quad \dfrac{M}{Lt} \quad \dfrac{L}{t} \quad L \quad L \quad L$ $\qquad r = 3$ dimensiones primarias

④ Elija los parámetros repetidos ρ, $\bar{V}$, D $\qquad m = r = 3$ parámetros repetidos

⑤ Entonces se originarán $n - m = 4$ grupos adimensionales. Estableciendo las ecuaciones dimensionales tenemos:

$$\Pi_1 = \rho^a \bar{V}^b D^c \Delta p$$

$$= \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{M}{Lt^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M: & 0 = a + 1 \\ L: & 0 = -3a + b + c - 1 \\ t: & 0 = -b - 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array}$$

Por tanto, $\Pi_1 = \rho^{-1} \bar{V}^{-2} D^0 \Delta p = \dfrac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2}$

$$\Pi_2 = \rho^d \bar{V}^e D^f \mu$$

$$= \left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \frac{M}{Lt} = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M: & 0 = d + 1 \\ L: & 0 = -3d + e + f - 1 \\ t: & 0 = -e - 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = -1 \\ e = -1 \\ f = -1 \end{array}$$

Por tanto, $\Pi_2 = \dfrac{\mu}{\rho \bar{V} D}$

$$\Pi_3 = \rho^g \bar{V}^h D^i l$$

$$= \left(\frac{M}{L^3}\right)^g \left(\frac{L}{t}\right)^h (L)^i L = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M: & 0 = g \\ L: & 0 = -3g + h + i + 1 \\ t: & 0 = -h \end{array}\right\} \begin{array}{l} g = 0 \\ h = 0 \\ i = -1 \end{array}$$

Por tanto, $\Pi_3 = \dfrac{l}{D}$

$$\Pi_4 = \rho^j \bar{V}^k D^l e$$

$$= \left(\frac{M}{L^3}\right)^j \left(\frac{L}{t}\right)^k (L)^l L = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M: & 0 = j \\ L: & 0 = -3j + k + l + 1 \\ t: & 0 = -k \end{array}\right\} \begin{array}{l} j = 0 \\ k = 0 \\ l = -1 \end{array}$$

Por tanto, $\Pi_4 = \dfrac{e}{D}$

⑥ Al verificar, empleando las dimensiones F, L, t,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} : \frac{F}{L^2}\frac{L^4}{Ft^2}\frac{t^2}{L^2} = [1] \qquad \Pi_3 = \frac{l}{D} : \frac{L}{L} = [1]$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \bar{V} D} : \frac{Ft}{L^2}\frac{L^4}{Ft^2}\frac{t}{L}\frac{1}{L} = [1] \qquad \Pi_4 = \frac{e}{D} : \frac{L}{L} = [1]$$

Por último, la relación funcional es

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$$

o

$$\frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho \bar{V} D}, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

Los experimentos en muchos laboratorios han demostrado que esta relación correlaciona bien los datos. Analizaremos este resultado con detalle en la sección 8-7.1.

El procedimiento descrito antes, donde m se toma igual a r (el menor número de dimensiones independientes requeridas para especificar la totalidad de los parámetros implicados), casi siempre produce el número correcto de parámetros Π adimensionales. En unos cuantos casos, los problemas surgen debido a que el número de dimensiones primarias difiere cuando las variables se expresan en términos de sistemas diferentes de dimensiones. El valor de m puede establecerse con certidumbre determinando el rango de la matriz dimensional; m es igual al rango de la matriz dimensional. El procedimiento se ilustra en el problema ejemplo 7.3.

Los $n - m$ grupos adimensionales obtenidos del procedimiento son independientes pero no únicos. Si se elige un conjunto diferente de parámetros repetidos, se producen grupos diferentes. Puesto que los parámetros repetidos elegidos pueden aparecer en todos los grupos adimensionales obtenidos, la viscosidad, μ, no es una elección apropiada para una variable repetida. La elección de $\rho[M/L^3]$, $V[L/t]$ y una longitud característica $[L]$ como variables de repetición conduce generalmente a un conjunto de parámetros adimensionales que se ha encontrado como el más apropiado para correlacionar una amplia gama de datos experimentales. Esto no es sorprendente si reconocemos que las fuerzas de inercia son importantes en la mayor parte de los problemas de mecánica de fluidos. De la segunda ley de Newton, $F = ma$, la masa puede escribirse como $m = \rho\forall$ y, puesto que el volumen tiene dimensiones de L^3, entonces cualitativamente $m \propto \rho L^3$. La aceleración puede escribirse como $a = dv/dt = vdv/ds$, y por tanto cualitativamente, $a \propto V^2/L$. De modo que la fuerza de inercia, F es proporcional a $\rho V^2 L^2$.

Si $n - m = 1$, entonces se obtiene un solo parámetro Π adimensional. En este caso, el teorema Pi de Buckingham indica que el único parámetro Π debe ser una constante.

EJEMPLO 7.3 Ascenso capilar: empleo de la matriz dimensional

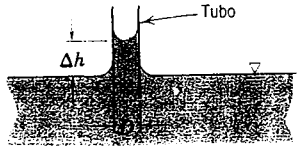
Cuando un pequeño tubo se sumerge en un líquido, la tensión superficial provoca que se forme un *menisco* en la superficie libre, el cual se eleva o se hunde dependiendo del ángulo de contacto en la interfaz líquido-sólido-gas. Los experimentos indican que la magnitud de este *efecto capilar*, Δh, es una función del diámetro del tubo, D, el peso específico del líquido, γ, y la tensión superficial, σ. Determine el número de parámetros Π independientes que puede formarse y obtenga un conjunto.

PROBLEMA EJEMPLO 7.3

DATOS: $\Delta h = f(D, \gamma, \sigma)$

ENCUENTRE: *a*) Número de parámetros Π independientes.

b) Evalúe un conjunto.



SOLUCIÓN:

(Los números en círculos se refieren a los pasos en el procedimiento para determinar los parámetros Π adimensionales.)

① $\Delta h \quad D \quad \gamma \quad \sigma \qquad n = 4$ parámetros

② Elija las dimensiones primarias (emplee tanto las dimensiones M, L, t como F, L, t para ilustrar el problema en la determinación de m)

③ (a) M, L, t

Δh	D	γ	σ
L	L	$\frac{M}{L^2t^2}$	$\frac{M}{t^2}$

$r = 3$ dimensiones primarias

(b) F, L, t

Δh	D	γ	σ
L	L	$\frac{F}{L^3}$	$\frac{F}{L}$

$r = 2$ dimensiones primarias

De esta manera preguntamos, "¿es $m = r$? Vamos a verificar la matriz dimensional para determinarlo. La matriz dimensional es

	Δh	D	γ	σ
M	0	0	1	1
L	1	1	−2	0
t	0	0	−2	−2

	Δh	D	γ	σ
F	0	0	1	1
L	1	1	−3	−1

El rango de la matriz es igual al orden de su determinante más grande diferente de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 - (1)(-2) + (1)(-2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \qquad \therefore m = 2, \; m \neq r$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0$$

$$\therefore m = 2, \quad m = r$$

④ $m = 2$. Elija D, γ como parámetros de repetición.

$m = 2$. Elija D, γ como parámetros de repetición.

⑤ $n - m = 2$ grupos adimensionales resultarán.

$n - m = 2$ grupos adimensionales resultarán.

$$\Pi_1 = D^a \gamma^b \Delta h = (L)^a \left(\frac{M}{L^2t^2}\right)^b (L) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M: & b + 0 = 0 \\ L: & a - 2b + 1 = 0 \\ t: & -2b + 0 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b = 0 \\ a = -1 \end{array}$$

Por tanto, $\Pi_1 = \dfrac{\Delta h}{D}$

$$\Pi_1 = D^e \gamma^f \Delta h = (L)^e \left(\frac{F}{L^3}\right)^f L = F^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} F: & f = 0 \\ L: & e - 3f + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad e = -1$$

Por tanto, $\Pi_1 = \dfrac{\Delta h}{D}$

$\Pi_2 = D^c \gamma^d \sigma$

$= (L)^c \left(\frac{M}{L^2t^2}\right)^d$

$M: \quad d + 1 = 0$

$L: \quad c - 2d =$

$t: \quad -2d - 2$

Por tanto, $\Pi_2 =$

⑥ Verifique, em F, L, t

$\Pi_1 = \dfrac{\Delta h}{D}$:

$\Pi_2 = \dfrac{\sigma}{D^2\gamma}$

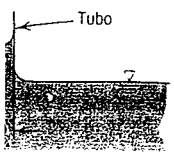
En consecuencia La relación func

$\Pi_1 = f(\Pi_2)$

Este resul pena escatim El propó número req

7-4 GRUPOS ADIMENS

A lo largo de cuales son ir dado el nom Varios de e que les ded miento de Las fi viscosidad fuerzas se a $\rho V^2 L^2$. P restantes



$$\Pi_2 = D^c \gamma^d \sigma = (L)^c \left(\frac{M}{L^2 t^2}\right)^d \frac{M}{t^2} = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M: & d+1=0 \\ L: & c-2d=0 \\ t: & -2d-2=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} d=-1 \\ c=-2 \end{array}$$

Por tanto, $\Pi_2 = \dfrac{\sigma}{D^2\gamma}$

⑥ Verifique, empleando las dimensiones F, L, t

$$\Pi_1 = \frac{\Delta h}{D} : \frac{L}{L} = [1]$$

$$\Pi_2 = \frac{\sigma}{D^2\gamma} : \frac{F}{L}\frac{1}{L^2}\frac{L^3}{F} = [1]$$

$$\Pi_2 = D^g \gamma^h \sigma = (L)^g \left(\frac{F}{L^3}\right)^h \frac{F}{L} = F^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} F: & h+1=0 \\ L: & g-3h-1=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} h=-1 \\ g=-2 \end{array}$$

Por tanto, $\Pi_2 = \dfrac{\sigma}{D^2\gamma}$

Verifique, empleando las dimensiones F, L, t

$$\Pi_1 = \frac{\Delta h}{D} : \frac{L}{L} = [1]$$

$$\Pi_2 = \frac{\sigma}{D^2\gamma} : \frac{M}{t^2}\frac{1}{L^2}\frac{L^2 t^2}{M} = [1]$$

En consecuencia, ambos sistemas de dimensiones producen los mismos parámetros Π adimensionales. La relación funcional predicha es

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \quad \text{o} \quad \frac{\Delta h}{D} = f\left(\frac{\sigma}{D^2\gamma}\right)$$

Este resultado es razonable con base en fundamentos físicos. El fluido es estático; no vale la pena escatimar tiempo pensando que es una dimensión importante.

El propósito de este problema es ilustrar el empleo de la matriz dimensional para determinar el número requerido de parámetros repetidos.

7-4 GRUPOS ADIMENSIONALES DE IMPORTANCIA EN MECÁNICA DE FLUIDOS

A lo largo de los años se han identificado varios cientos de grupos adimensionales diferentes, los cuales son importantes en la ingeniería. Siguiendo la tradición, a cada uno de tales grupos se le ha dado el nombre de un científico o ingeniero prominente, usualmente uno de los pioneros en su uso. Varios de ellos son tan fundamentales y ocurren con tanta frecuencia en la mecánica de fluidos que les dedicaremos por un momento nuestra atención para aprender sus definiciones. El entendimiento de su significado físico también brinda información relativa al fenómeno que estudiamos.

Las fuerzas que se encuentran en los fluidos que fluyen incluyen las debidas a la inercia, viscosidad, presión, gravedad, tensión superficial y compresibilidad. La razón de cualesquiera dos fuerzas será adimensional. Hemos mostrado previamente que la fuerza de inercia es proporcional a $\rho V^2 L^2$. Para facilitar la formación de razones de fuerzas, podemos expresar cada una de las fuerzas restantes del siguiente modo:

$$\text{Fuerza viscosa} = \tau A \propto \mu \frac{du}{dy} A \propto \mu \frac{V}{L} L^2 \propto \mu V L$$

$$\text{Fuerza de la presión} = (\Delta p) A \propto (\Delta p) L^2$$

$$\text{Fuerza de gravedad} = m g \propto g \rho L^3$$

Fuerza de la tensión superficial $= \sigma L$

Fuerza de compresibilidad $= E_v A \propto E_v L^2$

Las fuerzas de inercia son importantes en la mayor parte de los problemas de la mecánica de fluidos. La razón entre la fuerza de inercia y cada una de las otras fuerzas listadas arriba, conduce a cinco grupos adimensionales fundamentales encontrados en la mecánica de fluidos.

En la década de 1880, Osborne Reynolds, el ingeniero británico, estudió la transición entre regímenes de flujo laminar y turbulento en un tubo. Él descubrió que el parámetro (que recibió después su nombre)

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu}$$

es un criterio mediante el cual el régimen de flujo puede determinarse. Experimentos posteriores han mostrado que el *número de Reynolds* es un parámetro clave también en otros casos de flujo. De tal modo, en general,

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu}$$

donde L es una longitud característica descriptiva de la geometría del campo de flujo. El número de Reynolds es la razón entre las fuerzas de inercia y las viscosas. Los flujos de números de Reynolds "grandes" por lo general son turbulentos. Los flujos en los que las fuerzas de inercia son "pequeñas" comparadas con las fuerzas viscosas son característicamente flujos laminares.

En aerodinámica y en otras pruebas de modelos, es conveniente presentar los datos de la presión en forma adimensional. Se establece la razón

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

donde Δp es la presión local menos la presión de corriente libre, y ρ y V son propiedades del flujo de corriente libre. Esta razón se denomina número de Euler, en honor a Leonhard Euler, el matemático suizo que realizó gran parte de los primeros trabajos analíticos en mecánica de fluidos. Se le acredita a Euler haber sido el primero en reconocer el papel de la presión en el movimiento de un fluido; las ecuaciones de Euler del capítulo 6 demuestran este papel. El *número de Euler* es la razón entre las fuerzas de presión y las de inercia. (El factor $\frac{1}{2}$ se introduce en el denominador para producir la presión dinámica.) El número de Euler a menudo se llama el *coeficiente de presión*, C_p.

En el estudio del fenómeno de cavitación, la diferencia de presión, Δp, se toma como $\Delta p = p - p_v$, donde p, ρ y V son condiciones en la corriente del líquido, y p_v es la presión del vapor líquido a la temperatura de prueba. El parámetro adimensional resultante se conoce como el *número de cavitación*,

$$Ca = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

William Froude fue un arquitecto naval británico. Junto con su hijo, Robert Edmund Froude, descubrió que el parámetro

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

era significativo en flujos con efectos de superficie libre. Al elevar al cuadrado el *número de Froude* se obtiene

$$Fr^2 = \frac{V^2}{gL} = \frac{\rho V^2 L^2}{\rho g L^3}$$

que puede interpretarse como la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de gravedad. La longitud, L, es una longitud característica descriptiva del campo de flujo. En el caso de un flujo en canal abierto, la longitud característica es la profundidad del agua; los números de Froude menores que uno indican flujo subcrítico y los valores mayores que uno, flujo supercrítico.

El *número de Weber* es la razón entre fuerzas de inercia y fuerzas de tensión superficial. Puede escribirse

$$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

En la década de 1870, el físico austriaco Ernst Mach introdujo el parámetro

$$M = \frac{V}{c}$$

donde V es la velocidad de flujo y c es la velocidad del sonido local. Los análisis y experimentos han mostrado que el *número de Mach* es un parámetro clave que caracteriza los efectos de compresibilidad en un flujo. El número de Mach puede escribirse

$$M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}}} = \frac{V}{\sqrt{\dfrac{E_v}{\rho}}} \qquad \text{o} \qquad M^2 = \frac{\rho V^2 L^2}{E_v L^2}$$

el cual puede interpretarse como la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas debidas a la compresibilidad. Para flujo verdaderamente incompresible (bajo algunas condiciones incluso los líquidos son bastante compresibles), $c = \infty$ de modo que $M = 0$.

7-5 SIMILITUD DE FLUJO Y ESTUDIO DE MODELOS

Para que sea útil, una prueba de modelos debe producir datos que puedan escalarse para obtener las fuerzas, momentos y cargas dinámicas que existirían en el prototipo a escala natural. ¿Qué condiciones deben satisfacerse para asegurar la similitud de los flujos del modelo y del prototipo?

Quizás el requerimiento más evidente es el que exige que el modelo y el prototipo sean geométricamente similares. La *similitud geométrica* requiere que el modelo y el prototipo sean de la misma forma, y que todas las dimensiones lineales del modelo se relacionen con las dimensiones correspondientes del prototipo por medio de un factor de escala constante.

Un segundo requerimiento indica que los flujos del modelo y del prototipo sean *cinemáticamente similares*. Dos flujos son cinemáticamente similares cuando las velocidades en puntos correspondientes están en la misma dirección y se relacionan en magnitud mediante un factor de escala constante. De tal manera, dos flujos que son cinemáticamente similares también tienen patrones de líneas de corriente que se relacionan por un factor de escala constante. Puesto que las fronteras forman las líneas de corriente límite, los flujos que son cinemáticamente similares deben de ser geométricamente similares.

En principio, la similitud cinemática requeriría que un túnel de viento de sección transversal infinita se utilizara para obtener datos correspondientes al arrastre sobre un objeto, con el propósito de modelar correctamente el funcionamiento en un campo de flujo infinito. En la práctica, esta restricción puede relajarse considerablemente permitiendo el uso de equipo de tamaño razonable.

La similitud cinemática requiere que los regímenes de flujo sean los mismos en el modelo y en el prototipo. Si los efectos de compresibilidad o cavitación, que pueden cambiar incluso los patrones cualitativos del flujo, no están presentes en el flujo del prototipo, deben evitarse en el flujo del modelo.

Cuando dos flujos tienen distribuciones de fuerza tales que tipos idénticos de fuerzas son paralelos y se relacionan en magnitud por medio de un factor de escala constante en todos los puntos correspondientes, los flujos son *dinámicamente similares.*

Los requerimientos para la similitud dinámica son los más restrictivos: dos flujos deben poseer tanto similitud geométrica como cinemática para ser similares dinámicamente.

Para establecer las condiciones requeridas para la similitud dinámica completa, deben considerarse todas las fuerzas que son importantes en la situación del flujo. Así, los efectos de fuerzas viscosas, de presión, de tensión superficial, etc., deben tomarse en cuenta. Es necesario establecer las condiciones de prueba de manera que todas las fuerzas importantes se relacionen mediante el mismo factor de escala entre los flujos del modelo y del prototipo. Cuando existe la similitud dinámica, los datos medidos en un flujo de modelo pueden relacionarse cuantitativamente con las condiciones en el flujo de prototipo. ¿Cuáles son, entonces, las condiciones para asegurar la similitud dinámica entre los flujos del modelo y del prototipo?

El teorema Pi de Buckingham puede utilizarse para obtener los grupos adimensionales gobernantes para un fenómeno de flujo; para alcanzar la similitud dinámica entre flujos geométricamente similares, debemos duplicar al menos uno de esos grupos adimensionales.

Por ejemplo, al considerar la fuerza de arrastre sobre una esfera en el problema ejemplo 7.1, empezamos con

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

El teorema Pi de Buckingham predijo la relación funcional

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_1\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)$$

En la sección 7-4 mostramos que los parámetros adimensionales pueden verse como razones de fuerzas. En consecuencia, al considerar un flujo de modelo y un flujo de prototipo alrededor de una esfera (los flujos son geométricamente similares), los flujos también serán dinámicamente similares si

$$\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)_{\text{prototipo}}$$

Además, si

$$Re_{\text{modelo}} = Re_{\text{prototipo}}$$

entonces

$$\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{prototipo}}$$

y los resultados determinados por el estudio del modelo pueden utilizarse para predecir el arrastre sobre un prototipo a escala natural.

La fuerza real sobre el objeto debida al fluido no es la misma en ambos casos, pero su valor adimensional sí lo es. Las dos pruebas pueden realizarse empleando diferentes fluidos, si se desea, siempre que los números de Reynolds sean iguales. Por conveniencia experimental, los datos de

prueba pueden medirse en un túnel de viento en aire y los resultados utilizarse para predecir el arrastre en agua, como se ilustra en el problema ejemplo 7.4.

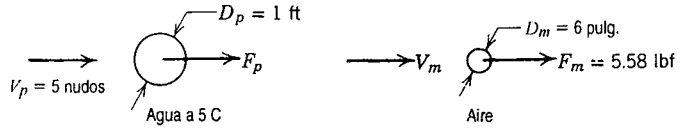
EJEMPLO 7.4 Similitud: arrastre de un transductor de sonar

Se va a predecir el arrastre de un transductor de sonar, a partir de datos de prueba de un túnel de viento. El prototipo, una esfera de 1 pie de diámetro, se va a remolcar a 5 nudos (millas náuticas por hora) en agua de mar a 5 C. El modelo tiene 6 pulg de diámetro. Determine la velocidad de prueba requerida en aire. Si el arrastre del modelo en las condiciones de prueba es 5.58 lbf, estime el arrastre del prototipo.

PROBLEMA EJEMPLO 7.4

DATO: Un transductor de sonar que se va a probar en un túnel de viento.

ENCUENTRE: (a) V_m.
(b) F_p.



SOLUCIÓN:

Puesto que el prototipo opera en agua y la prueba del modelo se va a efectuar en aire, es posible esperar resultados útiles sólo si los efectos de cavitación no se presentan en el flujo del prototipo y los efectos de compresibilidad están ausentes en la prueba del modelo. En estas condiciones,

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

y la prueba debe realizarse en

$$Re_{\text{modelo}} = Re_{\text{prototipo}}$$

para asegurar la similitud dinámica. Para agua de mar a 5 C, $\rho = 1.99$ slug/pie^3 y $\nu = 1.68 \times 10^{-5}$ pies^2/s. En condiciones del prototipo,

$$V_p = \frac{5 \text{ nmi}}{\text{hr}} \times \frac{6080 \text{ pie}}{\text{nmi}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \text{ s}} = 8.44 \text{ pies/s}$$

$$\text{Re}_p = \frac{V_p D_p}{\nu_p} = \frac{8.44 \text{ pie}}{\text{s}} \times 1 \text{ pie} \times \frac{\text{s}}{1.68 \times 10^{-5} \text{ pie}^2} = 5.02 \times 10^5$$

Las condiciones de la prueba del modelo deben duplicar este número de Reynolds. De tal modo,

$$Re_m = \frac{V_m D_m}{\nu_m} = 5.02 \times 10^5$$

Para aire en condiciones TPE, $\rho = 0.00238$ slug/pie^3 y $\nu = 1.56 \times 10^{-4}$ pies^2/s. El túnel de viento debe operarse en

$$V_m = Re_m \frac{\nu_m}{D_m} = 5.02 \times 10^5 \times 1.56 \times 10^{-4} \frac{\text{pie}^2}{\text{s}} \times \frac{1}{0.5 \text{ pie}}$$

$$V_m = 156 \text{ pie/s} \qquad Vm$$

Esta velocidad es lo suficientemente baja para ignorar los efectos de compresibilidad.

En estas condiciones de prueba, los flujos del modelo y del prototipo son dinámicamente similares. Por tanto,

$$\left.\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_m = \left.\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_p$$

y

$$F_p = F_m \frac{\rho_p}{\rho_m}\frac{V_p^2}{V_m^2}\frac{D_p^2}{D_m^2} = 5.58 \text{ lbf} \times \frac{1.99}{0.00238} \times \frac{(8.44)^2}{(156)^2} \times \frac{1}{(0.5)^2}$$

$$F_p = 54.6 \text{ lbf} \longleftarrow F_p$$

Si se esperara la cavitación —si la probeta del sonar se operara a alta velocidad cerca de la superficie libre del agua de mar— entonces no podrían obtenerse resultados útiles de una prueba del modelo en aire.

{Este modelo demuestra el cálculo de valores de prototipo a partir de datos de la prueba del modelo.}

7-5.1 Similitud incompleta

Hemos mostrado que es necesario duplicar todos menos uno de los grupos adimensionales significativos para alcanzar la similitud dinámica completa entre flujos geométricamente similares.

En la situación simplificada del problema ejemplo 7.4, la duplicación del número de Reynolds entre el modelo y el prototipo aseguró flujos dinámicamente similares. La prueba en aire permitió que el número de Reynolds se duplicara exactamente (esto también podría haberse logrado en un túnel de agua para esta situación). La fuerza de arrastre sobre una esfera depende en realidad de la naturaleza del flujo de la capa límite. Por consiguiente, la similitud geométrica requiere que la rugosidad superficial relativa del modelo y la del prototipo sean las mismas. Esto significa que la rugosidad relativa también es un parámetro que debe duplicarse entre las situaciones del modelo y el prototipo. Si suponemos que el modelo se construyó con todo cuidado, los valores de arrastre medidos a partir de las pruebas del modelo podrían escalarse para predecir el arrastre para las condiciones de operación del prototipo.

En muchos estudios de modelos, alcanzar la similitud dinámica requiere la duplicación de varios grupos adimensionales. En algunos casos, la similitud dinámica completa entre el modelo y el prototipo no es alcanzable. La determinación de la fuerza de arrastre (resistencia) de un barco superficial es un ejemplo de tal situación. La resistencia sobre el barco surge de la fricción superficial sobre el casco (fuerzas viscosas) y la resistencia de la onda superficial (fuerzas de gravedad). La similitud dinámica completa requiere que tanto los números de Reynolds como de Froude se dupliquen entre el modelo y el prototipo.

En general, no es posible predecir la resistencia de onda analíticamente, por lo que debe modelarse. Esto requiere que

$$Fr_m = \frac{V_m}{(gL_m)^{1/2}} = Fr_p = \frac{V_p}{(gL_p)^{1/2}}$$

Para igualar los números de Froude entre el modelo y el prototipo se requiere una razón de velocidad de

$$\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2}$$

para asegurar patrones de onda superficiales que sean similares dinámicamente.

Para cualquier escala de la longitud del modelo, la igualación de los números de Froude determina la razón de velocidad. Sólo la viscosidad cinemática puede variarse para igualar los números de Reynolds. Por consiguiente,

$$Re_m = \frac{V_m L_m}{\nu_m} = Re_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p}$$

conduce a la condición de que

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{V_m}{V_p}\frac{L_m}{L_p}$$

Si utilizamos la razón de velocidad obtenida de igualar los números de Froude, la igualdad de los números de Reynolds conducirá a una razón de viscosidad cinemática de

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2}\frac{L_m}{L_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2}$$

Si L_m/L_p es igual a $\frac{1}{100}$ (una escala de longitud típica para pruebas de modelos de barco), entonces ν_m/ν_p debe ser $\frac{1}{1000}$. La figura A.3 muestra que el mercurio es el único líquido con viscosidad cinemática menor que el agua. Sin embargo, es sólo aproximadamente un orden de magnitud menor, por lo que la razón de viscosidad cinemática requerida para duplicar los números de Reynolds no puede alcanzarse.

El agua es el único fluido práctico para la mayor parte de las pruebas de modelo de flujos de superficie libre. Para obtener similitud dinámica completa, se requeriría en ese caso una prueba a escala natural. Sin embargo, los estudios de modelo brindan información útil aun cuando la similitud completa no pueda obtenerse. La figura 7.1 muestra los datos de una prueba de un modelo a escala de 1:80 de un barco, realizada por el Laboratorio de Hidromecánica de la Academia Naval de los Estados Unidos. La gráfica exhibe datos del coeficiente de resistencia contra el número de Froude. Los puntos cuadrados se calculan a partir de valores de resistencia total medidos en la prueba.

La resistencia del barco a escala natural puede calcularse a partir de resultados de prueba de modelos empleando el siguiente procedimiento. El patrón de las ondas superficiales, y en consecuencia de la resistencia de la onda, se iguala entre el modelo y el prototipo en números de Froude correspondientes. El arrastre viscoso sobre el modelo se estima utilizando los métodos analíticos del capítulo 9 (los coeficientes de resistencia friccionante estimados se grafican en la figura 7.1 como diamantes). La resistencia de onda del modelo se calcula como la diferencia entre el arrastre total y el arrastre de fricción estimado (los coeficientes de resistencia de la onda estimados para el modelo se grafican como círculos).

La resistencia de onda del prototipo se calcula usando el escalamiento del número de Froude e igualando los coeficientes de resistencia de la onda para el modelo y el prototipo. Los puntos graficados como círculos en la figura 7.2 para el prototipo son idénticos a los coeficientes del modelo en números de Froude correspondientes. El arrastre de fricción superficial calculado analíticamente para el prototipo, indicado en la figura 7.2 mediante los diamantes, se suma a los coeficientes de arrastre de la onda escalados para predecir los coeficientes totales de arrastre del prototipo.

Debido a que el número de Reynolds no puede igualarse en las pruebas de modelos de barcos superficiales, el comportamiento de la capa límite no es el mismo para el modelo y el prototipo. El número de Reynolds del modelo es sólo $(L_m/L_p)^{3/2}$ tan grande como el valor del prototipo, por lo que el grado de flujo laminar en la capa límite sobre el modelo es mucho mayor en un factor

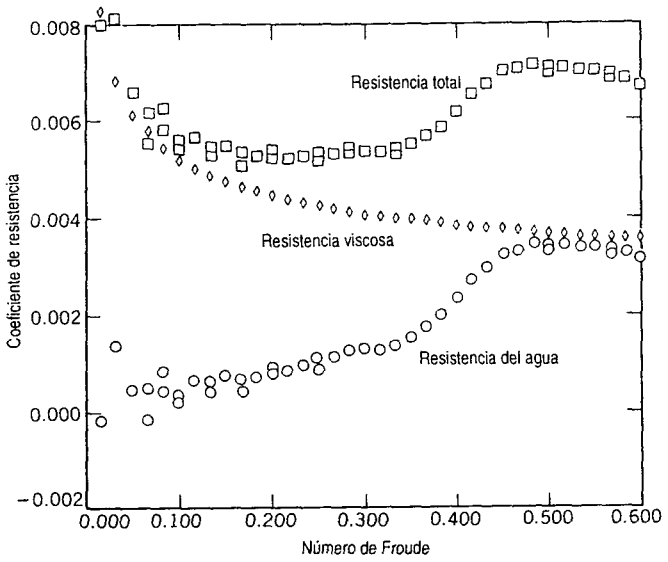


Fig. 7.1 Datos de la prueba de un modelo a escala de 1:80 de una fragata de misiles guiada *Oliver Hazard Perry* (FFG-7), de la armada naval de los Estados Unidos. (Datos del Laboratorio de Hidromecánica de la Academia Naval de los E.U., cortesía del profesor Bruce Johnson.)

correspondiente. El método que acaba de describirse supone que puede escalarse el comportamiento de la capa límite. Para hacer esto posible, la capa límite del modelo se "dispara" o "estimula" para volverse turbulenta en una posición que corresponde a la del comportamiento en la embarcación a escala natural. Se emplearon "pernos" para estimular la capa límite en los resultados de prueba del modelo que se muestran en la figura 7.1.

Un factor de corrección se añade algunas veces a los coeficientes de escala natural calculados a partir de los datos de prueba del modelo. Este factor explica la rugosidad, la ondulación y la irregularidad que inevitablemente son más pronunciadas en el barco a escala natural que en el modelo. Las comparaciones entre las predicciones de las pruebas de modelos y las mediciones efectuadas en ensayos a escala natural indican una precisión total dentro del ± 5 por ciento [2].

El número de Froude es un parámetro importante en el modelado de ríos y bahías. En estas situaciones no es práctico obtener similitud completa. El empleo de una escala del modelo razonable conduciría a profundidades del agua extremadamente pequeñas. Las fuerzas viscosas y las de tensión superficial tendrían efectos relativos mucho mayores en el flujo del modelo que en el del prototipo. En consecuencia, se emplean diferentes escalas de longitud para las direcciones vertical y horizontal. Las fuerzas viscosas en el flujo del modelo más profundo se incrementan utilizando elementos de rugosidad artificial.

El énfasis en la economía de los combustibles ha hecho que resulte importante la reducción del arrastre aerodinámico en automóviles, camiones y autobuses. La mayor parte del trabajo en el desarrollo de configuraciones de bajo arrastre se realiza utilizando pruebas de modelos. Tradicionalmente, los modelos de automóviles se han construido a una escala de $\frac{3}{8}$, a la cual un modelo de un automóvil de tamaño normal tiene un área frontal de aproximadamente 0.3 m^2. De ese modo, la prueba puede llevarse a cabo en un túnel de viento con un área de sección de prueba de 6 m^2 o más grande. En la escala de $\frac{3}{8}$, es necesaria una velocidad de viento cercana a 150 mph para modelar

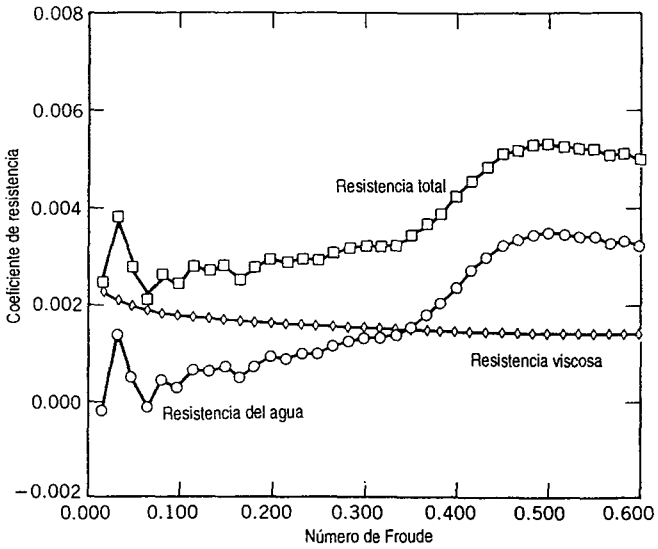


Fig. 7.2 Resistencia de un barco a escala natural predicha a partir de resultados de una prueba de modelo. (Datos del Laboratorio de Hidromecánica de la Academia Naval de los E.U., cortesía del profesor Bruce Johnson.)

un automóvil prototipo que viaja al límite de la velocidad reglamentaria. De esa manera no hay problema con los efectos de compresibilidad, pero los modelos a escala son costosos y requieren tiempo para construirse.

La figura 7.3 muestra un gran túnel de viento (las dimensiones de la sección de prueba son 5.4 m de altura, 10.4 m de ancho y 21.3 m de longitud; la máxima velocidad del aire es de 250 km/hr con el túnel vacío) empleado por General Motors para probar automóviles a escala normal a velocidades de carretera. La sección grande de prueba permite emplear autos de producción o maquetas de arcilla de tamaño normal de los estilos propuestos para los autos. La velocidad relativamente baja permite la visualización del flujo empleando corrientes de penacho o "humo".[2] Mediante el empleo de "modelos" de tamaño normal, los diseñadores y los ingenieros pueden trabajar en conjunto para lograr óptimos resultados.

Es más difícil alcanzar la similitud dinámica en pruebas de camiones y autobuses; los modelos deben hacerse a una escala más pequeña que la de los automóviles.[3] Una escala grande para la prueba de camiones y autobuses es 1:8. Para alcanzar la similitud dinámica completa igualando los números de Reynolds en esta escala, sería necesaria una velocidad de prueba de 440 mph. Esto introduciría efectos de compresibilidad indeseable, y los flujos del modelo y el prototipo no serían cinemáticamente similares. Por fortuna, los camiones y los autobuses son objetos "simulados". Los experimentos muestran que arriba de cierto número de Reynolds, su arrastre no dimensional se vuelve independiente de dicho número [5]. Aunque la similitud no es completa, los datos de

[2] Una mezcla de nitrógeno líquido y vapor se emplea para producir líneas de traza de "humo" que se evaporan y que no obstruyen la trama fina de las pantallas utilizadas para reducir el nivel de turbulencia en el túnel. Las líneas de traza pueden hacerse aparecer "coloreadas" en fotografías, poniendo un filtro sobre el lente de la cámara. Ésta y otras técnicas para la visualización del flujo se detallan en [3] y [4].

[3] La longitud del vehículo es en particular importante cuando se prueba a ángulos de desviación grandes para simular el comportamiento de viento cruzado. Las consideraciones de bloqueo en el túnel limitan el tamaño aceptable del modelo. Véase [5] para las prácticas recomendadas.

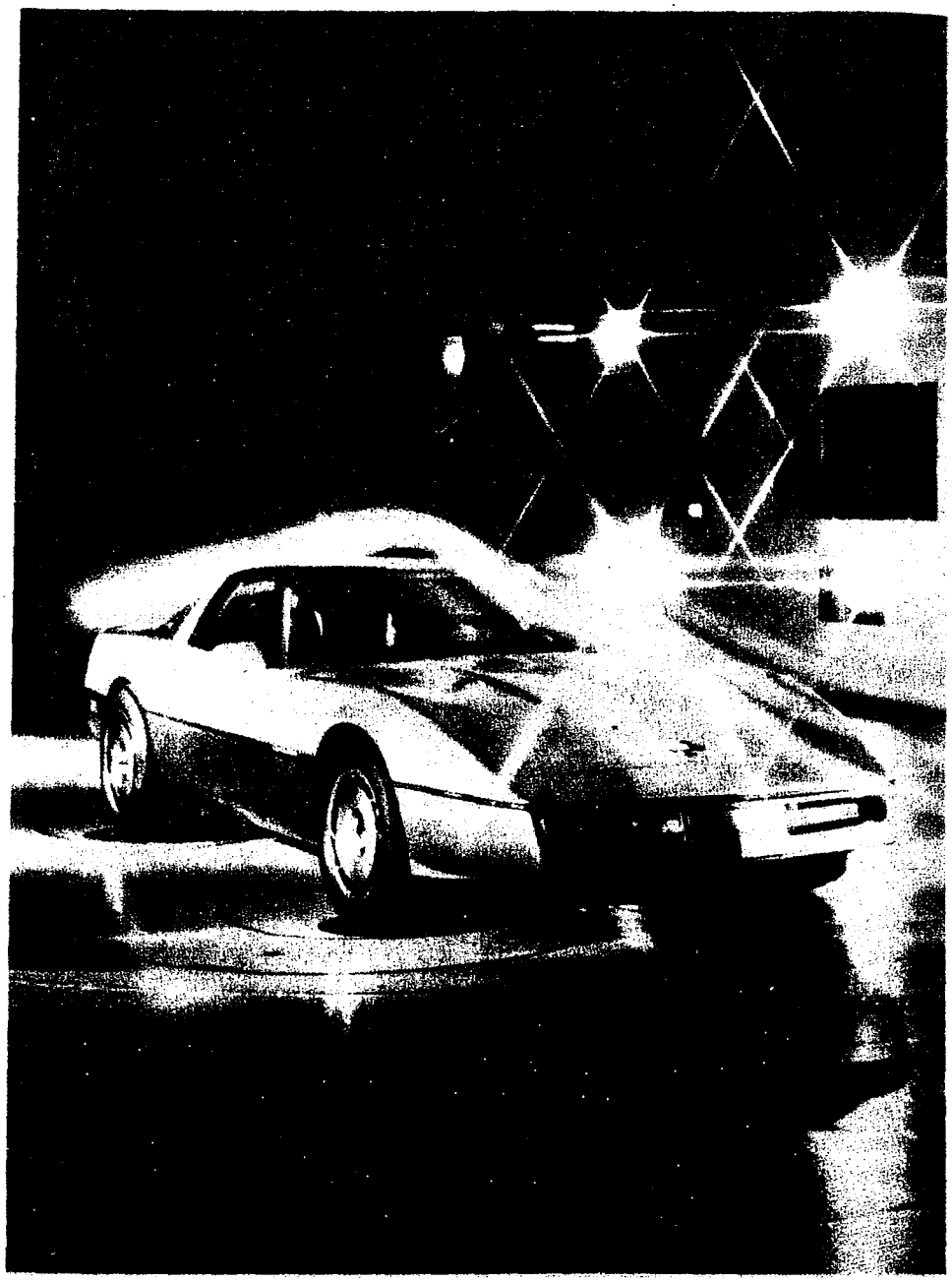


Fig. 7.3 Automóvil a escala natural bajo prueba en la sección de prueba del túnel de viento de 5.4 × 10.4 m, en el Centro Técnico de General Motors, Warren, Michigan. (Fotografía cortesía de General Motors.)

prueba medidos pueden escalarse para predecir las fuerzas de arrastre del prototipo. El procedimiento se ilustra en el problema ejemplo 7.5.

Para detalles adicionales acerca de las técnicas y aplicaciones del análisis dimensional consulte las referencias [6-9].

el de viento de 5.4 ×
otografía cortesía de

prototipo. El procedi-

dimensional consulte

EJEMPLO 7.5 Similitud incompleta: arrastre aerodinámico sobre un autobús

Se disponen los siguientes datos de prueba de túnel de viento de un modelo de autobús a escala de 1:16:

Velocidad del aire (m/s)	18.0	21.8	26.0	30.1	35.0	38.5	40.9	44.1	46.7
Fuerza de arrastre (N)	3.10	4.41	6.09	7.97	10.7	12.9	14.7	16.9	18.9

Mediante el empleo de las propiedades del aire estándar, calcule y grafique el coeficiente de arrastre aerodinámico adimensional,

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

contra el número de Reynolds, $Re = \rho Vw/\mu$, donde w es el ancho del modelo. Encuentre la velocidad de prueba mínima arriba de la cual C_D permanece constante. Estime la fuerza de arrastre aerodinámico y el requerimiento de potencia para el vehículo prototipo a 100 km/hr. (El ancho y el área frontal del prototipo son 8 pies y 84 pies^2, respectivamente.)

PROBLEMA EJEMPLO 7.5

DATOS: Los datos de prueba de túnel de viento de un modelo a escala de un autobús. Las dimensiones del prototipo son 8 pies de ancho y 84 pies^2 de área frontal. El modelo a escala es de 1:16. Aire estándar es el fluido de prueba.

ENCUENTRE: *a*) Calcule y grafique el coeficiente de arrastre aerodinámico, $C_D = F_D/\frac{1}{2}\rho V^2 A$, contra el número de Reynolds, $Re = \rho Vw/\mu$.

b) Determine la velocidad arriba de la cual C_D es constante.

c) Estime la fuerza de arrastre aerodinámico y la potencia requerida por el vehículo a escala natural a 100 km/hr.

SOLUCIÓN:

El ancho del modelo es

$$w_m = \frac{1}{16} w_p = \frac{1}{16} \times 8 \text{ pies} \times 0.3048 \frac{\text{m}}{\text{pie}} = 0.152 \text{ m}$$

El área del modelo es

$$A_m = \left(\frac{1}{16}\right)^2 A_p = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \times 84 \text{ pies}^2 \times (0.3048)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{pie}^2} = 0.0305 \text{ m}^2$$

El coeficiente de arrastre aerodinámico puede calcularse como

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

$$= 2 \times F_D \text{ (N)} \times \frac{\text{m}^3}{1.23 \text{ kg}} \times \frac{\text{s}^2}{(V)^2 \text{ m}^2} \times \frac{1}{0.0305 \text{ m}^2} \times \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}$$

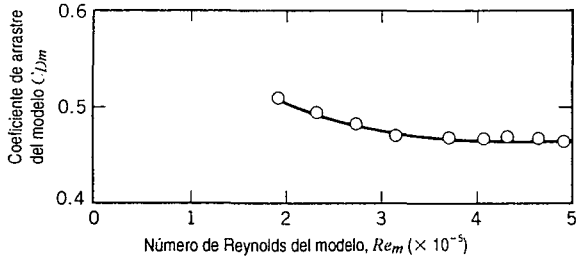
$$C_D = \frac{53.3\ F_D\ (\text{N})}{[V(\text{m/s})]^2}$$

El número de Reynolds se calcula como

$$Re = \frac{\rho V w}{\mu} = \frac{V w}{\nu} = V\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.152\ \text{m} \times \frac{\text{s}}{1.45 \times 10^{-5}\ \text{m}^2}$$

$$\text{Re} = 1.05 \times 10^4\ V(\text{m/s})$$

Los valores calculados se grafican en la siguiente figura:



C_{Dm} contra Re_m

La gráfica muestra que el coeficiente de arrastre del modelo se vuelve constante en $C_{Dm} = 0.463$ arriba de $Re_m = 4 \times 10^5$, que corresponde a una velocidad del aire de aproximadamente 40 m/s. Puesto que el coeficiente de arrastre es independiente del número de Reynolds arriba de $Re \approx 4 \times 10^5$, entonces para el vehículo prototipo ($Re \approx 4.5 \times 10^6$), $C_D = 0.463$. La fuerza de arrastre sobre el vehículo a escala natural es

$$F_{Dp} = C_D \tfrac{1}{2}\rho V_p^2 A_p$$

$$= \frac{0.463}{2} \times 1.23\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(100\ \frac{\text{km}}{\text{hr}} \times 1000\ \frac{\text{m}}{\text{km}} \times \frac{\text{hr}}{3600\ \text{s}}\right)^2$$

$$\times\ 84\ \text{pies}^2 \times (0.3048)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$F_{Dp} = 1.71\ \text{kN}$$

F_{Dp}

La potencia correspondiente requerida para superar el arrastre aerodinámico es

$$\mathcal{P}_p = F_{Dp} V_p$$

$$= 1.71 \times 10^3\ \text{N} \times 100\ \frac{\text{km}}{\text{hr}} \times 1000\ \frac{\text{m}}{\text{km}} \times \frac{\text{hr}}{3600\ \text{s}} \times \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{N} \cdot \text{m}}$$

$$\mathcal{P}_p = 47.6\ \text{kW}$$

$\mathcal{P}_p$

Este ejemplo ilustra la aplicación de los datos de prueba del modelo en una situación donde el arrastre no dimensional es constante por arriba de cierto número mínimo de Reynolds (la SAE *Recommended Practice* [5] sugiere $Re \geq 2 \times 10^6$ para la prueba de camiones y autobuses). En esta situación, no es necesario duplicar el número de Reynolds del prototipo para obtener datos útiles de prueba del modelo.

7-5.2 Escalamiento con parámetros dependientes múltiples

En algunas situaciones de importancia práctica puede haber más de un parámetro dependiente. En tales casos, los grupos adimensionales deben formarse independientemente para cada parámetro dependiente.

Como un ejemplo, considérese una bomba centrífuga típica. El patrón de flujo detallado dentro de una bomba cambia con el flujo volumétrico y la velocidad; estos cambios afectan el funcionamiento de la bomba. Los parámetros de funcionamiento de interés incluyen el aumento de presión (o carga) desarrollado, la entrada de potencia requerida y la eficiencia de la máquina medida en condiciones de operación específicas.[4] Las curvas de funcionamiento se generan variando un parámetro independiente tal como el flujo volumétrico. Así, las variables independientes son el flujo volumétrico, la velocidad angular, el diámetro del impulsor y las propiedades del fluido. Las variables dependientes son las diversas cantidades de interés del funcionamiento.

La determinación de los parámetros adimensionales se inicia a partir de las ecuaciones simbólicas para la dependencia de la carga, H (energía por unidad de masa, L^2/t^2), y la potencia, $\mathcal{P}$, de los parámetros independientes, dadas por

$$H = g_1(Q, \rho, \omega, D, \mu)$$

y

$$\mathcal{P} = g_2(Q, \rho, \omega, D, \mu)$$

El empleo directo del teorema Pi brinda el *coeficiente de carga* y el *coeficiente de potencia* adimensionales como

$$\frac{H}{\omega^2 D^2} = f_1\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}\right) \tag{7.1}$$

y

$$\frac{\mathcal{P}}{\rho \omega^3 D^5} = f_2\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}\right) \tag{7.2}$$

El parámetro adimensional $Q/\omega D^3$ en estas ecuaciones es el *coeficiente de caudal*. El parámetro adimensional $\rho \omega D^2/\mu$ ($\approx \rho VD/\mu$) es una forma del número de Reynolds.

La carga y la potencia en una bomba se desarrollan por medio de fuerzas de inercia. Tanto el patrón de flujo dentro de una bomba como el funcionamiento de la misma cambian con el flujo volumétrico y la velocidad de rotación. El funcionamiento es difícil de predecir analíticamente excepto en el punto de diseño de la bomba, por lo que se mide experimentalmente. En la figura 7.4 se presentan curvas características típicas graficadas a partir de datos experimentales para una bomba centrífuga probada a velocidad constante, como funciones del flujo volumétrico. Las curvas de carga y potencia en la figura 7.4 se trazan graficando los puntos a partir de los datos medidos. La curva de eficiencia se traza por medio de puntos calculados a partir de los datos. La eficiencia máxima suele ocurrir en el punto de diseño.

[4] La eficiencia se define como la razón entre la potencia entregada al fluido y la potencia de entrada, $\eta = \mathcal{P}/\mathcal{P}_{en}$. Para flujo incompresible, la ecuación de energía se reduce a $\mathcal{P} = \rho QH$ (cuando la carga se expresa como energía por unidad de masa) o a $\mathcal{P} = \rho gQH$ (cuando la carga se expresa como energía por unidad de peso).

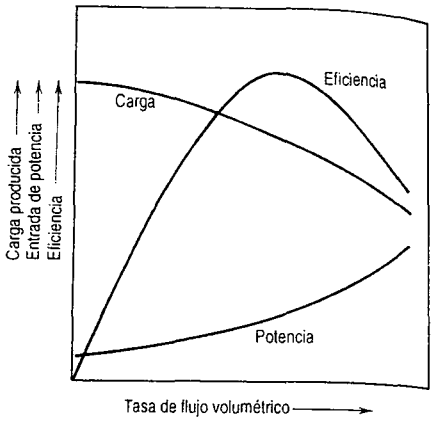


Fig. 7.4 Curvas características típicas para bomba centrífuga probadas a velocidad constante.

La similitud completa en las pruebas de funcionamiento de una bomba requeriría coeficientes de caudal y números de Reynolds idénticos. En la práctica, se ha encontrado que los efectos viscosos son relativamente poco importantes cuando dos máquinas similares geométricamente operan en condiciones de flujo "similares". En consecuencia, de las ecuaciones 7.1 y 7.2, cuando

$$\frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} \tag{7.3}$$

se concluye que

$$\frac{H_1}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{H_2}{\omega_2^2 D_2^2} \tag{7.4}$$

y

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1 \omega_1^3 D_1^5} = \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2 \omega_2^3 D_2^5} \tag{7.5}$$

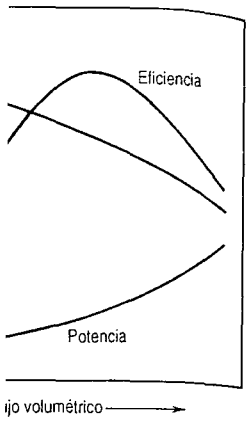
La observación empírica de que los efectos viscosos son poco importantes en condiciones de flujo similares, permite utilizar las ecuaciones de la 7.3 a la 7.5 para escalar las características de funcionamiento de las máquinas hasta las diferentes condiciones de operación, cuando cambian la velocidad o el diámetro. Estas útiles relaciones de escalamiento[5] se conocen como "leyes" de similitud de las bombas o los ventiladores. Si se conocen las condiciones de operación para una máquina, las correspondientes a cualquier máquina geométricamente similar pueden encontrarse cambiando D y ω de acuerdo con las ecuaciones de la 7.3 a la 7.5.

Otro parámetro útil de las bombas puede obtenerse eliminando el diámetro de la máquina de las ecuaciones 7.3 y 7.4. Designando $\Pi_1 = Q/\omega D^3$ y $\Pi_2 = H/\omega^2 D^2$, entonces la razón $\Pi_1^{1/2}/\Pi_2^{3/4}$ es un parámetro dimensional; este parámetro es la *velocidad específica*, N_s,

$$N_s = \frac{\omega Q^{1/2}}{H^{3/4}} \tag{7.6}$$

La velocidad específica, de acuerdo a como se definió en la ecuación 7.6, es un parámetro adimensional (siempre que la carga, H, se exprese como energía por unidad de masa). Usted podría

[5] Más detalles sobre análisis dimensional, diseño y curvas de funcionamiento para maquinaria hidráulica se presentan en el capítulo 11.



ijo volumétrico ⟶

requeriría coeficientes
ntrado que los efectos
lares geométricamente
iones 7.1 y 7.2, cuando

(7.3)

(7.4)

(7.5)

ıntes en condiciones de
ar las características de
ión, cuando cambian la
ɔcen como "leyes" de
de operación para una
lar pueden encontrarse

ıetro de la máquina de
ıces la razón $\Pi_1^{1/2}/\Pi_2^{3/4}$
s»

(7.6)

7.6, es un parámetro
de masa). Usted podría

ia hidráulica se presentan en

considerar a la velocidad específica como la velocidad requerida por una máquina para producir carga unitaria a un caudal unitario. Una velocidad específica constante describe todas las condiciones de operación de máquinas geométricamente similares con condiciones de flujo similares.

Aunque la velocidad específica es un parámetro adimensional, es una práctica común emplear un conveniente pero inconsistente sistema de unidades al especificar las variables, ω, Q y H. Cuando se hace esto la velocidad específica no es un parámetro sin unidades y su magnitud depende de las unidades utilizadas al calcularla. Las unidades comunes empleadas en la práctica de la ingeniería en los Estados Unidos para las bombas son rpm para ω, gpm para Q y pies (energía por unidad de peso) para H. En estas unidades, las velocidades específicas "bajas" equivalen a $500 < N_s < 4000$ y las "altas" a $10\,000 < N_s < 15\,000$. El problema ejemplo 7.6 ilustra el empleo de las leyes de escalamiento de bombas y los parámetros de velocidad específica. Más detalles del cálculo de la velocidad específica y ejemplos adicionales de aplicaciones a maquinaria hidráulica se presentan en el capítulo 11.

EJEMPLO 7.6 Leyes de similitud de las bombas

Una bomba centrífuga tiene una eficiencia del 80 por ciento a una velocidad específica de diseño de 2000 (en unidades de rpm, gpm y pies). El diámetro del impulsor es de 8 pulg. En las condiciones de diseño, el caudal es de 300 gpm de agua a 1170 rpm. Para obtener un flujo mayor, la bomba se va a acoplar con un motor de 1750 rpm. Emplee las "leyes" de similitud de las bombas para encontrar las características de funcionamiento de diseño de la bomba a la velocidad más alta. Muestre que la velocidad específica permanece constante para la velocidad de operación más elevada. Determine el tamaño requerido del motor.

PROBLEMA EJEMPLO 7.6

DATOS: Una bomba centrífuga con velocidad específica de diseño de 2000 (en unidades de rpm, gpm y pies). El diámetro del impulsor es $D = 8$ pulg. En las condiciones de flujo de diseño de la bomba, $\omega = 1170$ rpm y $Q = 300$ gpm, con agua.

ENCUENTRE: Mediante el empleo de las "leyes" de similitud de las bombas determine para condiciones de flujo similares a 1750 rpm:

a) Las características de funcionamiento.
b) La velocidad específica.
c) El tamaño requerido del motor.

SOLUCIÓN:
De las "leyes" de similitud de las bombas, $Q/\omega D^3 =$ constante, por lo que

$$Q_2 = Q_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = 300 \text{ gpm } \left(\frac{1750}{1170}\right)(1)^3 = 449 \text{ gpm} \longleftarrow Q_2$$

La carga de la bomba no está especificada en $\omega_1 = 1170$ rpm, pero puede calcularse de la velocidad específica, $N_s = 2000$. Empleando las unidades dadas y la definición de N_s,

$$N_S = \frac{\omega Q^{1/2}}{H^{3/4}} \quad \text{por lo que} \quad H_1 = \left(\frac{\omega_1 Q_1^{1/2}}{N_S}\right)^{4/3} = 21.9 \text{ pies}$$

Entonces $H/\omega^2 D^2$ = constante, de modo que

$$H_2 = H_1\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = 21.9 \text{ pies}\left(\frac{1750}{1170}\right)^2(1)^2 = 49.0 \text{ pies} \longleftarrow H_2$$

La potencia de salida de la bomba es $\mathcal{P}_1 = \rho g Q_1 H_1$, así que en $\omega_1 = 1170$ rpm,

$$\mathcal{P}_1 = 1.94\frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times 32.2\frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \times 300\frac{\text{gal}}{\text{min}} \times 21.9 \text{ pies} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48 \text{ gal}}$$

$$\times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pies lbf}}$$

$$\mathcal{P}_1 = 1.66 \text{ hp}$$

Pero $\mathcal{P}/\rho\omega^3 D^5$ = constante, de manera que

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 = 1.66 \text{ hp}(1)\left(\frac{1750}{1170}\right)^3(1)^5 = 5.55 \text{ hp} \longleftarrow \mathcal{P}_2$$

La potencia de entrada requerida puede calcularse como

$$\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{\mathcal{P}_2}{\eta} = \frac{5.55 \text{ hp}}{0.80} = 6.94 \text{ hp} \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{in}}$$

De esta manera probablemente se especificaría un motor de 7.5 hp (el tamaño estándar más grande que le sigue).

La velocidad específica en $\omega_2 = 1750$ rpm es

$$N_s = \frac{\omega Q^{1/2}}{H^{3/4}} = \frac{1750(449)^{1/2}}{(49.0)^{3/4}} = 2000 \longleftarrow N_s$$

Este ejemplo ilustra la aplicación de las leyes de similitud de las bombas y de la velocidad específica para el escalamiento de datos de funcionamiento. Las leyes de similitud de las bombas y ventiladores se emplean ampliamente en la industria para predecir el funcionamiento correspondiente a una familia de máquinas a partir de una sola curva de funcionamiento, así como para especificar la velocidad y la potencia de accionamiento en aplicaciones de máquinas.

7-5.3 Comentarios acerca de la prueba de modelos

Al describir los procedimientos involucrados en la prueba de modelos, hemos tratado de no implicar que la prueba es una tarea simple que brinda automáticamente resultados que son fácilmente interpretables, precisos y completos. Como en todo trabajo experimental, se necesitan una planeación y una ejecución cuidadosas para obtener resultados válidos. Los modelos deben construirse con cuidado y precisión, y deben incluir suficientes detalles en áreas críticas para el fenómeno que se está midiendo. Las balanzas aerodinámicas u otros sistemas de medición de fuerzas deben alinearse cuidadosamente y calibrarse de manera correcta. Los métodos de montaje deben idearse de modo que ofrezcan una rigidez adecuada y el movimiento del modelo, pero que a su vez no interfieran con el fenómeno que se está midiendo. Las referencias [10-12] se consideran

las fuentes estándar para detalles con respecto a técnicas de prueba de túnel de viento. En la referencia [13] se describen técnicas más especializadas para pruebas de impacto en agua.

Las instalaciones experimentales deben diseñarse y contruirse con cuidado. La calidad del flujo en un túnel de viento debe documentarse. El flujo en la sección de prueba debe ser lo más uniforme posible (a menos que se desee simular un perfil especial tal como una capa límite atmosférica), libre de angularidad y con pocos remolinos. Si ello interfiere con las mediciones, las capas límite en las paredes del túnel deben eliminarse por medio de succión o energizarse mediante soplado. Los gradientes de presión en una sección de prueba del túnel pueden provocar lecturas erróneas de la fuerza de arrastre debido a las variaciones de presión en la dirección del flujo.

Se requieren instalaciones especiales para condiciones inusuales o requerimientos de prueba especiales, principalmente para alcanzar números de Reynolds grandes. Muchas instalaciones son tan grandes o especializadas que no pueden ser financiadas por los laboratorios universitarios o la industria privada. Unos cuantos ejemplos se presentan en [14-16]:

- National Full-Scale Aerodynamics Complex, NASA, Ames Research Center, Moffett Field, California

  Dos secciones de prueba de túnel de viento, activadas por un sistema eléctrico de 125 000 hp:

  —Sección de prueba de 40 pies de altura y 80 pies de ancho (12 × 24 m), velocidad del viento máxima de 300 nudos.

  —Sección de prueba de 80 pies de altura y 120 pies de ancho (24 × 36 m), velocidad máxima del viento de 137 nudos (véase la ilustración de la portada).
- U.S. Navy, David Taylor Research Center, Carderock, Maryland

  —Estanque de experimentación de alta velocidad de 2968 pies de largo, 21 pies de ancho y 16 pies de profundidad. La instalación puede viajar hasta 100 nudos en tanto se miden cargas de arrastre hasta de 8000 lbf y cargas laterales hasta de 2000 lbf.

  —Túnel de agua a presión variable de 36 pulg con velocidad máxima de prueba de 50 nudos a presiones entre 2 y 60 psia.

  —Instalación de flujo a prueba de eco con flujo de aire tranquilo y de baja turbulencia en una sección de prueba de chorro abierto de 8 pies cuadrados por 21 pies de largo. El ruido de flujo a la velocidad máxima de 200 pies/s es menor que el de la conversación común.
- U.S. Army Corps of Engineers, Sausalito, California

  —Bahía de San Francisco y Modelo Delta con un área un poco mayor a 1 acre, escala horizontal de 1:1000 y escala vertical de 1:100, 13 500 gpm de capacidad de bombeo, utilización de agua dulce y agua salada, así como simulación de mareas.
- NASA, Langley Research Center, Hampton, Virginia

  —Instalación Transónica Nacional (NTF), con tecnología criogénica (temperaturas tan bajas como −300 F) para reducir la viscosidad de gases, aumentando el número de Reynolds por un factor de 6, mientras se disminuye a la mitad la potencia de accionamiento.

7-6 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES BÁSICAS

El éxito final en el uso del teorema Pi de Buckingham se determina mediante la profundidad utilizada para seleccionar los parámetros incluidos. Si se elige un conjunto completo, el resultado será completo. Si se omite una variable importante, el resultado no tendrá significado. Pueden incluirse variables adicionales si hay alguna incertidumbre. A medida que se gana más experiencia

con los fenómenos del flujo de fluido, el proceso de selección se vuelve más fácil. La experiencia brinda también mayor profundidad en el significado físico de cada grupo adimensional.

Un planteamiento más riguroso y amplio para determinar las condiciones bajo las cuales dos flujos son similares es emplear las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera gobernantes. La similitud puede obtenerse cuando dos fenómenos físicos son gobernados por ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera que tienen las mismas formas adimensionales. La similitud dinámica se garantiza duplicando los coeficientes adimensionales de las ecuaciones y las condiciones de frontera entre el prototipo y el modelo.

Como un ejemplo de adimensionalización de las ecuaciones diferenciales básicas, considere el flujo bidimensional estable e incompresible en el plano xy. Suponga que la gravedad actúa en la dirección y negativa.

La ecuación para la conservación de la masa es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7.7}$$

y las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 5.27) se reducen a

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{7.8}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{7.9}$$

Para adimensionalizar estas ecuaciones, divida todas las longitudes por una longitud de referencia, L, y todas las velocidades por una velocidad de referencia, V_∞, la cual suele tomarse como la velocidad de corriente libre. Establezca la presión adimensional dividiendo entre ρV_∞^2 (el doble de la presión dinámica de corriente libre). Denotando las cantidades no dimensionales por medio de asteriscos, obtenemos

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad u^* = \frac{u}{V_\infty} \quad v^* = \frac{v}{V_\infty} \quad \text{y} \quad p^* = \frac{p}{\rho V_\infty^2} \tag{7.10}$$

Para ilustrar el procedimiento de la adimensionalización de ecuaciones, considere dos términos típicos en las ecuaciones,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = V_\infty\left(\frac{u}{V_\infty}\right)\frac{\partial (u/V_\infty)V_\infty}{\partial (x/L)L} = \frac{V_\infty^2}{L}u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial (y/L)L}\left[\frac{\partial (u/V_\infty)V_\infty}{\partial (y/L)L}\right] = \frac{V_\infty}{L^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Siguiendo este procedimiento, las ecuaciones 7.7, 7.8 y 7.9 pueden escribirse

$$\frac{V_\infty}{L}\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V_\infty}{L}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \tag{7.11}$$

$$\frac{\rho V_\infty^2}{L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\rho V_\infty^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\mu V_\infty}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7.12}$$

$$\frac{\rho V_\infty^2}{L}\left(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)=-\rho g-\frac{\rho V_\infty^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\frac{\mu V_\infty}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7.13}$$

Dividiendo la ecuación 7.11 entre V_∞/L y las ecuaciones 7.12 y 7.13 entre $\rho V_\infty^2/L$ se obtiene

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \tag{7.14}$$

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\mu}{\rho V_\infty L}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7.15}$$

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{gL}{V_\infty^2}-\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\frac{\mu}{\rho V_\infty L}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7.16}$$

De las ecuaciones adimensionales (ecuaciones 7.14, 7.15, 7.16), concluimos que las ecuaciones diferenciales para dos sistemas de flujo serán idénticas, si y sólo si, las cantidades $\mu/\rho V_\infty L$ y gL/V_∞^2 son las mismas para ambos flujos. Por consiguiente, los estudios de modelos para determinar la fuerza de arrastre sobre un barco requieren la duplicación tanto del número de Froude como del número de Reynolds para asegurar flujos dinámicamente similares.

Para flujos alrededor de cuerpos sumergidos muy por debajo de la superficie libre, como para la esfera del problema ejemplo 7.4, las fuerzas másicas no son importantes. Las ecuaciones gobernantes no incluyen el término de la fuerza másica, ρg. La adimensionalización de las ecuaciones imperantes, para este caso, muestra que las ecuaciones adimensionales que gobiernan los dos flujos serán idénticas si el número de Reynolds es el mismo para ambos flujos.

Hasta ahora nos hemos concentrado en las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo. Es importante subrayar que además de que las ecuaciones adimensionales sean idénticas, también las condiciones de frontera adimensionales serán idénticas si los dos flujos van a ser cinemáticamente similares. Esto conduce al requerimiento de similitud geométrica entre los flujos. La adimensionalización de las condiciones de frontera puede llevar a requerimientos adicionales que deban satisfacerse entre los dos flujos. Por ejemplo, considere el caso donde la velocidad en una posición determinada sea periódica. La condición de frontera (bc) especifica entonces

u_{be}

$$u_{bc}=V_\infty \operatorname{sen}\omega t$$

Si adimensionalizamos el tiempo empleando la razón entre la velocidad de referencia y la longitud de referencia, entonces

$$t^*=\frac{tV_\infty}{L}$$

La condición de frontera adimensional se vuelve

$$u_{bc}^*=\frac{u_{bc}}{V_\infty}=\operatorname{sen}\left(\frac{\omega L}{V_\infty}t^*\right)$$

La duplicación de la condición de frontera requiere que el parámetro $\omega L/V_\infty$ sea el mismo entre los dos flujos. Este parámetro es el *número de Strouhal*

$$St = \frac{\omega L}{V_\infty}$$

el cual recibió ese nombre en honor al físico alemán que primero descubrió su importancia mientras investigaba el "zumbido" autoexcitado de alambres en el viento.

El establecimiento de la similitud a partir de las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera que describen el flujo es un procedimiento riguroso. Si se empieza con las ecuaciones correctas y se ejecuta cada paso correctamente, es posible asegurar que se han incluido todas las variables apropiadas. En [17] y [18] se presentan derivaciones y ejemplos adicionales del establecimiento de la similitud a partir de las ecuaciones gobernantes.

Las ecuaciones diferenciales gobernantes se escriben a menudo en forma adimensional para la solución numérica. El escalamiento se simplifica y los problemas de conversión de unidades se reducen cuando se emplean formas adimensionales de las ecuaciones. El empleo de ecuaciones adimensionales permite con frecuencia que las soluciones se presenten en forma generalizada.

7-7 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 7, usted será capaz de realizar lo siguiente:

1. Definir:
   - El número de Reynolds
   - El número de Euler (coeficiente de presión)
   - El número de cavitación
   - El número de Froude
   - El número de Weber
   - El número de Mach
   - El número de Strouhal
   - La similitud geométrica
   - La similitud cinemática
   - La similitud dinámica
2. Establecer el teorema Pi de Buckingham.
3. Dado un problema físico en el que el parámetro dependiente sea una función de parámetros independientes especificados, determinar un conjunto de razones adimensionales independientes que caractericen el problema.
4. Establecer las condiciones bajo las cuales el comportamiento de un prototipo puede predecirse a partir de pruebas de modelos.
5. Predecir resultados para un prototipo a partir de datos de pruebas de modelos.
6. Obtener coeficientes adimensionales mediante la adimensionalización de las ecuaciones diferenciales gobernantes.
7. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionan con el material que usted ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Buckingham, E., "On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations", *Physical Review, 4,* 4, 1914, pp. 345-376.
2. Todd, L. H., "Resistance and Propulsion", capítulo VII en *Principles of Naval Architecture*, J. P. Comstock, ed. Nueva York: Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1967.
3. "Aerodynamic Flow Visualization Techniques and Procedures", Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, SAE Information Report, HS J1566, Enero 1986.
4. Merzkirch, W., *Fl*
5. "SAE Wind Tun Warrendale, PA:
6. Sedov, L. I., *Simi*
7. Birkhoff, G., *Hyc* University Press,
8. Ipsen, D. C., *Uni*
9. Yalin, M. S., *Th*
10. Pankhurst, R. C.
11. Rae, W. H., y A
12. Pope, A., y K. I
13. Waugh, J. G., y *ca.* 1965.
14. Baals, D. W., Space Admini
15. Vincent, M., Research and
16. Smith, B. E., Performance'
17. Kline, S. J., *S*
18. Hansen, A. G Prentice-Hal
19. Kowalski, T. *ring*, H. Sch

PROBLEMAS

7.1 A veloc fluido. I V, la vi expres

7.2 Los ex repenti le ha result

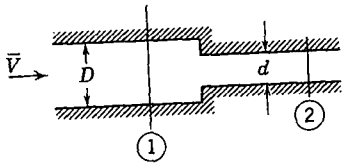
7.3 El e de p flui adi

4. Merzkirch, W., *Flow Visualization*, 2a ed. Nueva York: Academic Press, 1987.
5. "SAE Wind Tunnel Test Procedure for Trucks and Buses", *Recommended Practice* SAE J1252, Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1981.
6. Sedov, L. I., *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Nueva York: Academic Press, 1959.
7. Birkhoff, G., *Hydrodynamics —A Study in Logic, Fact, and Similitude*. 2a ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1960.
8. Ipsen, D. C., *Units, Dimensions, and Dimensionless Numbers*. Nueva York: McGraw-Hill, 1960.
9. Yalin, M. S., *Theory of Hydraulic Models*. Nueva York: Macmillan, 1971.
10. Pankhurst, R. C., y D. W. Holder, *Wind-Tunnel Technique*. Londres: Pitman, 1965.
11. Rae, W. H., y A. Pope, *Low-Speed Wind Tunnel Testing*, 2a. Nueva York: Wiley-Interscience, 1984.
12. Pope, A., y K. L. Goin, *High-Speed Wind Tunnel Testing*. Nueva York: Krieger, 1978.
13. Waugh, J. G., y G. W. Stubstad, *Hydroballistics Modeling*. San Diego, CA: U. S. Naval Undersea Center, *ca.* 1965.
14. Baals, D. W., y W. R. Corliss, *Wind Tunnels of NASA*. Washington, D. C.: National Aeronautics and Space Administration, SP-440, 1981.
15. Vincent, M., "The Naval Ship Research and Development Center", Carderock, MD: Naval Ship Research and Development Center, Report 3039 (Revised), noviembre 1971.
16. Smith, B. E., P. T. Zell, y P. M. Shinoda, "Comparison of Model- and Full-Scale Wind-Tunnel Performance", *Journal of Aircraft, 27*, 3, marzo 1990, pp. 232-238.
17. Kline, S. J., *Similitude and Approximation Theory*. Nueva York: McGraw-Hill, 1965.
18. Hansen, A. G., *Similarity Analysis of Boundary-Value Problems in Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.
19. Kowalski, T., "Hydrodynamics of Water-Borne Bodies", capítulo 4 en *Introduction to Ocean Engineering*, H. Schenck, ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1975.

PROBLEMAS

7.1 A velocidades muy bajas, la fuerza de arrastre sobre un objeto es independiente de la densidad del fluido. Por ello, la fuerza de arrastre, F, sobre una pequeña esfera es una función sólo de la velocidad, V, la viscosidad del fluido, μ, y el diámetro de la esfera, D. Emplee el análisis dimensional para expresar la fuerza de arrastre como una función de estas variables.

7.2 Los experimentos muestran que la caída de presión debido al flujo a través de una contracción repentina en un ducto circular puede expresarse como $\Delta p = p_1 - p_2 = f(\rho, \mu, \bar{V}, d, D)$. A usted se le ha pedido organizar algunos datos experimentales. Obtenga los parámetros adimensionales resultantes.



P7.2

7.3 El espesor de la capa límite, δ, sobre una placa plana lisa en un flujo incompresible sin gradientes de presión depende de la velocidad de corriente libre, U, la densidad del fluido, ρ, la viscosidad del fluido, μ, y la distancia desde el borde delantero de la placa, x. Exprese estas variables en forma adimensional.

7.4 El esfuerzo de corte de pared, τ_w, en una capa límite depende de la distancia a partir del borde delantero del cuerpo, x, la densidad, ρ, y la viscosidad, μ, del fluido, así como de la velocidad de corriente libre del flujo, U. Obtenga los grupos adimensionales y exprese la relación funcional entre ellos.

7.5 La velocidad media, $\bar{u}$, para flujo turbulento en una tubería o una capa límite puede correlacionarse empleando el esfuerzo de corte de pared, τ_w, la distancia desde la misma, y, y las propiedades del fluido, ρ y μ. Emplee el análisis dimensional para encontrar un parámetro adimensional que contenga $\bar{u}$ y uno que contenga y, adecuados para organizar los datos experimentales. Muestre que el resultado puede escribirse como

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = f\left(\frac{yu_*}{\nu}\right)$$

donde $u_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ es la *velocidad de fricción*.

7.6 Las mediciones de la altura del líquido aguas arriba a partir de una obstrucción situada en un flujo de canal abierto, pueden utilizarse para determinar el flujo volumétrico. (Tales obstrucciones, designadas y calibradas para medir el flujo en canal abierto, se denominan vertedores.) Suponga que el caudal, Q, sobre un vertedor es una función de la altura aguas arriba, h, la gravedad, g, y el ancho del canal, b. Emplee el análisis dimensional para determinar la dependencia funcional de Q sobre las otras variables.

7.7 La velocidad, V, de una onda de gravedad de superficie libre en agua profunda es una función de la longitud de onda, λ, la profundidad, D, la densidad del líquido, ρ, y la aceleración de la gravedad, g. Emplee el análisis dimensional para encontrar la dependencia funcional de V sobre las demás variables. Exprese V en la forma más simple posible.

7.8 Se forman ondas de capilaridad sobre la superficie libre de un líquido como resultado de la tensión superficial. Sus longitudes de onda son cortas. La velocidad de la onda de capilaridad depende de la tensión superficial, σ, la longitud de onda, λ, y la densidad del líquido, ρ. Emplee el análisis dimensional para expresar la velocidad de la onda como una función de estas variables.

7.9 Se sabe que la capacidad de transporte de carga, W, de un cojinete de chumacera depende de su diámetro, D, la longitud, l, y el claro, c, además de su velocidad angular, ω, y la viscosidad del lubricante, μ. Determine los parámetros adimensionales que caracterizan este problema.

7.10 Un disco gira cerca de una superficie fija. El radio del disco es R, y el espacio entre el disco y la superficie se llena con un líquido de viscosidad μ. El espaciamiento entre el disco y la superficie es h, y el disco gira a la velocidad angular ω. Encuentre la dependencia entre el momento de torsión sobre el disco, T, y las demás variables.

7.11 La potencia por área de sección transversal unitaria, E, transmitida por una onda sonora es una función de la velocidad de onda, V, la densidad del medio, ρ, la amplitud de onda, r, y la frecuencia de la onda, n. Determine, por medio del análisis dimensional, la forma general de la expresión para E en términos de las demás variables.

7.12 Se piensa que la potencia, $\mathcal{P}$, requerida para accionar un ventilador dependerá de la densidad del fluido, ρ, el flujo volumétrico, Q, el diámetro del impulsor, D, y la velocidad angular, ω. Utilice el análisis dimensional para determinar la dependencia de $\mathcal{P}$ sobre el resto de las variables.

7.13 Se cree que la vorticidad, ζ, en un punto en un campo de flujo axisimétrico depende de la circulación inicial, Γ_0, el radio, r, el tiempo, τ, y la viscosidad cinemática del fluido, ν. Encuentre un conjunto de parámetros adimensionales adecuado para organizar los datos experimentales.

7.14 Se le pide encontrar un conjunto de parámetros adimensionales para organizar los datos de un experimento de laboratorio, en el cual se vacía un tanque por medio de un orificio desde un nivel de líquido inicial h_0. El tiempo, τ, para vaciar el tanque depende del diámetro del mismo, D, del diámetro del orificio, d, la aceleración de la gravedad, g, la densidad del líquido, ρ, y la viscosidad del líquido, μ. ¿Cuántos parámetros adimensionales resultarán? ¿Cuántas variables de repetición deben selec-

cionarse para determinar los parámetros adimensionales? Obtenga el parámetro Π que contiene la viscosidad.

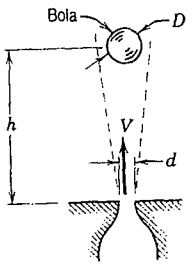
7.15 En un experimento de un laboratorio de mecánica de fluidos, un tanque de agua, con diámetro D, se vacía desde un nivel inicial h_0. El hoyo de drenaje redondeado perfectamente tiene diámetro d. Suponga que el flujo másico del tanque es una función de h, D, d, g, ρ y μ, donde g es la aceleración de la gravedad y ρ y μ son las propiedades del fluido. Los datos medidos se van a correlacionar en forma adimensional. Determine el número de parámetros adimensionales que se producirán. Especifique el número de parámetros de repetición que deben seleccionarse para determinar los parámetros adimensionales. Obtenga el parámetro Π que contiene la viscosidad.

7.16 Una banda continua que se mueve verticalmente a través de un baño de líquido viscoso arrastra una capa de líquido, de espesor h, junto con ella. El caudal del líquido, Q, se supone que depende de μ, ρ, g, h y V, donde V es la velocidad de la banda. Aplique el análisis dimensional para predecir la forma de la dependencia de Q con respecto al resto de las variables.

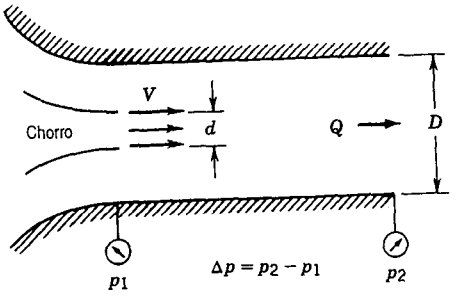
7.17 Suponga que la fuerza de resistencia, R, de una placa plana sumergida en un fluido depende de la densidad y viscosidad de éste, así como de la velocidad, el ancho, b, y la altura h, de la placa. Encuentre un conjunto conveniente de coordenadas para organizar los datos.

7.18 Se forman pequeñas gotas de líquido cuando un chorro de líquido se rompe en un proceso de atomización e inyección de combustible. Se piensa que el diámetro de gota resultante, d, dependerá de la densidad, viscosidad y tensión superficial del líquido, así como de la velocidad del chorro, V, y del diámetro, D. ¿Cuántas relaciones adimensionales se requieren para caracterizar este proceso? Determine estas relaciones.

7.19 El dibujo presenta un chorro de aire que se descarga verticalmente. Los experimentos muestran que una bola situada en el chorro permanece suspendida en una posición estable. Se encuentra que la altura de equilibrio de la bola en el chorro depende de D, d, V, ρ, μ y W, donde W es el peso de la bola. Se sugiere recurrir al análisis dimensional para correlacionar los datos experimentales. Encuentre los parámetros Π que caracterizan este fenómeno.



P 7.19



P 7.20

7.20 Considere la bomba de chorro que se muestra. Se necesita un análisis dimensional para organizar los datos de funcionamiento medidos para la bomba de chorro. La dependencia funcional es $\Delta p = f(\rho, V, d, D, \mu, Q)$. Determine el número de grupos adimensionales necesarios para caracterizar la bomba de chorro. Obtenga grupos adimensionales que contengan el flujo volumétrico, Q, y la viscosidad, μ.

7.21 Un gran tanque de líquido bajo presión se vacía a través de una tobera de contorno liso de área A. El flujo másico se cree que depende del área de la tobera, A, la densidad del líquido, ρ, la diferencia de altura entre la superficie del líquido y la tobera, h, la presión manométrica en el tanque, Δp y la aceleración gravitacional, g. Determine cuántos parámetros Π independientes pueden formarse para este problema. Encuentre los parámetros adimensionales. Establezca la relación funcional para el flujo másico en términos de los parámetros adimensionales.

7.22 Los giros sobre el eje desempeñan un importante papel en la trayectoria de bolas de golf, ping pong y tenis. En consecuencia, es importante conocer la relación a la cual el giro sobre el eje disminuye en una bola en vuelo. Se considera que el momento de torsión aerodinámico, T, que actúa sobre la bola en vuelo, depende de la velocidad de vuelo, V, la densidad del aire, ρ, la viscosidad del aire, μ, el diámetro de la bola, D, la tasa de giro (velocidad angular), ω, y el diámetro de los hoyuelos en la bola, d. Determine los parámetros adimensionales que resultan.

7.23 El empuje de una hélice marina se va a medir durante pruebas en "agua circulante" en una variedad de velocidades angulares y velocidades hacia adelante ("velocidades de avance"). El empuje, F_T, se considera que dependerá de la densidad del agua, ρ, el diámetro de la hélice, D, la velocidad de avance, V, la aceleración de la gravedad, g, la velocidad angular, ω, la presión en el líquido, p, y la viscosidad del mismo, μ. Desarrolle un conjunto de parámetros adimensionales para caracterizar el funcionamiento de la hélice. (Uno de los parámetros resultantes, gD/V^2, se conoce como la *velocidad de avance de Froude*.)

7.24 La pérdida de potencia, $\mathcal{P}$, en un cojinete de chumacera depende de la longitud, l, el diámetro, D, y el claro, c, del cojinete, además de su velocidad angular, ω. La viscosidad del lubricante y la presión media también son importantes. Obtenga los parámetros adimensionales que caracterizan este problema. Determine la forma funcional de la dependencia de $\mathcal{P}$ en estos parámetros.

7.25 Se sabe que la potencia, $\mathcal{P}$, requerida para accionar un impulsor depende de las siguientes variables: velocidad de corriente libre, V, diámetro del impulsor, D, velocidad angular, ω, viscosidad del fluido, μ, densidad del fluido, ρ, y velocidad del sonido en el fluido, c. ¿Cuántos grupos adimensionales se requieren para caracterizar esta situación? Obtenga estos grupos adimensionales.

7.26 En un horno de convección con ventilador, se considera que la transferencia de calor al asador, $\dot{Q}$ (energía por unidad de tiempo), depende del calor específico del aire, c_p, la diferencia de temperatura, Θ, la escala de longitud, L, la densidad, ρ, viscosidad, μ, y velocidad del aire, V. ¿Cuántas dimensiones básicas están incluidas en estas variables? Determine el número de parámetros Π necesarios para caracterizar el horno. Evalúe los parámetros Π.

7.27 Cuando una válvula se cierra repentinamente en una tubería en la que fluye agua, se genera una onda de presión de *golpe de ariete*. Las altas presiones que se generan mediante tales ondas pueden dañar la tubería. La presión máxima, $p_{máx}$, generada por el golpe de ariete es una función de la densidad del líquido, ρ, la velocidad de flujo inicial, U_0, y el módulo volumétrico del líquido, E_v. ¿Cuántos grupos adimensionales se requieren para caracterizar el golpe de ariete? Determine la relación funcional entre las variables en términos de los grupos Π necesarios.

7.28 Una aeronave va a operar a 20 m/s en condiciones estándar de aire. Se construye un modelo a escala de $\frac{1}{20}$ y se prueba en un túnel de viento a la misma temperatura del aire para determinar el arrastre. ¿Qué criterio debe considerarse para obtener similitud dinámica? Si el modelo se prueba a 75 m/s, ¿qué presión debe utilizarse en el túnel de viento? Si la fuerza de arrastre del modelo es de 250 N, ¿cuál será el arrastre del prototipo?

7.29 Se efectúan mediciones de la fuerza de arrastre sobre un modelo de automóvil en un tanque experimental lleno con agua. La escala de la longitud del modelo es $\frac{1}{5}$ de la del prototipo. Establezca las condiciones requeridas para asegurar la similitud dinámica entre el modelo y el prototipo. Determine la fracción de la velocidad del prototipo en aire, a la cual la prueba del modelo debe realizarse en agua para asegurar condiciones dinámicamente similares. Las mediciones efectuadas a diversas velocidades indican que la razón de fuerza adimensional se vuelve constante a velocidades de prueba del modelo por arriba de $V_m = 4$ m/s. La fuerza de arrastre medida durante una prueba a esta velocidad es $F_{Dm} = 182$ N. Calcule la fuerza de arrastre esperada sobre el vehículo prototipo operando a 90 km/hr en aire.

7.30 Un modelo a escala de $\frac{1}{5}$ de un torpedo se prueba en un túnel de viento para determinar la fuerza de arrastre. El prototipo opera en agua, tiene 533 mm de diámetro y 6.7 m de longitud. La velocidad de operación deseada del prototipo es 28 m/s. Para evitar los efectos de compresibilidad en el túnel

de viento, la velocidad máxima se limita a 110 m/s. Sin embargo, la presión en el túnel de viento puede variarse mientras la temperatura se mantiene constante a 20 C. ¿A qué presión mínima debe operar el túnel de viento para alcanzar una prueba dinámicamente similar? En condiciones de prueba dinámicamente similares, la fuerza de arrastre sobre el modelo se mide como 618 N. Evalúe la fuerza de arrastre esperada sobre el torpedo a escala natural.

7.31 El arrastre de un perfil aerodinámico a un ángulo de ataque cero es una función de la densidad, la viscosidad y la velocidad, además de un parámetro de longitud. Un modelo a escala de $\frac{1}{10}$ de un perfil aerodinámico se probó en un túnel de viento a un número de Reynolds de 5.5×10^6, basado en una longitud de cuerda. Las condiciones de prueba en la corriente de aire en el túnel de viento fueron 15 C y 10 atm de presión absoluta. El perfil aerodinámico prototipo tiene una longitud de cuerda de 2 m y se volará en aire en condiciones estándar. Determine la velocidad a la cual se probó el modelo de túnel de viento, así como la velocidad del prototipo correspondiente.

7.32 Una ala de aeroplano, con longitud de cuerda de 5 pies y tramo de 30 pies, se diseña para moverse a través de aire estándar a una velocidad de 230 pies/s. Un modelo a escala de $\frac{1}{10}$ de esta ala se va a probar en un túnel de agua. ¿Qué velocidad es necesaria en el túnel de agua para alcanzar similitud dinámica? ¿Cuál será la razón entre las fuerzas medidas en el flujo del modelo y las del ala del prototipo?

7.33 Considere una esfera lisa, de diámetro D, inmersa en un fluido que se mueve con velocidad V. La fuerza de arrastre sobre un globo meteorológico de 3 m de diámetro en el aire, que se mueve a 1.5 m/s, se va a calcular a partir de datos de prueba. La prueba se va a efectuar en agua, empleando un modelo de 50 mm de diámetro. Bajo condiciones de similitud dinámica, la fuerza de arrastre del modelo se mide como 3.78 N. Evalúe la velocidad de prueba del modelo y la fuerza de arrastre esperada sobre el globo a escala natural.

7.34 Las características dinámicas de una bola de golf se van a probar empleando un modelo en un túnel de viento. Los parámetros dependientes son la fuerza de arrastre, F_A, y la fuerza de sustentación, F_S, sobre la bola. Los parámetros independientes deben incluir la velocidad angular, ω, y la profundidad de los pequeños hoyos sobre la superficie de la pelota, d. Determine parámetros adimensionales apropiados y exprese la dependencia funcional entre ellos. Un profesional del golf puede golpear una bola a $V = 240$ pies/s y $\omega = 9000$ rpm. Para modelar estas condiciones en un túnel de viento con velocidad máxima de 80 pies/s, ¿qué diámetro del modelo debe emplearse? ¿Qué tan rápido debe rotar el modelo? (El diámetro de una bola de golf empleada en los Estados Unidos es de 1.68 pulg.)

7.35 Una prueba de modelo se efectúa para determinar las características de vuelo de un disco volador. Los parámetros dependientes son la fuerza de arrastre, F_A, y la fuerza de sustentación, F_S. Los parámetros independientes deben incluir la velocidad angular, ω, y la altura de la rugosidad, h. Determine los parámetros adimensionales adecuados y exprese la dependencia funcional entre ellos. La prueba (empleando aire) sobre un disco modelo a escala de $\frac{1}{4}$ será geométrica, cinemática y dinámicamente similar a la del prototipo. Los valores del prototipo son $V_p = 20$ pies/s y $\omega_p = 100$ rpm. ¿Qué valores de V_m y ω_m deben emplearse?

7.36 Un modelo de perfil hidrodinámico se va a probar a una escala de 1:20. La velocidad de prueba se elige para duplicar el número de Froude correspondiente a la velocidad del prototipo de 60 nudos. Para modelar la cavitación correctamente, también debe duplicarse el número de cavitación. ¿A qué presión ambiente debe efectuarse la prueba? El agua en el recipiente de prueba del modelo puede calentarse hasta 130 F, en comparación con los 45 F del prototipo.

7.37 En una tubería horizontal de 1 pulg de diámetro fluye aceite SAE 10W a 80 F, a una velocidad promedio de 3 pies/s, que produce una caída de presión de 65.3 psig en un tramo de 500 pies. A través de la misma tubería, fluye agua a 60 F bajo condiciones dinámicamente similares. Empleando los resultados del problema ejemplo 7.2, calcule la velocidad promedio del flujo de agua y la correspondiente caída de presión.

7.38 El aumento capilar, Δh, de un líquido en un tubo circular, de diámetro D, depende de la tensión

superficial, σ, y del peso específico, γ, del fluido. Las variables significativas encontradas a partir del análisis dimensional son

$$\Pi_1 = \Delta h \sqrt{\frac{\gamma}{\sigma}} \qquad y \qquad \Pi_2 = \frac{\sigma}{\gamma D^2}$$

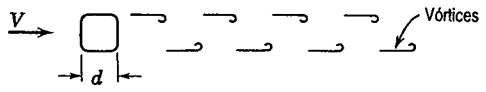
Muestre que los parámetros Π pueden manipularse para producir los parámetros no dimensionales del problema ejemplo 7.3. El aumento capilar para el líquido A es 1.0 pulg en un tubo de 0.010 pulg de diámetro interior. ¿Cuál será el aumento para el líquido B (teniendo la misma tensión superficial pero cuatro veces la densidad de A) en un tubo de 0.005 pulg de diámetro interior?

7.39 Considere agua que fluye alrededor de un cilindro circular, de diámetro D y longitud l. Además de la geometría, se sabe que la fuerza de arrastre depende de la velocidad del líquido, V, la densidad, ρ, y la viscosidad, μ. Exprese la fuerza de arrastre, F_A, en forma adimensional como una función de todas las variables relevantes. La distribución de la presión estática sobre un cilindro circular, medida en el laboratorio, puede expresarse en términos del coeficiente de presión adimensional; el coeficiente de presión más bajo es $C_p = -2.4$ en la posición de mínima presión estática sobre la superficie del cilindro. Estime la máxima velocidad a la cual un cilindro podría ser remolcado en agua a la presión atmosférica, sin provocar cavitación, si el principio de la misma ocurre a un número de cavitación de 0.5.

7.40 Un modelo a escala de $\frac{1}{8}$ de la carrocería de un trailer se prueba en un túnel de viento presurizado. El ancho, la altura y la longitud de la carrocería son $W = 0.305$ m, $H = 0.476$ m y $L = 2.48$ m, respectivamente. A la velocidad del viento de $V = 75.0$ m/s, la fuerza de arrastre del modelo es $F_A = 128$ N. (La densidad del aire en el túnel es $\rho = 3.23$ kg/m^3.) Calcule el coeficiente de arrastre aerodinámico para el modelo. Compare los números de Reynolds para la prueba del modelo y para el vehículo prototipo a 55 mph. Calcule la fuerza de arrastre aerodinámico sobre el vehículo prototipo a una velocidad de carretera de 55 mph dentro de un viento delantero de 10 mph.

7.41 Un automóvil viajará a través de aire estándar a 100 km/hr. Para determinar la distribución de presión, se va a probar en agua un modelo a escala de $\frac{1}{5}$. ¿Qué factores deben considerarse para asegurar la similitud cinemática en las pruebas? Determine la velocidad del agua que debe emplearse. ¿Cuál es la razón correspondiente de la fuerza de arrastre entre los flujos del prototipo y el modelo? El coeficiente de presión más bajo es $C_p = -1.4$ en la posición de la presión estática mínima sobre la superficie. Estime la presión mínima del túnel requerida para evitar cavitación, si el inicio de la misma ocurre a un número de cavitación de 0.5.

7.42 En algunos intervalos de velocidad, los vórtices se difunden a partir de la cola o cilindros colocados a través del flujo. Los vórtices abandonan alternativamente la parte superior y la base del cilindro, como se muestra, provocando una fuerza alternante normal a la velocidad de la corriente libre. Se piensa que la frecuencia de difusión del vórtice, f, depende de ρ, d y μ. Utilice el análisis dimensional para desarrollar una relación funcional para f. La distribución del vórtice ocurre en aire estándar sobre dos cilindros con una razón de diámetro de 2. Determine la razón de velocidad para la similitud dinámica y la razón de las frecuencias de difusión del vórtice.



P7.42

7.43 Una prueba de modelo de la carrocería de un trailer se va a efectuar en un túnel de viento. Se encuentra que la fuerza de arrastre, F_A, depende del área frontal, A, la velocidad del viento, V, la densidad del aire, ρ, y la viscosidad del aire, μ. La escala del modelo es 1:4; el área frontal del modelo es $A = 0.625$ m^2. Obtenga un conjunto de parámetros adimensionales apropiado para caracterizar los resultados de prueba del modelo. Establezca las condiciones requeridas para obtener similitud dinámica entre los flujos del modelo y el prototipo. Cuando se probó a una velocidad del viento

$V = 89.6$ m/s, en aire estándar, la fuerza de arrastre medida sobre el modelo fue $F_A = 2.46$ kN. Estime la fuerza de arrastre aerodinámico sobre el vehículo a escala natural a $V = 22.4$ m/s. Calcule la potencia necesaria para superar esta fuerza de arrastre si no hay viento.

7.44 Un modelo a escala de 1:50 de un submarino se prueba en un túnel de agua. La fuerza de arrastre, F_A, depende de la velocidad del agua, V, la densidad, ρ, y la viscosidad, μ, así como del volumen del modelo, $\forall$. Encuentre un conjunto de parámetros adimensionales apropiado para organizar los datos de prueba resultantes. Estime el arrastre del submarino a escala natural a 27 nudos, si una prueba de modelo a 10 nudos produjo una fuerza de arrastre medida de 13 N.

7.45 Su profesor favorito gusta del montañismo, por lo que existe la posibilidad de que pueda caer dentro de una fisura en algún glaciar. Si eso ocurriera hoy día, y el profesor fuera atrapado en un glaciar que se mueve lentamente, usted tendría curiosidad de saber si el profesor reaparecería en la caída aguas abajo del glaciar durante este año académico. Suponiendo que el hielo es un fluido newtoniano con la densidad de la glicerina pero un millón de veces más viscoso, usted decide construir un modelo y usar el análisis dimensional y la similitud para estimar cuándo reaparecerá el profesor. Suponga que el glaciar real tiene 15 m de profundidad y que se encuentra sobre una pendiente que desciende 1.5 m en una distancia horizontal de 1850 m. Desarrolle los parámetros adimensionales y las condiciones esperadas que gobernarán la similitud dinámica en este problema. Si el profesor modelo reaparece en el laboratorio después de 9.6 horas, ¿cuándo debe usted regresar al final del glaciar real para brindar ayuda a su profesor favorito?

7.46 Un modelo a escala de $\frac{1}{10}$ de la carrocería de un trailer se prueba en un túnel de viento. El área frontal del modelo es $A_m = 1.08$ pies^2. Cuando se prueba a $V_m = 250$ pies/s en aire estándar, la fuerza de arrastre medida es $F_A = 76.3$ lbf. Evalúe el coeficiente de arrastre para las condiciones del modelo dadas. Asumiendo que el coeficiente de arrastre es el mismo para el modelo y el prototipo, calcule la fuerza de arrastre sobre el prototipo de la carrocería a una velocidad de carretera de 55 mph. Determine la velocidad del aire a la cual el modelo *debe* probarse para asegurar resultados dinámicamente similares si la velocidad del prototipo es 55 mph. ¿La velocidad del aire es práctica? ¿Por qué sí o por qué no?

7.47 Se recomienda en [5] que el área frontal de un modelo sea menor que el 5 por ciento del área de la sección de prueba del túnel de viento y $Re = Vw/\nu > 2 \times 10^6$, donde w es el ancho del modelo. Además, la altura del modelo debe ser menor que 30 por ciento de la altura de la sección de prueba y el ancho máximo proyectado del modelo a una desviación máxima (20°), debe ser menor que el 30 por ciento del ancho de la sección de prueba. La velocidad del aire máxima debe ser menor que 300 pies/s para evitar efectos de compresibilidad. Se va a probar el modelo de la carrocería de un trailer en un túnel de viento que tiene una sección de prueba de 1.5 pies de altura y 2 pies de ancho. La altura, el ancho y la longitud de la caja a escala natural son 13 pies 6 pulg, 8 pies y 65 pies, respectivamente. Evalúe la razón de escala del modelo más grande que cumpla con el criterio recomendado. Valore si un número de Reynolds adecuado puede lograrse en esta instalación de prueba.

7.48 Un recipiente circular, lleno parcialmente de agua, se hace girar en torno a su eje a una velocidad angular constante, ω. Se encontró que, en cualquier tiempo, τ, a partir del inicio de la rotación, la velocidad, V_θ, a una distancia r del eje de rotación, será función de τ, ω y de las propiedades del líquido. Escriba los parámetros adimensionales que caracterizan a este problema. Si, en otro experimento, se hace girar miel en el mismo cilindro a la misma velocidad angular, determine a partir de sus parámetros adimensionales si la miel alcanzará un movimiento estable tan rápido como el agua. Explique por qué el número de Reynolds no sería un parámetro adimensional importante en el escalamiento del movimiento de estado estable del líquido en el recipiente.

7.49 La potencia, $\mathcal{P}$, requerida para accionar un ventilador se supone que depende de la densidad del fluido, ρ, el flujo volumétrico, Q, el diámetro del impulsor, D, y la velocidad angular, ω. Si un ventilador con $D_1 = 8$ pulg entrega $Q_1 = 800$ pcm (pies cúbicos por minuto) de aire a $\omega_1 = 2400$ rpm, ¿qué flujo volumétrico podría esperarse para un ventilador geométricamente similar con $D_2 = 16$ pulg a $\omega_2 = 1850$ rpm?

7.50 El aumento de presión, Δp, de un líquido que fluye establemente a través de una bomba centrífuga depende del diámetro de la misma, D, la velocidad angular del rotor, ω, el flujo volumétrico, Q, y la densidad, ρ. La tabla brinda los datos para el prototipo y para una bomba modelo geométricamente similar. Para las condiciones correspondientes a la similitud dinámica entre las bombas modelo y prototipo, calcule los valores que faltan en la tabla.

Variable	Prototipo	Modelo
Δp		74.9 kPa
Q	1.25 m^3/min	
ρ	800 kg/m^3	999 kg/m^3
ω	10 rad/s	100 rad/s
D	60 mm	120 mm

7.51 Se requiere una bomba de flujo axial para entregar 25 pies^3/s de agua a una carga de 150 pies · lbf/slug. El diámetro del rotor es 1 pie y se va a accionar a 500 rpm. El prototipo va a ser modelado sobre un pequeño aparato de prueba que tiene un suministro de potencia de 3 hp a 1000 rpm. Para un funcionamiento similar entre el prototipo y el modelo, calcule la carga, el flujo volumétrico y el diámetro del modelo.

7.52 Considere de nuevo el problema 7.23. La experiencia indica que para las hélices de barco de tamaño normal, los efectos viscosos en el escalamiento son pequeños. Además, cuando no está presente la cavitación, el parámetro adimensional que contiene a la presión puede ignorarse. Suponga que el momento de torsión, T, y la potencia, $\mathcal{P}$, dependen de los mismos parámetros que el empuje. Para las condiciones bajo las cuales los efectos de μ y ρ pueden despreciarse, deduzca "leyes" de similitud para hélices, análogas a las "leyes" de similitud de las bombas de la sección 7-5.2, que relacionen el empuje, el momento de torsión y la potencia con la velocidad angular y el diámetro de la hélice.

7.53 Un propulsor modelo de dos pies de diámetro se prueba en un túnel de viento. El aire se aproxima al propulsor a 150 pies/s cuando éste rota a 2000 rpm. El empuje y el momento de torsión medidos en estas condiciones son 25 lbf y 7.5 pies · lbf, respectivamente. Un prototipo 10 veces más grande que el modelo se va a construir. En el punto de operación dinámicamente similar, la velocidad del aire que se aproxima será de 400 pies/s. Calcule la velocidad, el empuje y el momento de torsión del propulsor prototipo en estas condiciones, despreciando el efecto de la viscosidad pero incluyendo la densidad.

7.54 Los siguientes datos para la prueba de modelo de un propulsor marino se presentan en el problema 4-6 de [19]:

Parámetro	Modelo	Prototipo
Diámetro	18 pulg.	24 pie
Velocidad angular	960 rpm	240 rpm
Velocidad de avance	20 pie/s	
Empuje	35.1 lbf	
Momento de torsión	120 pulg. · lbf	
Fluido	Agua	Agua de mar
Temperatura	65 F	59 F

Para condiciones de prueba dinámicamente similares, calcule la velocidad de avance, el empuje y el momento de torsión del propulsor prototipo. (Emplee los resultados del problema 7.52.) Evalúe la

potencia de empuje producida, la entrada de potencia requerida y la eficiencia del propulsor prototipo. Desprecie las consideraciones de cavitación y del número de Reynolds.

7.55 Los túneles de viento de circuito cerrado pueden producir velocidades más altas que los túneles de circuito abierto con la misma entrada de potencia, porque la energía se recupera en el difusor aguas abajo de la sección de prueba. La *razón de energía cinética* es una cantidad importante definida como la razón entre el flujo de energía cinética en la sección de prueba y la potencia de accionamiento. Estime la razón de energía cinética para el túnel de 40 × 80 en NASA-Ames.

7.56 En pruebas de modelos en túneles de viento, las fuerzas y los momentos se miden relativos a un sistema de ejes alineado con la línea central del túnel. Las fuerzas que actúan sobre un vehículo en una autopista se expresan de manera más práctica en un sistema de ejes referido al vehículo (coordenadas de ejes del cuerpo). Los datos de prueba medidos en ángulos de desviación deben convertirse en coordenadas de ejes del cuerpo para poder emplearlos. Desarrolle las ecuaciones para calcular el arrastre de los ejes del cuerpo y la fuerza lateral a partir de los datos medidos en coordenadas de túnel de viento. Suponga que el ángulo de desviación del modelo es ψ.

7.57 Un modelo de 1:16 de un camión se prueba en un túnel de viento en aire estándar. El modelo tiene 152 mm de ancho, 200 mm de altura y 762 mm de largo. La fuerza de arrastre medida a una velocidad de viento de 26.5 m/s es 6.09 N. El gradiente de presión longitudinal en la sección de prueba del túnel de viento es -11.8 N/m^2/m. Estime la corrección que debe efectuarse a la fuerza de arrastre medida para corregir la flotación horizontal provocada por el gradiente de presión en la sección de prueba. Calcule el coeficiente de arrastre para el modelo. Evalúe la fuerza de arrastre aerodinámico sobre el prototipo a 100 km/hr en un día tranquilo.

7.58 Un modelo de 1:16 de un camión de 20 m de largo se está probando en un túnel de viento, donde el gradiente axial de presión estática es -1.2 mm de agua por metro, a una velocidad de prueba de 80 m/s. El área frontal del prototipo es 10 m^2. Estime la corrección de flotación horizontal para esta situación. Exprese la corrección como una fracción del valor de C_D medido, si $C_D = 0.85$.

7.59 La velocidad de propagación de ondas superficiales de pequeña amplitud en una región de profundidad uniforme está dada por

$$c^2 = \left(\frac{\sigma}{\rho}\frac{2\pi}{\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}$$

donde h es la profundidad del líquido no perturbado y λ es la longitud de onda. Empleando L como una longitud característica y V_0 como una velocidad característica, obtenga los grupos adimensionales que caracterizan la ecuación y determine las condiciones para la similitud.

7.60 La pendiente de una superficie libre de una onda estable en un flujo unidimensional dentro de una capa líquida poco profunda, se describe por medio de la ecuación

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Emplee una escala de longitud, L, y una escala de velocidad, V_0, para adimensionalizar esta ecuación. Obtenga los grupos adimensionales que caracterizan este flujo. Determine las condiciones para la similitud dinámica.

7.61 Un flujo inestable unidimensional en una capa líquida delgada se describe por medio de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}$$

Emplee una escala de longitud, L, y una escala de velocidad, V_0, para adimensionalizar esta ecuación. Obtenga los grupos adimensionales que caracterizan este flujo. Determine las condiciones para la similitud dinámica.

7.62 Mediante el uso del análisis de órdenes de magnitud, las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes pueden simplificarse a las ecuaciones de capa límite de Prandtl. Para flujo estable, incompresible y bidimensional, despreciando la gravedad, el resultado es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Utilice L y V_0 como longitud y velocidad características, respectivamente. Adimensionalice estas ecuaciones e identifique los parámetros de similitud que resulten.

uidad y de Navier-Sto-
estable, incompresible

Adimensionalice estas

Capítulo 8

Flujo interno incompresible viscoso

Los flujos completamente limitados por superficies sólidas reciben el nombre de flujos internos. De tal manera, éstos incluyen flujos a través de tuberías, ductos, toberas, difusores, contracciones y expansiones súbitas, válvulas y conectores.

Los flujos internos pueden ser laminares o turbulentos. Algunos casos de flujo laminar pueden resolverse analíticamente. En el caso de flujo turbulento, no son posibles las soluciones analíticas, por lo que debemos confiar fuertemente en teorías semiempíricas y en datos experimentales. La naturaleza de los flujos laminar y turbulento se analizó en la sección 2-5.2. Para flujos internos, el régimen de flujo (laminar o turbulento) es fundamentalmente una función del número de Reynolds.

Después de una breve sección introductoria, consideramos dos casos del flujo laminar completamente desarrollado de un fluido newtoniano. Aunque la mayor parte de los flujos internos de interés para la ingeniería son flujos turbulentos, el flujo laminar puede ser importante en aplicaciones tales como la lubricación o en procesos químicos. Nuestro análisis principia con un volumen de control diferencial en vez de las ecuaciones diferenciales de movimiento deducidas en el capítulo 5. Este análisis también brinda información acerca de la naturaleza básica de los flujos turbulentos en tuberías y ductos, los cuales se consideran posteriormente. El capítulo concluye con una discusión de mediciones de flujo.

8-1 INTRODUCCIÓN

Como se estudió previamente en la sección 2-5.4, el régimen de flujo en una tubería (laminar o turbulento) se determina por medio del número de Reynolds, $Re = \rho \bar{V} D/\mu$. Puede demostrarse, mediante el experimento de Reynolds clásico,[1] la diferencia cualitativa entre los flujos laminar y turbulento. En este experimento, el agua fluye desde un gran depósito a través de un tubo limpio. Un delgado filamento de tinta inyectada en la entrada del tubo permite la observación visual del flujo. A flujos bajos (números bajos de Reynolds), la tinta inyectada en el flujo permanece en un solo filamento; hay poca dispersión de la tinta porque el flujo es laminar. En éste, el fluido fluye en láminas, o capas; no hay mezcla macroscópica de capas adyacentes de fluido.

[1] Este experimento se demuestra en la película de la NCFMF, *Turbulence*, R. W. Stewart, director.

Conforme aumenta el flujo a través del tubo, el filamento de tinta se vuelve inestable y se rompe en un movimiento aleatorio; la línea de tinta se estira y tuerce en miles de hilos enmarañados y rápidamente se dispersa por todo el campo de flujo. Este comportamiento de flujo turbulento se debe a pequeñas fluctuaciones de velocidad de alta frecuencia, superimpuestas al movimiento medio del flujo turbulento, como se ilustró antes en la figura 2.14; la mezcla de partículas del fluido que provienen de sus capas adyacentes resulta en una rápida dispersión de la tinta.

Con un gran cuidado para mantener el flujo libre de perturbaciones y con superficies lisas, ¡los experimentos efectuados hasta la fecha han sido capaces de mantener flujo laminar en una tubería hasta un número de Reynolds de aproximadamente 100 000! Sin embargo, la mayor parte de las situaciones de flujo de problemas de ingeniería no se controlan tan cuidadosamente. En condiciones normales, ocurren transiciones a $Re \approx 2300$ para flujo en tuberías. (Los números de Reynolds de transición para otras situaciones de flujo se presentan en los problemas ejemplo.)

La figura 8.1 ilustra flujo laminar en la región de entrada de una tubería circular. El flujo tiene velocidad uniforme U_0 en la entrada de la tubería. Debido a la condición de no deslizamiento en la pared, sabemos que la velocidad en la pared debe ser cero a lo largo de todo el tramo de la tubería. Una capa límite (sección 2-5.1) se desarrolla a lo largo de las paredes del canal. La superficie sólida ejerce una fuerza de corte retardadora sobre el flujo; de tal manera, la velocidad del fluido en la vecindad de la superficie se reduce. En secciones sucesivas a lo largo de la tubería en esta sección de entrada, el efecto de la superficie sólida se siente más lejos dentro del flujo.

Para flujo incompresible, la conservación de la masa requiere que la velocidad en la línea central de la tubería aumente con la distancia a partir de la entrada. Para satisfacer la conservación de la masa en flujo incompresible, la velocidad promedio en cualquier sección transversal

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int_{\text{Área}} u\, dA$$

debe ser igual a U_0, por lo que

$$\bar{V} = U_0 = \text{constante}$$

Suficientemente lejos de la entrada de la tubería, la capa límite que se desarrolla en la pared de la misma alcanza la línea central del conducto y el flujo se vuelve enteramente viscoso. La forma del perfil de velocidad cambia ligeramente después de que el núcleo no viscoso desaparece. Cuando la forma del perfil no cambia ya con el aumento en la distancia, x, el flujo está *completamente desarrollado*. La distancia aguas abajo desde la entrada hasta la posición en la cual empieza el flujo completamente desarrollado se llama la *longitud de entrada*. La forma real del perfil de velocidad completamente desarrollado depende de que el flujo sea laminar o turbulento. En la figura 8.1, el perfil se muestra cualitativamente para un flujo laminar.

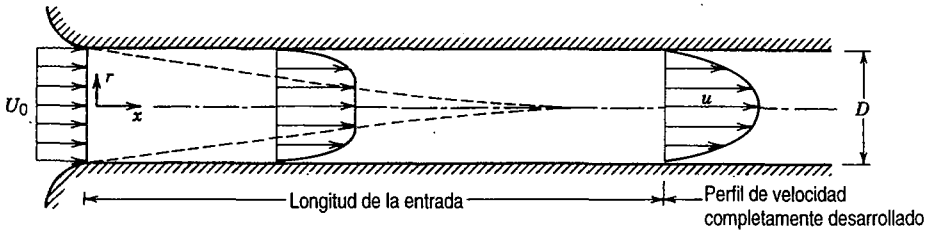


Fig. 8.1 Flujo en la región de entrada de una tubería.

En un flujo laminar, la longitud de entrada, L, es una función del número de Reynolds,

$$\frac{L}{D} \approx 0.06 \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} \tag{8.1}$$

donde D es el diámetro de la tubería, $\bar{V}$ es la velocidad promedio, ρ es la densidad del fluido y μ es su viscosidad. El flujo laminar en una tubería sólo puede esperarse para números de Reynolds menores que 2300. De manera que la longitud de entrada para flujo laminar de tubería puede ser tan grande como

$$L \approx 0.06\ Re\ D \leq (0.06)(2300)\, D = 138D$$

o mayor que 100 diámetros de tubería. Si el flujo es turbulento, la mezcla creciente entre las capas de fluido[2] provoca el crecimiento más rápido de la capa límite. Los experimentos muestran que el perfil de la velocidad media se vuelve completamente desarrollado dentro de 25 a 40 diámetros de tubería desde la entrada. Sin embargo, los detalles del movimiento turbulento no pueden desarrollarse por completo para 80 o más diámetros de tubería. Los flujos internos completamente desarrollados se tratarán en las partes A y B de este capítulo.

PARTE A FLUJO LAMINAR COMPLETAMENTE DESARROLLADO

Aunque hay relativamente pocos problemas de flujo viscoso para los cuales podemos obtener soluciones analíticas en forma cerrada, el método de solución es importante. En esta sección consideramos unos cuantos ejemplos clásicos de flujos laminares completamente desarrollados. Nuestro intento es obtener información detallada acerca del campo de velocidad. El conocimiento del campo de velocidad permite el cálculo de los esfuerzos de corte, la caída de presión y el flujo volumétrico.

En vez de usar las ecuaciones diferenciales completas del movimiento (ecuaciones 5.27) para el flujo de un fluido viscoso, deduciremos las ecuaciones gobernantes a partir de principios fundamentales para cada campo de flujo de interés. Puesto que estamos interesados en los detalles del campo de flujo, nuestra meta será obtener las ecuaciones diferenciales que describan el flujo. En todo caso, debemos iniciar aplicando la familiar ecuación de la segunda ley de Newton para un volumen de control a un volumen de control diferencial elegido de manera adecuada.

8-2 FLUJO LAMINAR COMPLETAMENTE DESARROLLADO ENTRE PLACAS PARALELAS INFINITAS

8-2.1 Ambas placas estacionarias

El fluido en sistemas hidráulicos de alta presión a menudo se fuga a través de la separación anular entre el émbolo y el cilindro. Para separaciones muy pequeñas (por lo general, de aproximadamente 0.005 mm), este campo de flujo puede modelarse como flujo entre placas paralelas infinitas. Para calcular el flujo de fuga, debemos determinar primero el campo de velocidad.

[2] Esta mezcla se ilustra bastante bien en la parte introductoria de la película de la NCFMF, *Turbulence*, R. W. Stewart, director.

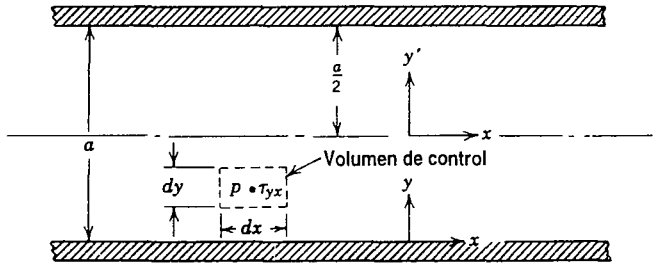


Fig. 8.2 Volumen de control para el análisis del flujo laminar entre placas paralelas infinitas estacionarias.

Vamos a considerar el flujo laminar completamente desarrollado entre placas paralelas infinitas. Las placas están separadas por la distancia a, como se muestra en la figura 8.2. Las placas se consideran infinitas en la dirección z, sin variación de ninguna propiedad del fluido en esta dirección. Se supone también que el flujo será estable e incompresible. Antes de iniciar nuestro análisis, ¿qué debemos saber acerca del campo de flujo? En primer lugar, sabemos que la componente x de velocidad debe ser cero tanto en la placa superior como en la inferior, como resultado de la condición de no deslizamiento en la pared. Las condiciones de frontera son

$$\text{en } y = 0 \qquad u = 0$$
$$\text{en } y = a \qquad u = 0$$

Como el flujo está completamente desarrollado, la velocidad no puede variar con x y, en consecuencia, depende sólo de y, por lo que $u = u(y)$. Además, no hay componente de velocidad en la dirección y ni en la z ($v = w = 0$).

Para nuestro análisis seleccionamos un volumen de control diferencial de tamaño $d\forall = dx\,dy\,dz$ y aplicamos la componente x de la ecuación del momento.

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(3)=0(1)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall}^{} + \int_{SC} u\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo completamente desarrollado
3) $F_{B_x} = 0$

Para flujo completamente desarrollado, el flujo neto del momento a través de la superficie de control es cero. (El flujo de momento a través de la cara derecha de la superficie de control es igual en magnitud pero de signo opuesto al flujo de momento a través de la cara izquierda; no hay flujo de momento a través de ninguna de las caras restantes del volumen de control.) Puesto que no hay fuerzas másicas en la dirección x, la ecuación de momento se reduce a

$$F_{S_x} = 0 \qquad (8.2)$$

El siguiente paso es sumar las fuerzas que actúan sobre el volumen de control en la dirección x.

Reconocemos que las fuerzas normales (fuerzas de la presión) actúan sobre las caras derecha e izquierda y que las fuerzas tangenciales (fuerzas de corte) actúan sobre las caras superior e inferior.

Si la presión en el centro del elemento es p, entonces la fuerza de presión en la cara izquierda es

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$

y la fuerza de presión en la cara derecha es

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$

Si la fuerza de corte en el centro del elemento es τ_{yx}, entonces la fuerza de corte en la cara inferior es

$$-\left(\tau_{yx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz$$

y la fuerza de corte en la cara superior es

$$\left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz$$

Advierta que al expandir el esfuerzo de corte, τ_{yx}, en una serie de Taylor en torno al centro del elemento, hemos empleado la derivada total en vez de la parcial. Hicimos esto porque nos dimos cuenta que τ_{yx} es sólo una función de y, ya que $u = u(y)$.

Después de haber formulado las fuerzas que actúan sobre cada cara del volumen de control, las sustituimos en la ecuación 8.2; esta ecuación se simplifica en

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0$$

o

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{8.3}$$

La ecuación 8.3 debe ser válida para toda x y y. Esto requiere que

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante}$$

Al integrar esta ecuación, obtenemos

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1$$

lo que indica que el esfuerzo de corte varía linealmente con y. Puesto que para un fluido newtoniano

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.10}$$

entonces

$$\mu \frac{du}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1$$

y

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + \frac{c_1}{\mu} y + c_2 \tag{8.4}$$

Para evaluar las constantes, c_1 y c_2, debemos aplicar las condiciones de frontera. En $y = 0$, $u = 0$. Consecuentemente, $c_2 = 0$. En $y = a$, $u = 0$. Por consiguiente,

$$0 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a^2 + \frac{c_1}{\mu} a$$

Esto produce

$$c_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a$$

y por tanto

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a y$$

o

$$u = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right] \tag{8.5}$$

En este punto tenemos el perfil de velocidad. ¿Qué otra cosa podemos aprender en torno al flujo?

Distribución de esfuerzos de corte

La distribución de esfuerzos de corte está dada por

$$\tau_{yx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) a = a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right] \tag{8.6a}$$

Flujo volumétrico

El flujo volumétrico está determinado por

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Para una profundidad l en la dirección z,

$$Q = \int_0^a u l \, dy$$

o

$$\frac{Q}{l} = \int_0^a \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - ay)\,dy$$

De modo que el flujo volumétrico por profundidad l está dado por

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^3 \tag{8.6b}$$

El flujo como una función de la caída de presión

Como $\partial p/\partial x$ es constante, la presión varía linealmente con x y

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = \frac{-\Delta p}{L}$$

Sustituyendo en la expresión para el flujo volumétrico se obtiene

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{12\mu}\left[\frac{-\Delta p}{L}\right]a^3 = \frac{a^3 \Delta p}{12\mu L} \tag{8.6c}$$

Velocidad promedio

La velocidad promedio, $\bar{V}$, está dada por

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{a^3 l}{l a} = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^2 \tag{8.6d}$$

Punto de velocidad máxima

Para encontrar el punto de máxima velocidad hacemos du/dy igual a cero y resolvemos para la y correspondiente. De la ecuación 8.5,

$$\frac{du}{dy} = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right]$$

Por tanto,

$$\frac{du}{dy} = 0 \qquad \text{en} \qquad y = \frac{a}{2}$$

En

$$y = \frac{a}{2}, \qquad u = u_{\text{máx}} = -\frac{1}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^2 = \frac{3}{2}\bar{V} \tag{8.6e}$$

Transformación de coordenadas

Al derivar las relaciones anteriores, el origen de coordenadas, $y = 0$, se tomó en la placa inferior. También podríamos haber tomado el origen en la línea central del canal. Si denotamos las coordenadas con origen en la línea central del canal como x, y', las condiciones de frontera son $u = 0$ en $y' = \pm a/2$.

Para obtener el perfil de velocidad en términos de x, y', sustituimos $y = y' + a/2$ en la ecuación 8.5. El resultado es

$$u = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y'}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \tag{8.7}$$

Esta ecuación muestra que el perfil de velocidad que hemos determinado es parabólico, como se indica en la figura 8.3.

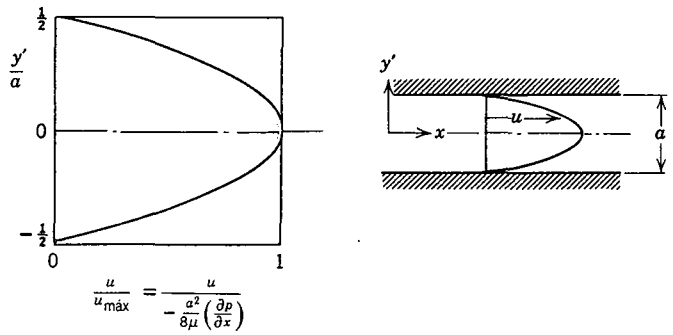


Fig. 8.3 Perfil de velocidad adimensional para flujo laminar completamente desarrollado entre placas paralelas infinitas.

Puesto que todos los esfuerzos se relacionaron con los gradientes de velocidad a través de la ley de viscosidad de Newton, y los esfuerzos adicionales que surgen a raíz de fluctuaciones turbulentas no se han explicado, todos los resultados en esta sección son válidos únicamente para flujo laminar. Los experimentos demuestran que este flujo se vuelve turbulento para números de Reynolds (definidos como $Re = \rho \bar{V} a/\mu$) mayores que 1400, aproximadamente. En consecuencia, el número de Reynolds debe verificarse después de utilizar las ecuaciones 8.6 para asegurar una solución válida.

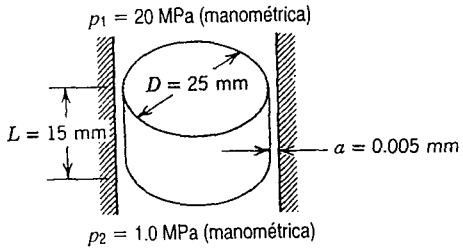
EJEMPLO 8.1 Flujo de fuga por el lado de un émbolo

Un sistema hidráulico opera a una presión manométrica de 20 MPa y 55 C. El fluido hidráulico es aceite SAE 10W. Una válvula de control se compone de un émbolo de 25 mm de diámetro, ajustado dentro de un cilindro con una separación radial media de 0.005 mm. Determine el flujo de fuga si la presión manométrica en el lado de baja presión del émbolo es 1.0 MPa. (El émbolo tiene 15 mm de largo.)

PROBLEMA EJEMPLO 8.1

DATOS: Un flujo de aceite hidráulico entre un émbolo y un cilindro, como se muestra. El fluido es aceite SAE 10W a 55 C.

ENCUENTRE: El flujo de fuga, Q.



SOLUCIÓN:
El ancho de la separación es muy pequeño, por lo que el flujo puede modelarse como el que está entre placas paralelas. La ecuación 8.6c puede aplicarse.

Ecuación de cálculo:
$$\frac{Q}{l} = \frac{a^3 \Delta p}{12 \mu L} \tag{8.6c}$$

Suposiciones:
1) Flujo laminar
2) Flujo estable
3) Flujo incompresible
4) Flujo completamente desarrollado (note que ¡L/a = 15/0.005 = 3000!)

El ancho de la placa, l, se aproxima como $l = \pi D$. Por tanto,

$$Q = \frac{\pi D a^3 \Delta p}{12 \mu L}$$

Para aceite SAE 10W a 55 C, μ = 0.018 kg/m · s, de la figura A.2, apéndice A. De tal modo,

$$Q = \frac{\pi}{12} \times 25 \text{ mm} \times (0.005)^3 \text{ mm}^3 \times (20 - 1)10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m} \cdot \text{s}}{0.018 \text{ kg}} \times \frac{1}{15 \text{ mm}} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}$$

$Q = 57.6 \text{ mm}^3/\text{s}$ ← Q

Para asegurar que el flujo es laminar, también debemos verificar el número de Reynolds.

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D a} = 57.6 \frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{25 \text{ mm}} \times \frac{1}{0.005 \text{ mm}} \times \frac{\text{m}}{10^3 \text{ mm}} = 0.147 \text{ m/s}$$

y

$$Re = \frac{\rho \bar{V} a}{\mu} = \frac{\text{SG} \rho_{H_2O} \bar{V} a}{\mu}$$

Para aceite SAE 10W, DR = 0.92, de la tabla A.2, apéndice A. Por consiguiente,

$$Re = 0.92 \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.147 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.005 \text{ mm} \times \frac{\text{m} \cdot \text{s}}{0.018 \text{ kg}} \times \frac{\text{m}}{10^3 \text{ mm}} = 0.0375$$

De manera que el flujo es seguramente laminar, ya que $Re \ll 1400$.

8-2.2 La placa superior moviéndose con velocidad constante, *U*

Un segundo caso de flujo laminar de importancia práctica es el flujo en un cojinete de chumacera. En tal cojinete, un cilindro interior, la chumacera, gira dentro de un miembro estacionario. A cargas bajas, los centros de los dos miembros esencialmente coinciden, y la pequeña separación es simétrica. Puesto que ésta es pequeña, es razonable para "desdoblar" el cojinete y para modelar el campo de flujo como flujo entre placas paralelas infinitas.

Vamos a considerar ahora el caso en el que la placa superior se está moviendo hacia la derecha con velocidad constante, U, como se muestra en la figura 8.4. Todo lo que hemos hecho para ir de una placa superior estacionaria a una placa superior en movimiento es cambiar una de las condiciones de frontera. Las condiciones de frontera para el caso de la placa en movimiento son

$$u = 0 \quad \text{en} \quad y = 0$$
$$u = U \quad \text{en} \quad y = a$$

Puesto que sólo han cambiado las condiciones de frontera, no hay razón para repetir todo el análisis de la sección 8-2.1. El análisis que conduce a la ecuación 8.4 es igualmente válido para el caso de la placa en movimiento. De tal modo, la distribución de velocidad está dada por

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2 + \frac{c_1}{\mu}y + c_2 \tag{8.4}$$

y nuestra única tarea es evaluar las constantes c_1 y c_2 empleando las condiciones de frontera apropiadas.

En $y = 0$, $u = 0$. Consecuentemente, $c_2 = 0$.
En $y = a$, $u = U$. Consecuentemente,

$$U = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^2 + \frac{c_1}{\mu}a$$

Por tanto,

$$c_1 = \frac{U\mu}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a$$

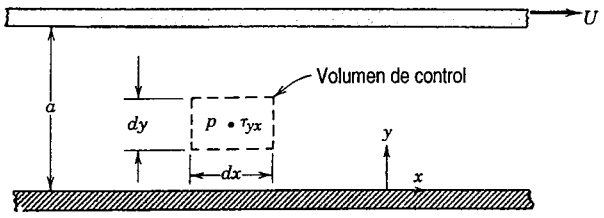


Fig. 8.4 Volumen de control para el análisis de flujo laminar entre placas paralelas infinitas: placa superior en movimiento con velocidad constante, *U*.

y

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2 + \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)ay$$

$$= \frac{Uy}{a} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - ay)$$

$$u = \frac{Uy}{a} + \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)\right] \tag{8.8}$$

Es tranquilizante notar que la ecuación 8.8 se reduce a la 8.5 para una placa superior estacionaria. De la ecuación 8.8, para gradiente de presión cero (para $\partial p/\partial x = 0$), la velocidad varía linealmente con y. Éste fue el caso que se trató en el capítulo 2.

A partir de la distribución de velocidad de la ecuación 8.8 podemos obtener información adicional acerca del flujo.

Distribución de los esfuerzos de corte

La distribución de los esfuerzos de corte está dada por $\tau_{yx} = \mu\,(du/dy)$,

$$\tau_{yx} = \mu\frac{U}{a} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right] = \mu\frac{U}{a} + a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right] \tag{8.9a}$$

Flujo volumétrico

El flujo volumétrico está dado por $Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$. Para una profundidad l en la dirección z

$$Q = \int_0^a u l\, dy$$

o

$$\frac{Q}{l} = \int_0^a \left[\frac{Uy}{a} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - ay)\right]dy$$

Por lo que el flujo volumétrico por profundidad l está dado por

$$\frac{Q}{l} = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^3 \tag{8.9b}$$

Velocidad promedio

La velocidad promedio, $\bar{V}$, está determinada por

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = l\left[\frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^3\right] \Big/ la = \frac{U}{2} - \frac{1}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)a^2 \tag{8.9c}$$

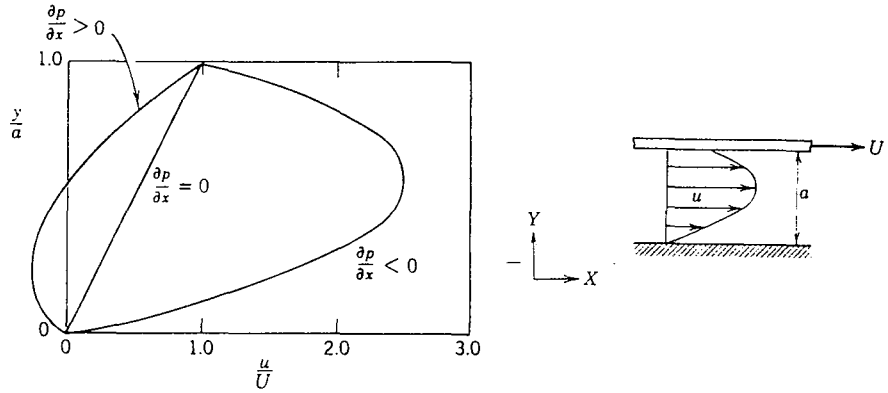


Fig. 8.5 Perfil de velocidad adimensional para flujo laminar completamente desarrollado entre placas paralelas infinitas: placa superior en movimiento con velocidad constante, U.

Punto de máxima velocidad

Para encontrar el punto de máxima velocidad igualamos a cero du/dy y resolvemos para la y correspondiente. De la ecuación 8.8,

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{a} + \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{2y}{a^2} - \frac{1}{a}\right] = \frac{U}{a} + \frac{a}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[2\left(\frac{y}{a}\right) - 1\right]$$

Por tanto,

$$\frac{du}{dy} = 0 \qquad \text{en} \qquad y = \frac{a}{2} - \frac{U/a}{(1/\mu)(\partial p/\partial x)}$$

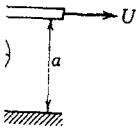
No hay relación simple entre la velocidad máxima, $u_{máx}$, y la velocidad media, $\bar{V}$, para este caso de flujo.

La ecuación 8.8 sugiere que el perfil de velocidad puede tratarse como una combinación entre un perfil de velocidad lineal y uno parabólico; el último término en la ecuación 8.8 es idéntico a la ecuación 8.5. El resultado es una familia de perfiles de velocidad, dependientes de U y de $(1/\mu)(\partial p/\partial x)$; en la figura 8.5 se dibujan unos cuantos perfiles. (Como se muestra en la figura 8.5, algo de flujo inverso —en la dirección x negativa— puede ocurrir cuando $\partial p/\partial x > 0$.)

De nuevo, todos los resultados desarrollados en esta sección son válidos sólo para flujo laminar. Los experimentos indican que este flujo se vuelve turbulento (para $\partial p/\partial x = 0$) a un número de Reynolds de aproximadamente 1500, donde $Re = \rho Ua/\mu$ para este caso de flujo. No mucha información se dispone para el caso en el que el gradiente de presión no es cero.

EJEMPLO 8.2 Momento de torsión y potencia en un cojinete de chumacera

Un cojinete de chumacera de cigüeñal en un motor de automóvil se lubrica por medio de aceite SAE 30 a 210 F. El diámetro del cojinete es 3 pulg y la separación diametral es de 0.0025 pulg, gira a 3600 rpm y su longitud es de 1.25 pulg. El cojinete no está sujeto a carga, por lo que la separación es simétrica. Determine el momento de torsión requerido para hacer girar el cojinete, así como la potencia disipada.



desarrollado
/elocidad

solvemos para la y

l]

la, $\bar{V}$, para este caso

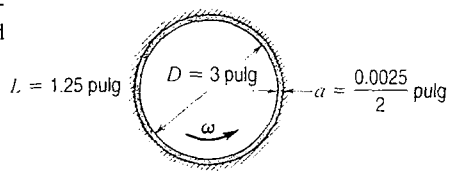
a combinación entre
ón 8.8 es idéntico a
ndientes de U y de
stra en la figura 8.5,
$\partial x > 0$.)
dos sólo para flujo
$\partial x = 0$) a un número
de flujo. No mucha
ero.

chumacera

por medio de aceite
l es de 0.0025 pulg,
carga, por lo que la
cer girar el cojinete,

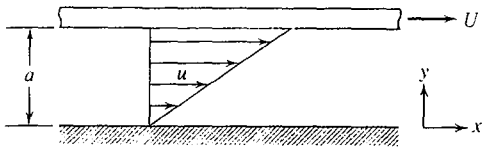
PROBLEMA EJEMPLO 8.2

DATOS: El cojinete de chumacera, según se muestra. Advierta que el ancho de la separación, a, es la *mitad* de la separación diametral. El lubricante es aceite SAE 30 a 210 F. La velocidad es 3600 rpm.



ENCUENTRE: *a*) Momento de torsión, T.
b) Potencia disipada.

SOLUCIÓN:
El momento de torsión sobre la chumacera se debe al corte viscoso en la película de aceite. El ancho de la separación es pequeño, por lo que el flujo puede modelarse como el correspondiente entre placas paralelas infinitas:



Ecuación de cálculo:

$$\tau_{yx} = \mu\frac{U}{a} + a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[\frac{y}{a} - \frac{1}{2}\right] \qquad (8.9a)$$

($\partial p/\partial x = 0(6)$)

Suposiciones:
1) Flujo laminar
2) Flujo estable
3) Flujo incompresible
4) Flujo completamente desarrollado
5) Ancho infinito ($L/a = 1.25/0.00125 = 1000$, por lo que ésta es una suposición razonable)
6) $\partial p/\partial x = 0$ (el flujo es simétrico en un cojinete real sin carga)

Por tanto,

$$\tau_{yx} = \mu\frac{U}{a} = \mu\frac{\omega R}{a} = \mu\frac{\omega D}{2a}$$

Para aceite SAE 30 a 210 F (99 C), $\mu = 9.6 \times 10^{-3}$ N · s/m^2 (2.01×10^{-4} lbf · s/pie^2), de la figura A.2, apéndice A. En consecuencia,

$$\tau_{yx} = \frac{2.01 \times 10^{-4}\ \text{lbf}\cdot\text{s}}{\text{pie}^2} \times 3600\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times 3\ \text{pulg} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{0.00125\ \text{pulg}}$$

$$\tau_{yx} = 90.9\ \text{lbf/pie}^2$$

Puesto que $\tau_{xy} > 0$, éste actúa hacia la *izquierda* sobre la placa superior, la cual es una superficie y negativa. La fuerza de corte total está dada por los esfuerzos de corte multiplicados por el área. Esta fuerza se aplica en la superficie de la chumacera. Por tanto,

$$T = FR = \tau_{yx}\pi DLR = \frac{\pi}{2}\tau_{yx}D^2L$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 90.9 \frac{\text{lbf}}{\text{pie}^2} \times (3)^2 \text{ pulg}^2 \times \frac{\text{pie}^2}{144 \text{ pulg}^2} \times 1.25 \text{ pulg}$$

$$T = 11.2 \text{ pulg} \cdot \text{lbf} \longleftarrow T$$

La potencia disipada en el cojinete es

$$\dot{W} = FU = FR\omega = T\omega$$

$$= 11.2 \text{ pulg} \cdot \text{lbf} \times 3600 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{pie}}{12 \text{ pulg}} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pie} \cdot \text{lbf}}$$

$$\dot{W} = 0.640 \text{ hp} \longleftarrow \dot{W}$$

Para asegurar flujo laminar, verifique el número de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho U a}{\mu} = \frac{\text{DR } \rho_{H_2O} U a}{\mu} = \frac{\text{DR } \rho_{H_2O} \omega R a}{\mu}$$

Suponga que la DR del aceite SAE 30 es la misma que la del aceite SAE 10W. De la tabla A.2, apéndice A, DR = 0.92. Por consiguiente,

$$Re = 0.92 \times 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times \frac{(3600)2\pi}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 1.5 \text{ pulg} \times 0.00125 \text{ pulg}$$

$$\times \frac{\text{pie}^2}{2.01 \times 10^{-4} \text{ lbf} \cdot \text{s}} \times \frac{\text{pie}^2}{144 \text{ pulg}^2} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$$Re = 43.6$$

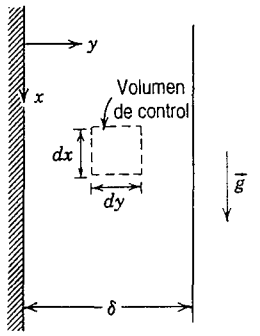
Por tanto, el flujo es laminar, ya que $Re \ll 1500$.

EJEMPLO 8.3 Película laminar en una pared vertical

Un líquido newtoniano, viscoso e incompresible fluye en forma estable y laminar hacia abajo sobre una pared vertical. El espesor, δ, de la película de líquido es constante. Puesto que la superficie libre del líquido está expuesta a la presión atmosférica, no hay gradiente de presión. En este flujo accionado por la gravedad, aplique la ecuación del momento al volumen de control diferencial, $dx\,dy\,dz$, para obtener la distribución de velocidad en la película del líquido.

PROBLEMA EJEMPLO 8.3

DATOS: Un flujo laminar completamente desarrollado de un líquido newtoniano e incompresible que desciende por una pared vertical; el espesor, δ, de la película del líquido es constante y $\partial p/\partial x = 0$.



ENCUENTRE: La expresión para la distribución de la velocidad en la película.

SOLUCIÓN: La componente x de la ecuación del momento para un volumen de control es

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall + \int_{SC} u\rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Suposiciones:
1) Flujo laminar
2) Flujo estable
3) Flujo incompresible
4) Flujo completamente desarrollado

Para flujo estable, $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{VC} u\rho\, d\forall = 0$

Para flujo completamente desarrollado, $\displaystyle\int_{SC} u\rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$

De tal modo, la ecuación del momento para el caso presente se reduce a

$$F_{S_x} + F_{B_x} = 0$$

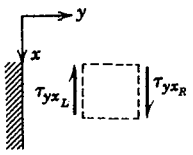
La fuerza másica, F_{B_x}, está dada por $F_{B_x} = \rho g\, d\forall = \rho g\, dx\, dy\, dz$. La únicas fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control diferencial son las fuerzas de corte sobre las superficies verticales. (Como $\partial p/\partial x = 0$, no hay fuerza neta de presión actuando sobre el volumen de control.)

Si el esfuerzo de corte en el centro del volumen de control diferencial es τ_{yx}, entonces,

el esfuerzo de corte sobre la cara izquierda es $\tau_{yx_L} = \left(\tau_{yx} - \dfrac{d\tau_{yx}}{dy}\dfrac{dy}{2}\right)$,

y

el esfuerzo de corte sobre la cara derecha es $\tau_{yx_R} = \left(\tau_{yx} + \dfrac{d\tau_{yx}}{dy}\dfrac{dy}{2}\right)$



La dirección de los vectores del esfuerzo de corte se toma de manera consistente con la convención de signos de la sección 2-3. Así, sobre la cara izquierda, una superficie menos y, τ_{yx_L}, actúa hacia arriba y sobre la cara derecha, una superficie y más, τ_{yx_R}, actúa hacia abajo.

Las fuerzas superficiales se obtienen multiplicando cada esfuerzo de corte por el área sobre la cual actúan. Sustituyendo en $F_{S_x} + F_{B_x} = 0$, obtenemos

$$-\tau_{yx_L}\, dx\, dz + \tau_{yx_R}\, dx\, dz + \rho g\, dx\, dy\, dz = 0$$

o

$$-\left(\tau_{yx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz + \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz + \rho g\;dx\,dy\,dz = 0$$

Al simplificar obtenemos

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\rho g$$

Como

$$\tau_{yx} = \mu\frac{du}{dy} \qquad \text{entonces} \qquad \mu\frac{d^2u}{dy^2} = -\rho g$$

y

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\rho g}{\mu}$$

La integración con respecto a y produce

$$\frac{du}{dy} = \frac{\rho g}{\mu}y + c_1$$

Al integrar nuevamente, obtenemos

$$u = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$$

Para evaluar las constantes c_1 y c_2, debemos aplicar las condiciones de frontera apropiadas:

(i) $y = 0$, $u = 0$ (no hay deslizamiento)

(ii) $y = \delta$, $\frac{du}{dy} = 0$ (desprecie la resistencia del aire, esto es, suponga un esfuerzo de corte cero en la superficie libre)

De la condición de frontera (i), $c_2 = 0$

De la condición de frontera (ii), $0 = -\frac{\rho g}{\mu}\delta + c_1$ o $c_1 = \frac{\rho g}{\mu}\delta$

En consecuencia, $$u = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{y^2}{2} + \frac{\rho g}{\mu}\partial y$$

o

$$u = \frac{\rho g}{\mu}\delta^2\left[\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$$

$u(y)$

Empleando el perfil de velocidad puede mostrarse que

el flujo volumétrico es $Q/l = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^3$

la velocidad máxima es $U_{\text{máx}} = \frac{\rho g}{2\mu}\delta^2$

la velocidad promedio es $\bar{V} = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^2$

El flujo en la película del líquido es laminar para $Re = \bar{V}\,\delta/\nu \lesssim 1000$ [1].

El propósito de este problema es ilustrar la aplicación de la ecuación del momento a un volumen de control diferencial para un flujo laminar completamente desarrollado.

8-3 FLUJO LAMINAR COMPLETAMENTE DESARROLLADO EN UNA TUBERÍA

Como un ejemplo final de casos de flujo laminar completamente desarrollado, vamos a considerar el flujo laminar completamente desarrollado en una tubería. Aquí el flujo es axisimétrico. En consecuencia, es más conveniente trabajar en coordenadas cilíndricas. Debemos emplear de nuevo un volumen de control diferencial, pero esta vez, como el flujo es axisimétrico, el volumen de control será un anillo diferencial, como se muestra en la figura 8.6. La longitud del volumen de control diferencial anular es dx y su espesor es dr.

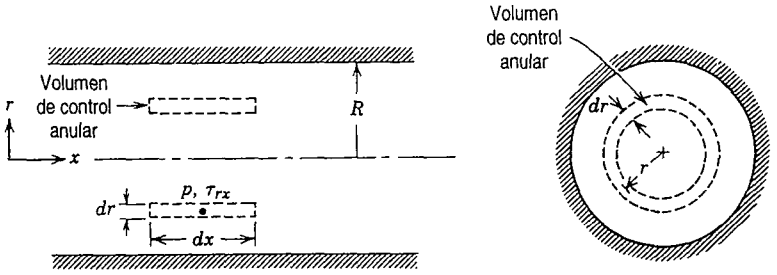


Fig. 8.6 Volumen de control para el análisis de flujo laminar completamente desarrollado en una tubería.

Para un flujo estable completamente desarrollado, la componente x de la ecuación del momento (ecuación 4.19a), cuando se aplica a un volumen de control diferencial, se reduce a

$$F_{S_x} = 0$$

El siguiente paso es sumar las fuerzas que actúan sobre el volumen de control en la dirección x. Sabemos que las fuerzas normales (fuerzas de la presión) actúan sobre los extremos izquierdo y derecho del volumen de control, mientras que las fuerzas tangenciales (fuerzas de corte) actúan sobre las superficies cilíndricas interior y exterior.

Si la presión en el centro del volumen de control anular es p, entonces la fuerza de presión sobre el extremo izquierdo es

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) 2\pi r\, dr$$

La fuerza de presión sobre el extremo derecho es

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) 2\pi r\, dr$$

Si el esfuerzo de corte en el centro del volumen de control anular es τ_{rx}, entonces la fuerza de corte sobre la superficie cilíndrica interior es

$$-\left(\tau_{rx} - \frac{d\tau_{rx}}{dr}\frac{dr}{2}\right) 2\pi\left(r - \frac{dr}{2}\right) dx$$

La fuerza de corte sobre la superficie cilíndrica exterior es

$$\left(\tau_{rx} + \frac{d\tau_{rx}}{dr}\frac{dr}{2}\right) 2\pi\left(r + \frac{dr}{2}\right) dx$$

La suma de las componentes x de fuerza que actúan sobre el volumen de control debe ser cero. Esto conduce a la condición de que

$$-\frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r\, dr\, dx + \tau_{rx}\, 2\pi dr\, dx + \frac{d\tau_{rx}}{dr} 2\pi r\, dr dx = 0$$

Dividiendo esta ecuación entre $2\pi r\, dr\, dx$ y resolviendo para $\partial p/\partial x$, se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tau_{rx}}{r} + \frac{d\tau_{rx}}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} \tag{8.10}$$

Puesto que τ_{rx} es sólo una función de r (ésta es la razón para emplear la derivada total en vez de la parcial de τ_{rx} en las componentes de fuerza anteriores), reconocemos que la ecuación 8.10 se cumple para toda r y x sólo si cada lado de la ecuación es constante. La ecuación 8.10 puede escribirse como

$$\frac{1}{r}\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante}$$

o

$$\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = r\frac{\partial p}{\partial x}$$

Al integrar esta ecuación, obtenemos

$$r\tau_{rx} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + c_1$$

o

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{c_1}{r}$$

Puesto que

$$\tau_{rx} = \mu\frac{du}{dr}$$

entonces

$$\mu\frac{du}{dr} = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{c_1}{r}$$

y

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{c_1}{\mu}\ln r + c_2 \tag{8.11}$$

Necesitamos evaluar las constantes c_1 y c_2. Sin embargo, sólo tenemos la condición de frontera $u = 0$ en $r = R$. ¿Qué tenemos que hacer? Antes de darnos por vencidos, vamos a considerar la solución para el perfil de velocidad dado por la ecuación 8.11. Aunque no conocemos la velocidad en la línea central de la tubería, sabemos por consideraciones físicas que la velocidad debe ser finita en $r = 0$. La única manera para que esto pueda ser cierto es que c_1 sea cero. Por consiguiente, a partir de consideraciones físicas, concluimos que $c_1 = 0$, y por tanto

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + c_2$$

La constante c_2 se evalúa empleando la condición de frontera disponible en la pared de la tubería: en $r = R$, $u = 0$. En consecuencia,

$$0 = \frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + c_2$$

Esto resulta en

$$c_2 = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

y, por consiguiente,

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(r^2 - R^2)$$

o

$$u = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{8.12}$$

Puesto que tenemos el perfil de velocidad, podemos obtener varias características adicionales del flujo.

Distribución de los esfuerzos de corte

El esfuerzo de corte está dado por

$$\tau_{rx} = \mu\frac{du}{dr} = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{8.13a}$$

Flujo volumétrico

$$Q = \int_A \vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_0^R u 2\pi r\, dr = \int_0^R \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(r^2 - R^2)2\pi r\, dr$$

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{8.13b}$$

El flujo como una función de la caída de presión

En flujo completamente desarrollado, el gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, es constante. Por tanto, $\partial p/\partial x = (p_2 - p_1)/L = -\Delta p/L$. La sustitución en la ecuación 8.13b para el flujo volumétrico produce

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left[\frac{-\Delta p}{L}\right] = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L} = \frac{\pi \Delta p D^4}{128\mu L} \tag{8.13c}$$

para flujo laminar en una tubería horizontal.

Velocidad promedio

La velocidad promedio, $\bar{V}$, está dada por

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{8.13d}$$

Punto de velocidad máxima

Para determinar el punto de velocidad máxima, igualamos a cero du/dr y resolvemos para la r correspondiente. De la ecuación 8.12,

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) r$$

En consecuencia,

$$\frac{du}{dr} = 0 \qquad \text{en} \qquad r = 0$$

En $r = 0$,

$$u = u_{\text{máx}} = U = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 2\bar{V} \tag{8.13e}$$

El perfil de velocidad (ecuación 8.12) puede ser escrito en términos de la velocidad máxima (de línea central) como

$$\frac{u}{U} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{8.14}$$

El perfil de velocidad parabólico, dado por la ecuación 8.14 para un flujo laminar completamente desarrollado en tubería, se dibujó en la figura 8.1.

(8.13b)

Por tanto, $\partial p/\partial x =$
ico produce

(8.13c)

(8.13d)

olvemos para la r

(8.13e)

ocidad máxima (de

(8.14)

laminar completa-

EJEMPLO 8.4 Viscosímetro de capilaridad

Es posible construir un viscosímetro sencillo y preciso a partir de un tramo de tubería capilar. Si se miden el flujo y la caída de presión, y se conoce la geometría del tubo, la viscosidad de un líquido newtoniano puede calcularse a partir de la ecuación 8.13c. Una prueba de cierto líquido en viscosímetro capilar brindó los siguientes datos:

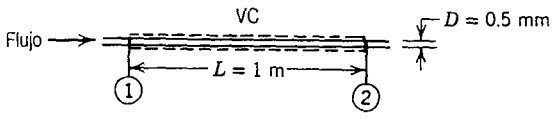
Flujo:	880 mm³/s	Longitud del tubo:	1 m
Diámetro del tubo:	0.50 mm	Caída de presión:	1.0 MPa

Determine la viscosidad del líquido.

PROBLEMA EJEMPLO 8.4

DATOS: El flujo en un viscosímetro capilar. El flujo es $Q = 880$ mm³/s.

ENCUENTRE: La viscosidad del fluido.



SOLUCIÓN: La ecuación 8.13c puede aplicarse.

Ecuación de cálculo:

$$Q = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 \mu L} \tag{8.13c}$$

Suposiciones:
1) Flujo laminar
2) Flujo estable
3) Flujo incompresible
4) Flujo completamente desarrollado
5) Tubo horizontal

Por tanto,

$$\mu = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 L Q} = \frac{\pi}{128} \times 1.0 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times (0.50)^4 \text{ mm}^4 \times \frac{\text{s}}{880 \text{ mm}^3} \times \frac{1}{1 \text{ m}} \times \frac{\text{m}}{10^3 \text{ mm}}$$

$$\mu = 1.74 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2 \qquad \mu$$

Verifique el número de Reynolds. Suponga que la densidad del fluido es similar a la del agua, 999 kg/m³.

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4}{\pi} \times 880 \frac{\text{mm}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{(0.50)^2 \text{ mm}^2} \times \frac{\text{m}}{10^3 \text{ mm}} = 448 \text{ m/s}$$

Por tanto,

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}$$

$$= 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 4.48 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.50 \text{ mm} \times \frac{\text{m}^2}{1.74 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}} \times \frac{\text{m}}{10^3 \text{ mm}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$Re = 1290$$

En consecuencia, puesto que $Re < 2300$, el flujo es laminar.

PARTE B FLUJO EN TUBERÍAS Y DUCTOS

Nuestro principal propósito en esta sección es evaluar los cambios de presión que resultan del flujo incompresible en tuberías, ductos y sistemas de flujo. Los cambios de presión en un sistema de flujo se originan a partir de los cambios en la altura o en la velocidad del flujo (debido a cambios del área) y de la fricción. En un flujo sin fricción, la ecuación de Bernoulli podría utilizarse para explicar los efectos de los cambios en la altura y la velocidad del flujo. De modo que el principal interés en el análisis de flujos reales es explicar la fricción. El efecto de la fricción es reducir la presión, provocando una "pérdida" de presión comparada con el caso ideal del flujo sin fricción. Para simplificar el análisis, las "pérdidas" se dividirán en *pérdidas mayores* (debido a la fricción en porciones de área constante del sistema) y *pérdidas menores* (debidas al flujo a través de válvulas, uniones en T, codos y efectos friccionantes en otras porciones de área no constante del sistema).

Para desarrollar relaciones correspondientes a las pérdidas mayores debidas a la fricción en ductos de área constante, debemos trabajar con flujos completamente desarrollados en los que el perfil de velocidad es invariable en la dirección del flujo. Nuestra atención se centrará en flujos turbulentos, ya que la caída de presión para flujo laminar completamente desarrollado en una tubería puede calcularse a partir de los resultados de la sección 8-3. La caída de presión que ocurre en la entrada de una tubería se tratará como una pérdida menor.

Como los ductos de sección transversal circular son los más comunes en las aplicaciones de ingeniería, el análisis básico se efectuará para geometrías circulares. Los resultados pueden extenderse a otras geometrías introduciendo el diámetro hidráulico, el cual se trata en la sección 8-7.3. (El flujo compresible en ductos se analizará en el capítulo 13.)

8.4 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS DE CORTE EN UN FLUJO COMPLETAMENTE DESARROLLADO EN UNA TUBERÍA

En un flujo estable completamente desarrollado en una tubería horizontal, sea laminar o turbulento, la caída de presión es equilibrada sólo por las fuerzas de corte en la pared de la tubería. Esto puede verse aplicando la ecuación de momento a un volumen de control cilíndrico en el flujo, figura 8.7. La componente x de la ecuación del momento es

Ecuación básica: $\quad = 0(1) = 0(2) \qquad = 0(3, 4)$

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{VC} u\rho \, d\forall + \cancel{\int_{SC}} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposiciones:
1) Tubería horizontal, $F_{B_x} = 0$
2) Flujo estable
3) Flujo incompresible
4) Flujo completamente desarrollado

Por tanto,

$$F_{S_x} = 0$$

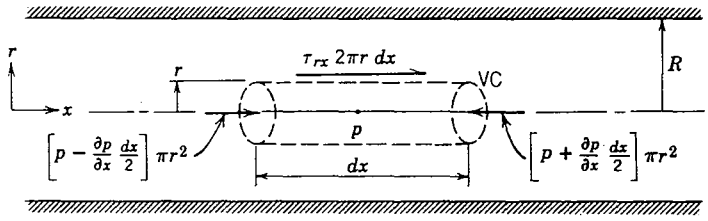


Fig. 8.7 Volumen de control para el análisis de la distribución de esfuerzos de corte en flujo completamente desarrollado en una tubería circular.

Las fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control se muestran en la figura 8.7. La presión en el centro del elemento es p; la presión en cada extremo del elemento se obtiene de un desarrollo de la serie de Taylor de p alrededor del centro del elemento. La fuerza de corte actúa sobre la superficie circunferencial del elemento. La dirección se ha supuesto tal que el esfuerzo de corte sea positivo. Por consiguiente,

$$F_{S_x} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\pi r^2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\pi r^2 + \tau_{rx} 2\pi r\, dx = 0$$

o

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, \pi r^2 + \tau_{rx} 2\pi r\, dx = 0$$

Por tanto,

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{8.15}$$

De esta manera vemos que el esfuerzo de corte sobre el fluido varía linealmente a través de la tubería, desde cero en la línea central hasta un máximo en la pared de la tubería. Si denotamos el esfuerzo de corte de la pared como τ_w, la ecuación 8.15 muestra que en la superficie de la tubería

$$\tau_w = -[\tau_{rx}]_{r=R} = -\frac{R}{2}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{8.16}$$

La ecuación 8.16 relaciona el esfuerzo de corte de la pared con el gradiente de presión axial. La ecuación de momento se empleó para deducirla, pero ninguna suposición se realizó acerca de la relación entre el esfuerzo de corte y el campo de velocidad. En consecuencia, la ecuación 8.16 es aplicable tanto para flujo laminar como para turbulento completamente desarrollado en una tubería.

Si pudiéramos relacionar el campo de los esfuerzos de corte con el campo de velocidad media, sería posible determinar analíticamente la caída de presión a lo largo de un tramo de tubería para un flujo completamente desarrollado. Tal relación entre el campo de esfuerzo y el campo de velocidad media existe para flujo laminar y se empleó en la sección 8-3. La ecuación resultante, ecuación 8.13c fue descubierta primero experimentalmente por Jean Louis Poiseuille, un físico francés, e independientemente por Gotthilf H. L. Hagen, un ingeniero alemán, en la década de 1850 [2].

En flujo turbulento, no existe una relación simple entre el campo de esfuerzos de corte y el campo de velocidad media. Las fluctuaciones de velocidad en flujo turbulento (analizadas en la

sección 2-5.2) intercambian momento entre capas adyacentes de fluido, causando en consecuencia esfuerzos de corte aparentes que deben sumarse a los esfuerzos provocados por los gradientes de velocidad media. Para un flujo completamente desarrollado en canal turbulento, el esfuerzo de corte total está dado por

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\overline{u'v'} \tag{8.17}$$

En la ecuación 8.17, y es la distancia desde la pared de la tubería y $\bar{u}$ es la velocidad media. Como se definió en el capítulo 2, u' y v' son componentes fluctuantes de la velocidad en las dirección x y y, respectivamente, y $\overline{u'v'}$ es el promedio temporal del producto de u' y v'. La noción de un esfuerzo aparente fue introducida primero por Osborne Reynolds; el término $-\rho\overline{u'v'}$ se conoce como el *esfuerzo de Reynolds*.

La división de la ecuación 8.17 entre ρ produce

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{u'v'} \tag{8.18}$$

El término τ/ρ surge con frecuencia en la consideración de flujos turbulentos; tiene dimensiones de velocidad al cuadrado. La cantidad $(\tau_w/\rho)^{1/2}$ recibe el nombre de *velocidad de fricción* y se denota por medio del símbolo u_*. En la figura 8.8, se presentan mediciones experimentales de $\overline{u'v'}$ para flujo turbulento completamente desarrollado en tubería a dos números de Reynolds; $Re_U = UD/\nu$, donde U es la velocidad de la línea central. El esfuerzo de corte turbulento se ha adimensionalizado con el cuadrado de la velocidad de fricción. En la región muy cercana a la pared, la *capa de pared*, es dominante el corte viscoso. El esfuerzo turbulento se reduce a cero en la pared debido a que la condición de no deslizamiento requiere que la velocidad en la pared sea cero. Puesto que el esfuerzo de Reynolds es cero en la pared, entonces de la ecuación 8.17, el esfuerzo de corte de pared está dado por $\tau_w = \mu(d\bar{u}/dy)_{y=0}$. El esfuerzo de corte total varía linealmente a través del radio de la tubería, de modo que el corte turbulento es dominante en la región central de la tubería. En la región entre la capa de pared y la porción central de la tubería son importantes tanto los cortes viscosos como los turbulentos.

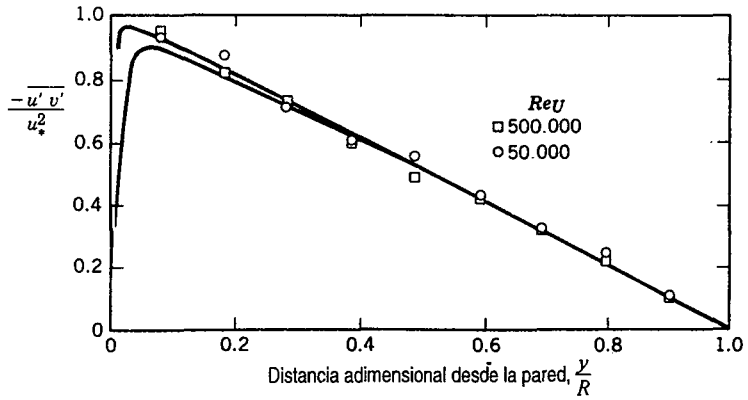


Fig. 8.8 Esfuerzo de corte turbulento (esfuerzo de Reynolds) para flujo turbulento completamente desarrollado en una tubería. (Datos de [3].)

8-5 PERFILES DE VELO COMPLETAMENTE

Excepto para
son por lo ge
corte en flujo
relación univ
en flujos turb
El perfil
lisa se muest
En la re
velocidad m

donde y es l
velocidad m
subcapa vis
En la r
velocidad si

Hay una di
representar

8-5 PERFILES DE VELOCIDAD TURBULENTOS EN UN FLUJO COMPLETAMENTE DESARROLLADO EN UNA TUBERÍA

Excepto para flujos de fluidos muy viscosos en ductos de diámetro pequeño, los flujos internos son por lo general turbulentos. Como se señaló en el análisis de la distribución de esfuerzos de corte en flujos completamente desarrollados de tubería (sección 8-4), en flujo turbulento no hay relación universal entre el campo de esfuerzos y el campo de velocidad media. En consecuencia, en flujos turbulentos estamos obligados a confiar en los datos experimentales.

El perfil de velocidad para flujo turbulento completamente desarrollado a través de una tubería lisa se muestra en la figura 8.9. La gráfica es semilogarítmica; $\bar{u}/u_*$ se grafica contra log (yu_*/ν).

En la región muy cercana a la pared donde es dominante el corte viscoso, el perfil de la velocidad media sigue la relación viscosa lineal

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu} = y^+ \tag{8.19}$$

donde y es la distancia medida desde la pared ($y = R - r$; R es el radio de la tubería) y $\bar{u}$ es la velocidad media. La ecuación 8.19 es válida para $0 \leq y^+ \leq 5$; esta región recibe el nombre de *subcapa viscosa.*

En la región donde tanto el corte viscoso como el turbulento son importantes, el perfil de velocidad sigue la relación logarítmica

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5.0 \tag{8.20}$$

Hay una dispersión considerable en las constantes numéricas de la ecuación 8.20; los valores dados representan promedios sobre muchos experimentos [4]. De la figura 8.9, vemos que el perfil

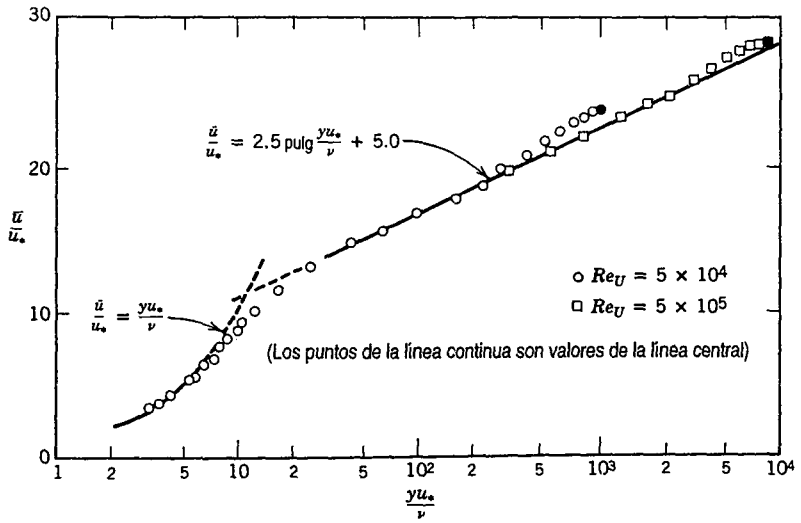


Fig. 8.9 Perfil de velocidad turbulento para flujo completamente desarrollado en una tubería lisa. (Datos de [3].)

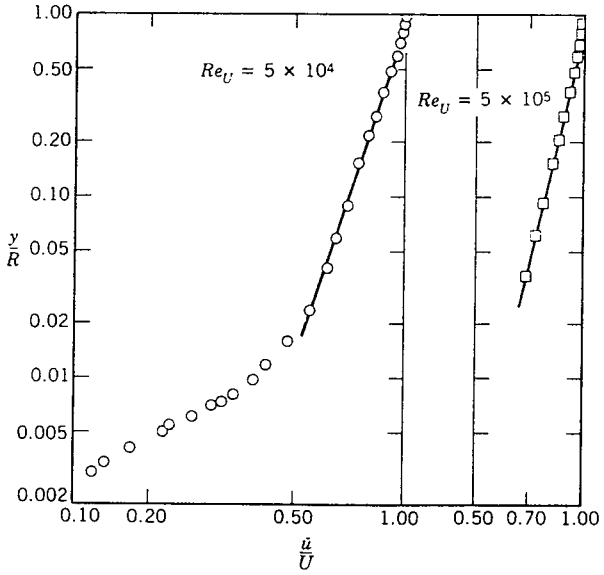


Fig. 8.10 Perfiles de velocidad de la ley exponencial para flujo turbulento completamente desarrollado en una tubería lisa. (Datos de [3].)

logarítmico brinda una aproximación razonablemente buena del perfil de la velocidad más allá de la línea central de la tubería.

En la región central, donde el corte turbulento es dominante, los datos del perfil de velocidad se correlacionan bien por medio de la ecuación

$$\frac{U - \bar{u}}{u_*} = 2.5 \ln \frac{R}{y} \tag{8.21}$$

donde U es la velocidad de la línea central. La ecuación 8.21 es la ley de defecto de velocidad.

El perfil de velocidad para flujo turbulento a través de una tubería lisa puede representarse por medio de la ecuación empírica de la *ley exponencial*

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \tag{8.22}$$

donde el exponente, n, varía con el número de Reynolds. En la figura 8.10 se muestran datos de Laufer [3] sobre una gráfica de ln y/R contra ln $\bar{u}/U$; la pendiente de la línea recta a través de los datos brinda el valor de n.

El perfil de la ley exponencial no es aplicable cerca de la pared ($y/R < 0.04$); el perfil produce un gradiente de velocidad infinito en la pared. Aunque el perfil ajusta los datos cerca de la línea central, fracasa para dar la pendiente cero en la misma. La variación del exponente n en el perfil de la ley exponencial con número de Reynolds (basado en el diámetro de la tubería, D, y la velocidad de la línea central, U) se muestra en la figura 8.11.

Puesto que la velocidad promedio es $\bar{V} = Q/A$, y

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Fig. 8.11 Expone

la razón de la vel
de la ley expone

De la ecuación
se incrementa l
en el número d
6, $\bar{V}/U = 0.79$;
7 para el valor
para flujo turb
En la figu
para flujo lami
el perfil turbul

8.6 CONSIDERACIONE

Hasta ahora e
la ecuación d
ecuación de l
la conservac
información
de la ecuació
incluido un
muestran cc
coinciden c

Ecuación b

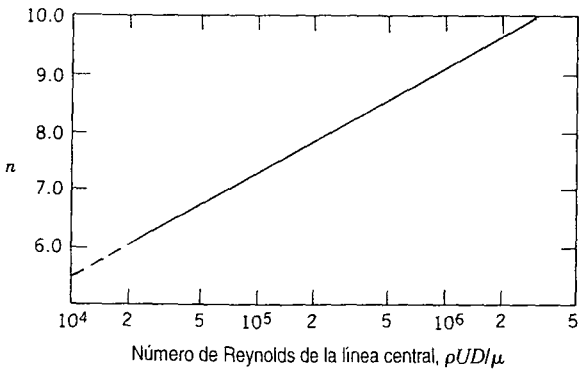


Fig. 8.11 Exponente para el perfil de la ley exponencial. (Adaptado de [5].)

la razón de la velocidad promedio a la velocidad de la línea central puede calcularse para los perfiles de la ley exponencial de la ecuación 8.22. El resultado es

$$\frac{\bar{V}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \tag{8.23}$$

De la ecuación 8.23, vemos que cuando n aumenta (debido al incremento del número de Reynolds) se incrementa la razón de la velocidad promedio a la velocidad de la línea central; con un aumento en el número de Reynolds, el perfil de velocidad se vuelve más obtuso o "más ancho" (para $n = 6$, $\bar{V}/U = 0.79$; para $n = 10$, $\bar{V}/U = 0.87$). Como un valor representativo, con frecuencia se emplea 7 para el valor del exponente; esto da origen al término "un perfil exponencial de un séptimo" para flujo turbulento completamente desarrollado.

En la figura 8.12 se muestran perfiles de velocidad para $n = 6$ y $n = 10$. El perfil parabólico para flujo laminar completamente desarrollado se ha incluido con fines comparativos. Es claro que el perfil turbulento tiene una pendiente mucho más pronunciada cerca de la pared.

8.6 CONSIDERACIONES DE ENERGÍA DE FLUJO EN TUBERÍA

Hasta ahora en nuestra discusión de flujo viscoso, hemos obtenido todos los resultados aplicando la ecuación de momento para un volumen de control. Hemos también utilizado, desde luego, la ecuación de la conservación de la masa para un volumen de control. Nada se ha dicho acerca de la conservación de la energía —la primera ley de la termodinámica—. Es posible obtener información adicional de la naturaleza de las pérdidas de presión en flujos viscosos internos a partir de la ecuación de la energía. Considere, por ejemplo, flujo estable a través del sistema de tuberías, incluido un codo reductor, mostrado en la figura 8.13. Las fronteras del volumen de control se muestran como líneas interrumpidas. Éstas son normales al flujo en las secciones ① y ② y coinciden con la pared interior de la tubería en todas partes.

Ecuación básica:

$$\overset{=0(1)}{\cancel{\dot{Q}}} - \overset{=0(2)}{\cancel{W_s}} - \overset{=0(1)}{\cancel{W_{\text{corte}}}} - \overset{=0(3)}{\cancel{W_{\text{otro}}}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{VC} e\rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

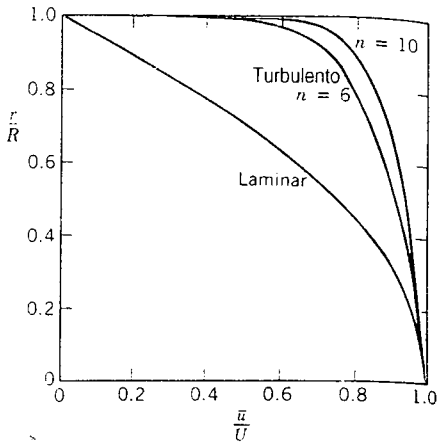


Fig. 8.12 Perfiles de velocidad para flujo en tubería completamente desarrollado.

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Suposiciones: 1) $\dot{W}_s = 0, \dot{W}_{\text{otro}} = 0$
2) $\dot{W}_{\text{corte}} = 0$ (aunque están presentes esfuerzos de corte en las paredes del codo, las velocidades son cero en las mismas)
3) Flujo estable
4) Flujo incompresible
5) Energía interna y presión uniformes a través de las secciones ① y ②

Bajo estas suposiciones, la ecuación de la energía se reduce a

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \int_{A_2} \frac{V_2^2}{2}\rho V_2\, dA_2 - \int_{A_1} \frac{V_1^2}{2}\rho V_1\, dA_1 \tag{8.24}$$

Advierta que no hemos supuesto que la velocidad será uniforme en las secciones ① y ②, pues sabemos que en flujos viscosos la velocidad en una sección no puede ser uniforme. Sin embargo, es conveniente introducir la velocidad promedio en la sección 8.24 de manera que podamos eliminar las integrales. Para hacer esto, definimos un coeficiente de energía cinética.

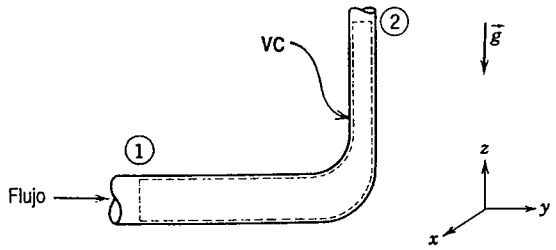
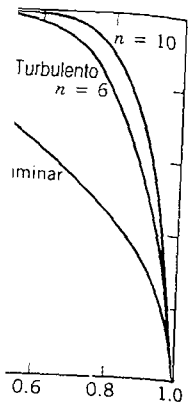


Fig. 8.13 Volumen de control y coordenadas para el análisis de energía del flujo que circula por un codo reductor de 90°.



8-6.1 Coeficiente de energía cinética

El *coeficiente de energía cinética*, α, se define tal que

$$\int_A \frac{V^2}{2}\rho V\, dA = \alpha \int_A \frac{\bar{V}^2}{2}\rho V\, dA = \alpha \dot{m}\frac{\bar{V}^2}{2} \tag{8.25a}$$

o

$$\alpha = \frac{\int_A \rho V^3 dA}{\dot{m}\bar{V}^2} \tag{8.25b}$$

Para flujo laminar en una tubería (perfil de velocidad dado por la ecuación 8.12), $\alpha = 2.0$.

En un flujo de tubería turbulento, el perfil de velocidad es bastante plano, como se muestra en la figura 8.12. Podemos emplear la ecuación 8.25b junto con las ecuaciones 8.22 y 8.23 para determinar α. Al sustituir el perfil de velocidad de la ley exponencial de la ecuación 8.22 en la ecuación 8.25b, obtenemos

$$\alpha = \left[\frac{U}{\bar{V}}\right]^3 \frac{2n^2}{(3+n)(3+2n)} \tag{8.26}$$

El valor de $\bar{V}/U$ se determina a partir de la ecuación 8.23. Para $n = 6$, $\alpha = 1.08$; para $n = 10$, $\alpha = 1.03$. Puesto que el exponente, n, en el perfil de la ley exponencial es una función del número de Reynolds, α varía también con el número de Reynolds. En virtud de que α es razonablemente próximo a uno para un número de Reynolds grande, con frecuencia se asume la unidad para los cálculos de flujo en tubería. Sin embargo, para flujos en desarrollo a números de Reynolds moderados, el cambio de la energía cinética puede ser importante.

8-6.2 Pérdida de carga

Empleando la definición de α, la ecuación de la energía (ecuación 8.24) puede escribirse

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}g(z_2 - z_1) + \dot{m}\left(\frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2} - \frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2}\right)$$

Dividiendo entre la masa del flujo, se obtiene

$$\frac{\delta Q}{dm} = u_2 - u_1 + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + gz_2 - gz_1 + \frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2} - \frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2}$$

Reacomodando esta ecuación, escribimos

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = (u_2 - u_1) - \frac{\delta Q}{dm} \tag{8.27}$$

En la ecuación 8.27, el término

$$\left(\frac{p}{\rho} + \alpha\frac{\bar{V}^2}{2} + gz\right)$$

representa la energía mecánica por unidad de masa en una sección transversal. El término $u_2 - u_1 - \delta Q/dm$ es igual a la diferencia en la energía mecánica por unidad de masa entre las secciones ① y ②. Además, representa la conversión (irreversible) de energía mecánica en la sección ① en energía térmica indeseable ($u_2 - u_1$) y la pérdida de energía vía transferencia de calor ($-\delta Q/dm$). Identificamos este grupo de términos como la pérdida de carga total, h_{l_T}. Por tanto,

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + g z_2\right) = h_{l_T} \tag{8.28}$$

La pérdida de carga tiene dimensiones de energía por unidad de masa [FL/M]; esto equivale a dimensiones de [L^2/t^2].

Si se supusiera el flujo sin fricción, la velocidad en una sección sería uniforme ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) y la ecuación de Bernoulli predeciría pérdida de carga cero.

En flujo incompresible sin fricción, un cambio en la energía interna puede ocurrir sólo a través de transferencia térmica; no hay conversión de energía mecánica ($p/\rho + V^2/2 + gz$) en energía interna. Para flujo viscoso en una tubería, un efecto de la fricción podría ser incrementar la energía interna del flujo, lo que se indica en la ecuación 8.27.

A usted tal vez le sorprenda que la pérdida de energía, h_{l_T}, reciba el nombre de pérdida de "carga". A medida que la ciencia empírica de la hidráulica se desarrollaba durante el siglo XIX, era práctica común expresar el balance de energía en términos de energía por unidad de *peso* del líquido que fluía (por ejemplo, agua) en lugar de la energía por unidad de *masa*, como en la ecuación 8.28. Para obtener dimensiones de energía por unidad de peso, dividimos cada término de la ecuación 8.28 por la aceleración de la gravedad, g. Entonces las dimensiones netas de h_{l_T} son $[(L^2/t^2)(t^2/L)] = [L]$ o pies del líquido que fluye. Puesto que el término pérdida de carga es de uso común, también lo usaremos aquí. Recuerde que su interpretación física es una pérdida en la energía mecánica por unidad de masa del fluido que fluye.

La ecuación 8.28 puede emplearse para calcular la diferencia de presión entre cualesquiera dos puntos en un sistema de tuberías, siempre que la pérdida de carga, h_{l_T}, pueda determinarse. Consideraremos el cálculo de h_{l_T} en la siguiente sección.

8-7 CÁLCULO DE LA PÉRDIDA DE CARGA

La pérdida de carga total, h_{l_T}, se considera como la suma de las pérdidas mayores, h_l, debidas a efectos friccionantes en flujo completamente desarrollado en tubos de área constante, y pérdidas menores, h_{l_m}, debidas a entradas, conectores, cambios de área, etc. En consecuencia, consideramos las pérdidas mayores y menores por separado.

8-7.1 Pérdidas mayores: factor de fricción

El balance de energía, expresado mediante la ecuación 8.28, puede emplearse para evaluar la pérdida de carga mayor. Para flujo completamente desarrollado a través de una tubería de área constante, $h_{l_m} = 0$ y $\alpha_1(\bar{V}_1^2/2) = \alpha_2(\bar{V}_2^2/2)$; la ecuación 8.28 se reduce a

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = g(z_2 - z_1) + h_l \tag{8.29}$$

Si la tubería es horizontal, entonces $z_2 = z_1$ y

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} = h_l \tag{8.30}$$

De tal manera, la pérdida de carga mayor puede expresarse como la pérdida de presión para flujo completamente desarrollado a través de una tubería horizontal de área constante.

Puesto que la pérdida de carga representa la energía convertida por efectos friccionantes de mecánica en térmica, la pérdida de carga para flujo completamente desarrollado en un ducto de área constante depende sólo de los detalles del flujo a través del ducto. La pérdida de carga es independiente de la orientación de la tubería.

a. Flujo laminar

En flujo laminar, la caída de presión puede calcularse analíticamente para flujo completamente desarrollado en una tubería horizontal. Así, de la ecuación 8.13c,

$$\Delta p = \frac{128\mu LQ}{\pi D^4} = \frac{128\mu L\bar{V}(\pi D^2/4)}{\pi D^4} = 32\frac{L}{D}\frac{\mu\bar{V}}{D}$$

La sustitución en la ecuación 8.30 produce

$$h_l = 32\frac{L}{D}\frac{\mu\bar{V}}{\rho D} = \frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}\left(64\frac{\mu}{\rho\bar{V}D}\right) = \left(\frac{64}{Re}\right)\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \tag{8.31}$$

(Pronto veremos la razón por la que se escribe h_l en esta forma.)

b. Flujo turbulento

En flujo turbulento no podemos evaluar la caída de presión analíticamente; debemos recurrir a datos experimentales y ampliar el análisis dimensional para correlacionar dichos datos. En flujo turbulento completamente desarrollado, se sabe que la caída de presión, Δp, debida a la fricción en una tubería horizontal de área constante, depende del diámetro de la tubería, D, la longitud de la misma, L, su rugosidad, e, la velocidad promedio de flujo, $\bar{V}$, la densidad del fluido, ρ, y la viscosidad del fluido, μ. En forma funcional,

$$\Delta p = \Delta p(D, L, e, \bar{V}, \rho, \mu)$$

Aplicamos el análisis dimensional a este problema en el problema ejemplo 7.2. Los resultados fueron una correlación de la forma

$$\frac{\Delta p}{\rho\bar{V}^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho\bar{V}D}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

Reconocemos que $\mu/\rho\bar{V}D = 1/Re$, por lo que podemos escribir

$$\frac{\Delta p}{\rho\bar{V}^2} = \phi\left(Re, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

Al sustituir de la ecuación 8.30, vemos que

$$\frac{h_l}{\bar{V}^2} = \phi\left(Re, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

Aunque el análisis dimensional predice la relación funcional, debemos obtener valores reales experimentalmente.

Los experimentos muestran que la pérdida de carga adimensional es directamente proporcional a L/D. En consecuencia, podemos escribir

$$\frac{h_l}{\bar{V}^2} = \frac{L}{D}\phi_1\left(Re, \frac{e}{D}\right)$$

Puesto que la función, ϕ_1, sigue indeterminada, es permisible introducir una constante en el lado izquierdo de la ecuación anterior. Se añade el número $\frac{1}{2}$ dentro del denominador de manera tal que la pérdida de carga se adimensionalice respecto a la energía cinética por unidad de masa de flujo. Por tanto,

$$\frac{h_l}{\frac{1}{2}\bar{V}^2} = \frac{L}{D}\phi_2\left(Re, \frac{e}{D}\right)$$

La función desconocida, $\phi_2(Re, e/D)$, se define como el *factor de fricción, f,*

$$f \equiv \phi_2\left(Re, \frac{e}{D}\right)$$

y

$$h_l = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \tag{8.32}$$

El factor de fricción[3] se determina experimentalmente. Los resultados, publicados por L. F. Moody [6], se muestran en la figura 8.14.

Para determinar la pérdida de carga en un flujo completamente desarrollado con condiciones conocidas, se evalúa primero el número de Reynolds. La rugosidad relativa, e/D, se obtiene de la figura 8.15. Después, el factor de fricción, f, se lee a partir de la curva apropiada en la figura 8.14, a los valores conocidos de Re y e/D. Por último, la pérdida de carga se encuentra empleando la ecuación 8.32.

Varias características de la figura 8.14 requieren cierto análisis. El factor de fricción para flujo laminar puede obtenerse comparando las ecuaciones 8.31 y 8.32

$$h_l = \left(\frac{64}{Re}\right)\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}$$

[3] El factor de fricción definido por la ecuación 8.32 es el *factor de fricción de Darcy*. El *factor de fricción de Fanning*, empleado con menor frecuencia, se define en el problema 8.74.

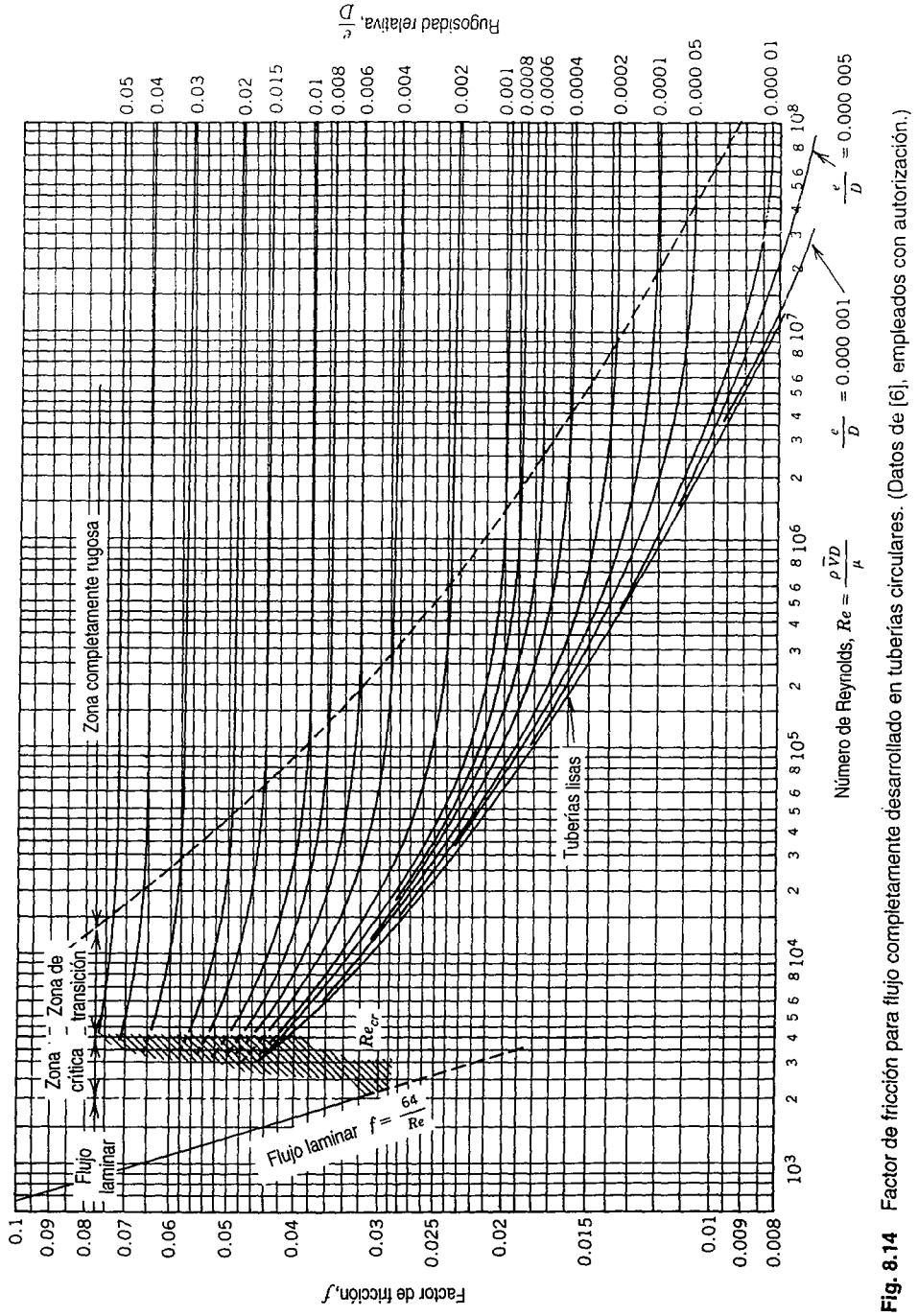


Fig. 8.14 Factor de fricción para flujo completamente desarrollado en tuberías circulares. (Datos de [6], empleados con autorización.)

ener valores reales

:tamente proporcio-

:onstante en el lado
)r de manera tal que
ıd de masa de flujo.

(8.32)

dos por L. F. Moody

ıdo con condiciones
ε/D, se obtiene de la
da en la figura 8.14,
ıentra empleando la

le fricción para flujo

r de fricción de Fanning,

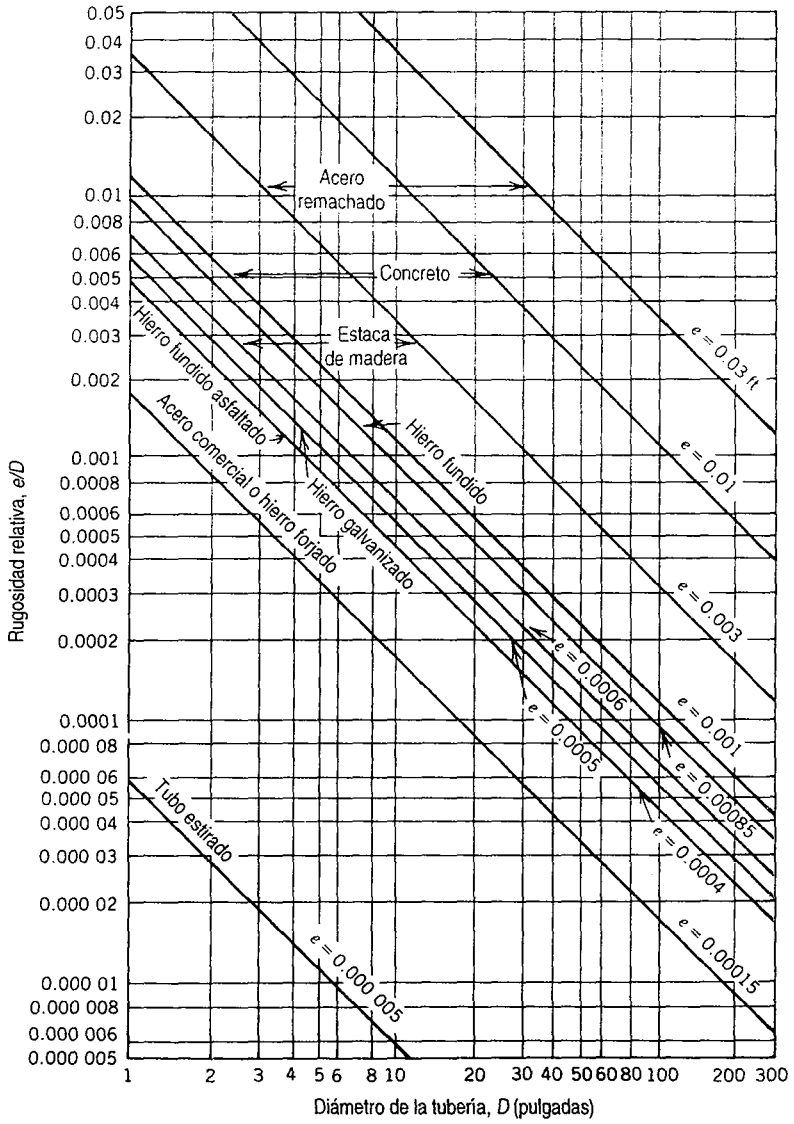
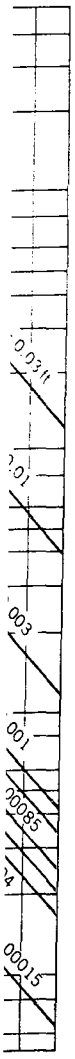


Fig. 8.15 Rugosidad relativa para tuberías de materiales comunes utilizados en la ingeniería. (Datos de [6], utilizados con autorización.)

En consecuencia, para flujo laminar

$$f_{\text{laminar}} = \frac{64}{Re} \tag{8.33}$$

De tal modo, en flujo laminar, el factor de fricción es únicamente función del número de Reynolds; es independiente de la rugosidad. A pesar de que no tomamos en cuenta la rugosidad al deducir la ecuación 8.31, los resultados experimentales comprueban que el factor de fricción es una función sólo del número de Reynolds en flujo laminar.



ıs en la

(8.33)

número de Reynolds;
gosidad al deducir la
cción es una función

El número de Reynolds en una tubería puede cambiarse más fácilmente variando la velocidad promedio de flujo. Si el flujo en una tubería es originalmente laminar, el incrementar la velocidad hasta que se alcanza el número de Reynolds crítico provoca la transición; el flujo laminar da lugar al flujo turbulento. El efecto de la transición sobre el perfil de velocidad se analizó en la sección 8-5. La figura 8.12 muestra que el gradiente de velocidad en la pared del tubo es mucho mayor para flujo turbulento que para flujo laminar. Este cambio en el perfil de velocidad provoca que el esfuerzo de corte de pared se incremente abruptamente, con el mismo efecto sobre el factor de fricción.

Cuando el número de Reynolds se incrementa sobre el valor de transición, el perfil de velocidad continúa hasta llegar a volverse más ancho, como se observó en la sección 8-5; el factor de fricción al principio tiende a seguir la curva de la tubería lisa, a lo largo de la cual el factor de fricción es una función sólo del número de Reynolds. Sin embargo, cuando el número de Reynolds aumenta, el perfil de velocidad continúa haciéndose ancho. El tamaño de la delgada subcapa viscosa cerca de la pared del tubo, disminuye. A medida que los elementos rugosos empiezan a asomarse en esta capa, el efecto de la rugosidad se vuelve importante, y el factor de fricción se convierte en una función tanto del número de Reynolds *como* de la rugosidad relativa.

A números de Reynolds muy grandes, la mayor parte de los elementos rugosos sobre la pared del tubo sobresalen a través de la subcapa viscosa; el arrastre y, por tanto, la pérdida de presión, dependen sólo del tamaño de los elementos rugosos. Lo anterior recibe el nombre de régimen de flujo "completamente rugoso"; el factor de fricción depende sólo de e/D en este régimen.

Para resumir el análisis anterior, vemos que conforme aumenta el número de Reynolds, el factor de fricción disminuye siempre que el flujo permanezca laminar. En la transición, f aumenta abruptamente. En el régimen de flujo turbulento, el factor de fricción disminuye de manera gradual a lo largo de la curva de la tubería lisa y finalmente se nivela en un valor constante para números de Reynolds extremadamente grandes. (La única excepción a estas tendencias es que los factores de fricción para tuberías con $e/D \gtrsim 0.001$ en flujo turbulento, caen arriba de la curva de tubería lisa.)

El análisis de flujo en tubería [5] sugiere que el factor de fricción, f, puede relacionarse con el exponente, n, del perfil de la ley exponencial para flujo de tubería turbulento, por medio de la simple expresión aproximada

$$\frac{1}{n} = \sqrt{f} \tag{8.34}$$

tanto para tuberías lisas como rugosas en el rango $f < 0.1$. Esta relación se empleó junto con los datos de tubería lisa de la figura 8.14 para generar la curva de n contra Re_U presentada en la figura 8.11.

Con el fin de emplear la computadora para resolver problemas, es necesario tener una formulación matemática para el factor de fricción, f, en términos del número de Reynolds, $Re = \bar{V}D/\nu$, y la rugosidad relativa, e/D. La correlación de Blasius para flujo turbulento en tuberías lisas, válida para $Re \leq 10^5$, es

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \tag{8.35}$$

Cuando esta relación se combina con la expresión para el esfuerzo de corte de pared (ecuación 8.16), la expresión para la pérdida de carga (ecuación 8.30) y la definición de factor de fricción

(ecuación 8.32), se obtiene una expresión útil para el esfuerzo de corte de pared

$$\tau_w = 0.03325\rho\bar{V}^2\left(\frac{\nu}{R\bar{V}}\right)^{0.25} \tag{8.36}$$

Esta ecuación se empleará después en nuestro estudio del flujo de capa límite turbulento sobre una capa plana (capítulo 9).

La fórmula más ampliamente utilizada para el factor de fricción es de Colebrook [7],

$$\frac{1}{f^{0.5}} = -2.0\log\left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\,f^{0.5}}\right) \tag{8.37a}$$

La ecuación 8.37a es trascendental, por lo que la iteración es necesaria para evaluar f. Miller [8] sugiere que una sola iteración producirá un resultado dentro del 1 por ciento si la estimación inicial se calcula a partir de

$$f_0 = 0.25\left[\log\left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right]^{-2} \tag{8.37b}$$

La ecuación 8.37 se obtuvo de [9].

La figura 8.15 también necesita cierta explicación. La totalidad de los valores dados de e/D corresponden a tuberías nuevas, en condiciones relativamente buenas. Después de largos periodos de servicio, la corrosión ocurre y, en particular en áreas de agua cruda, los depósitos de cal y la depositación de herrumbre se forman sobre las paredes de la tubería. La corrosión puede debilitar

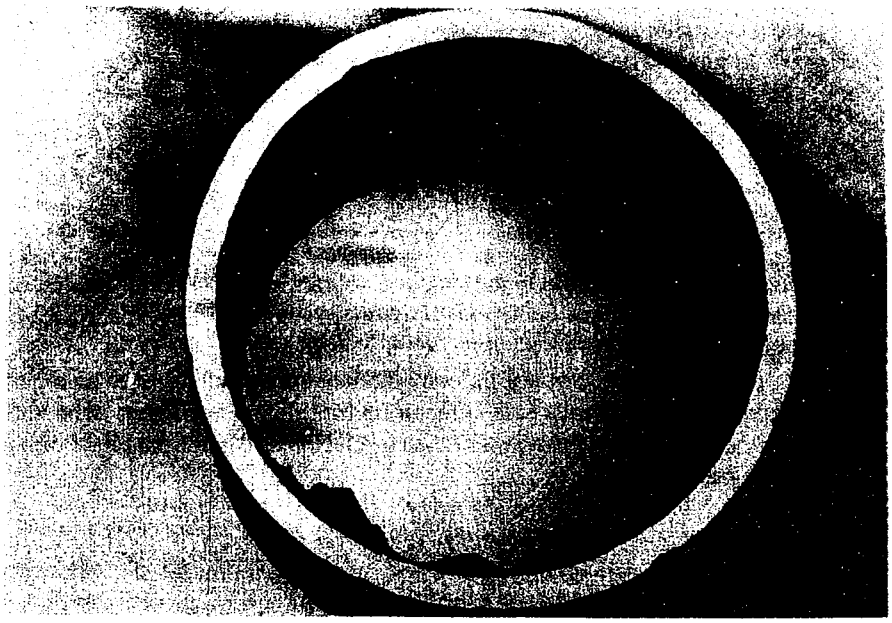


Fig. 8.16 Sección de una tubería removida después de 40 años de servicio como línea de agua, en la que se muestra la formación de incrustaciones.

las tuberías y a la larga conducir a fallas. La formación de depósitos aumenta de manera apreciable la rugosidad de la pared, y también reduce el diámetro efectivo. Estos factores se combinan para provocar que e/D aumente en factores de 2 a 5 en tuberías viejas. Un ejemplo se muestra en la figura 8.16.

Las curvas presentadas en las figuras 8.14 y 8.15 representan valores promedio para datos obtenidos de numerosos experimentos. Las curvas deben considerarse exactas dentro de aproximadamente ± 10 por ciento, lo cual es suficiente para muchos análisis de ingeniería. Si se requiere mayor precisión, deben utilizarse datos de prueba reales.

8-7.2 Pérdidas menores

Puede requerirse que el flujo en un sistema de tubería pase por una variedad de conectores, codos o cambios abruptos en el área. Se encuentran pérdidas de carga adicionales, fundamentalmente como resultado de la separación de flujo. (La energía a la larga es disipada por la mezcla violenta en las zonas separadas.) Estas pérdidas serán menores (de ahí el término *pérdidas menores*) si el sistema de tubería incluye tramos largos de tubería de área constante. La pérdida de carga menor puede expresarse como

$$h_{l_m} = K\frac{\bar{V}^2}{2} \tag{8.38a}$$

donde el *coeficiente de pérdida, K*, debe determinarse experimentalmente para cada situación. La pérdida de carga menor también puede expresarse como

$$h_{l_m} = f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \tag{8.38b}$$

donde L_e es una *longitud equivalente* de tubería recta.

Para flujo a través de codos y conectores de tubería, se encuentra que el coeficiente de pérdida, K, varía con el tamaño de la tubería (diámetro) casi de la misma manera que el factor de fricción, f, para flujo a través de una tubería recta. En consecuencia, la longitud equivalente, L_e/D, tiende a una constante para tamaños diferentes de un tipo de conector determinado.

Los datos experimentales para las pérdidas menores son abundantes, pero se dispersan entre una variedad de fuentes. Diferentes fuentes pueden dar valores distintos para la misma configuración de flujo. Los datos presentados aquí deben considerarse representativos para algunas situaciones que se encuentran comúnmente; en cada caso se identifica la fuente de los datos.

a. Entradas y salidas

Una entrada a una tubería diseñada inadecuadamente puede provocar una pérdida de carga considerable. Si la entrada tiene esquinas pronunciadas, en las mismas ocurre separación de flujo y se forma una *vena contracta*. El fluido debe acelerarse localmente para pasar a través del área de flujo reducida en la vena contracta. Las pérdidas en la energía mecánica provienen de la mezcla no confinada cuando la corriente de flujo se desacelera otra vez para llenar la tubería. En la tabla 8.1 se muestran tres geometrías de entrada básicas. De acuerdo con la tabla es claro que el

Tabla 8.1 Coeficientes de pérdidas menores para entradas de tuberías (Datos de [10].)

Tipo de entrada	Coeficiente de pérdidas menores, K^a
Reentrada	0.78
Borde cuadrado	0.5
Redondeada	r/D | 0.02 | 0.06 | ≥ 0.15 K | 0.28 | 0.15 | 0.04

[a] Basado en $h_{l_m} = K(\bar{V}^2/2)$, donde $\bar{V}$ es la velocidad media en la tubería.

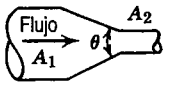
coeficiente de pérdida se reduce significativamente cuando la entrada se redondea incluso ligeramente. Para una entrada bien redondeada ($r/D \geq 0.15$), el coeficiente de pérdida de entrada es casi despreciable. El problema ejemplo 8.9 ilustra un procedimiento para determinar experimentalmente el coeficiente de pérdida para una entrada de tubería.

La energía cinética por unidad de masa, $\alpha\bar{V}^2/2$, se disipa completamente mediante mezcla cuando el flujo se descarga a partir de un ducto en un gran recipiente o cámara de pleno. La situación corresponde a flujo a través de una expansión abrupta con $AR = 0$ (figura 8.17). De tal modo, el coeficiente de pérdida menor es igual a α. Ningún mejoramiento en el coeficiente de pérdida menor para una salida es posible; sin embargo, la adición de un difusor puede reducir $\bar{V}^2/2$ considerablemente (véase el problema ejemplo 8.10).

b. Aumentos y contracciones

Los coeficientes de pérdidas menores para expansiones y contracciones repentinas en ductos circulares, se dan en la figura 8.17. Observe que ambos coeficientes de pérdida se basan en el $\bar{V}^2/2$ más grande. De manera que las pérdidas para una expansión repentina se basan en $\bar{V}_1^2/2$ y aquéllas para una contracción lo hacen en $\bar{V}_2^2/2$.

Tabla 8.2 Coeficientes de pérdidas (K) para contracciones graduales: ductos redondos y rectangulares (Datos de [11].)



	Ángulo de contracción, θ, grados						
A_2/A_1	10	15-40	50-60	90	120	150	180
0.50	0.05	0.05	0.06	0.12	0.18	0.24	0.26
0.25	0.05	0.04	0.07	0.17	0.27	0.35	0.41
0.10	0.05	0.05	0.08	0.19	0.29	0.37	0.43

Nota: Los coeficientes se basan en $h_{l_m} = K(\bar{V}_2^2/2)$.

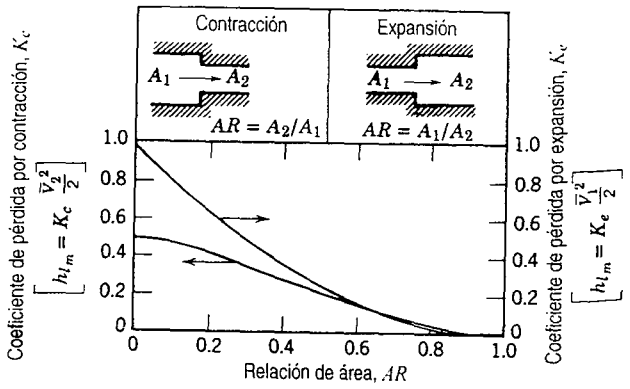


Fig. 8.17 Coeficientes de pérdidas para flujo a través de cambios súbitos de área. (Datos de [1].)

Las pérdidas debidas al cambio de área pueden reducirse un poco instalando una tobera o difusor entre las dos secciones de una tubería recta. En la tabla 8.2 se presentan datos para toberas.

Las pérdidas en difusores dependen de diversas variables geométricas y de flujo. Los datos de difusor más comunes se presentan en términos de un coeficiente de recuperación de presión, C_p, definido como la razón entre el aumento de la presión estática y la presión dinámica de entrada,

$$C_p \equiv \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho \bar{V}_1^2} \tag{8.39}$$

En la figura 8.18 se presentan, como una función de geometría, datos para difusores cónicos con flujo turbulento completamente desarrollado en tubería en la entrada. Del mapa de rendimiento de la figura 8.18, vemos que pueden definirse geometrías de difusor óptimas. Para cada razón de área, AR, hay un N/R_1 arriba del cual no se esperaría aumento en la recuperación de presión; esto es en particular claro para $AR < 1.40$ en la figura 8.18. De manera similar, para una longitud adimensional determinada, N/R_1, hay una razón de área óptima para una recuperación de presión máxima.

En la literatura técnica es posible encontrar mapas de rendimiento para difusores de pared plana y anulares [13] y para difusores radiales [14].

La recuperación de presión del difusor es en esencia independiente del número de Reynolds para números de Reynolds de entrada mayores que 7.5×10^4 [15]. La recuperación de presión de difusor con flujo de entrada uniforme es un poco mejor que la del flujo de entrada completamente desarrollado. Los mapas de rendimiento correspondientes a difusores de pared plana, cónicos y anulares para una variedad de condiciones de flujo de entrada se presentan en [16].

Puesto que la presión estática aumenta en la dirección de flujo en un difusor, el flujo puede separarse de las paredes. Para ciertas geometrías se perturba el flujo de salida; algunas veces ocurren fluctuaciones. El comportamiento del régimen de flujo de difusores de pared plana se ilustra bien en la película de la NCFMF, *Flow Visualization* (S. J. Kline, director). Para difusores de gran ángulo, es posible utilizar álabes o divisores para suprimir la pérdida de velocidad y mejorar la recuperación de presión [17].

La definición de C_p puede relacionarse con la pérdida de carga. Si la gravedad se desprecia, y $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$, la ecuación 8.28 se reduce a

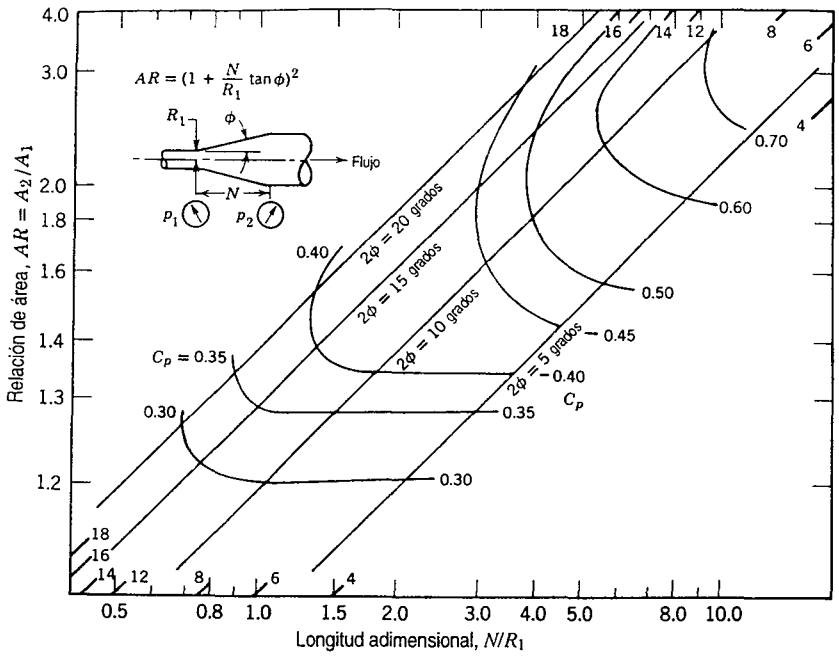


Fig. 8.18 Recuperación de presión en difusores cónicos con flujo turbulento completamente desarrollado en tubería en la entrada. (Datos de [12].)

$$\left[\frac{p_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_1^2}{2}\right] - \left[\frac{p^2}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2}\right] = h_{l_T} = h_{l_m}$$

Por tanto,

$$h_{l_m} = \frac{\bar{V}_1^2}{2} - \frac{\bar{V}_2^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

$$h_{l_m} = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[\left(1 - \frac{\bar{V}_2^2}{\bar{V}_1^2}\right) - \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2}\right] = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[\left(1 - \frac{\bar{V}_2^2}{\bar{V}_1^2}\right) - C_p\right]$$

De la continuidad, $A_1\bar{V}_1 = A_2\bar{V}_2$, por lo que

$$h_{l_m} = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - C_p\right]$$

o

$$h_{l_m} = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{(AR)^2}\right) - C_p\right] \tag{8.40}$$

Para un flujo sin fricción, $h_{l_m} = 0$; en este caso, la ecuación 8.40 brinda el coeficiente de recuperación de presión ideal, denotado por C_{p_i}, como

$$C_{p_i} = 1 - \frac{1}{(AR)^2} \tag{8.41}$$

Este mismo re
de continuida
flujo a través

c. Codos

La pérdida d
una sección
secundario,[4]
tubería recta
indica en la
resistencia c

Debido
emplean co
codos angu

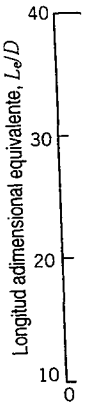


Fig. 8.

d. Vál

Las pérd
en térmi
datos re

[4] Los fluj

Este mismo resultado puede obtenerse aplicando la ecuación de Bernoulli, junto con la ecuación de continuidad, a flujo sin fricción a través del difusor. En consecuencia, la pérdida de carga para flujo a través de un difusor real puede escribirse

$$h_{l_m} = (C_{p_2} - C_p)\frac{\bar{V}_1^2}{2} \tag{8.42}$$

c. Codos de tubería

La pérdida de carga de un codo es mayor que para flujo completamente desarrollado a través de una sección recta de igual longitud. La pérdida adicional es principalmente el resultado de flujo secundario,[4] y se representa de manera más conveniente por medio de una longitud equivalente de tubería recta. La longitud equivalente depende del radio de curvatura relativo del codo, como se indica en la figura 8.19*a* para codos de 90°. Un procedimiento aproximado para calcular la resistencia de codos con otros ángulos de giro se proporciona en [10].

Debido a que son simples y poco costosos para instalarse en el campo, los codos angulares se emplean con frecuencia, en especial en sistemas de grandes tuberías. Los datos de diseño para codos angulares se presentan en la figura 8.19*b*.

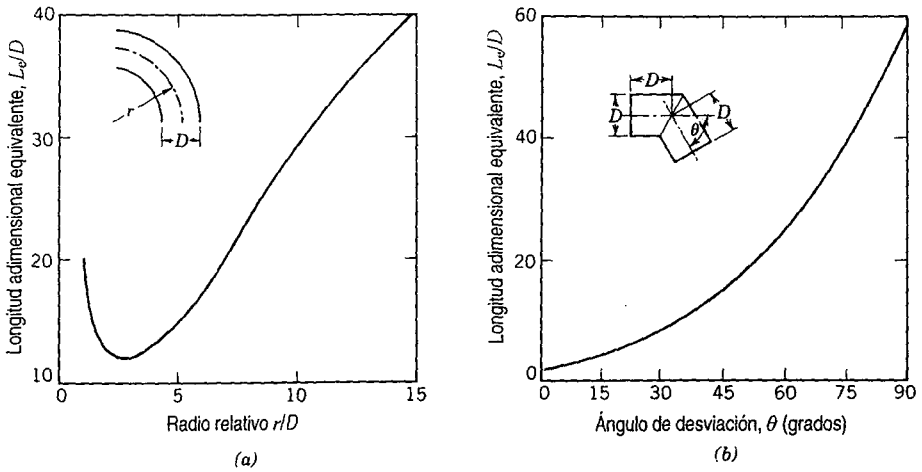


Fig. 8.19 Resistencia total representativa (L_e/D) para *a*) codos de tubería de 90° y con bridas, y *b*) codos angulares. (Datos de [10].)

d. Válvulas y conectores

Las pérdidas correspondientes al flujo a través de válvulas y conectores también pueden expresarse en términos de una longitud equivalente de tubería recta. En la tabla 8.3 se proporcionan algunos datos representativos.

[4] Los flujos secundarios se presentan en la película de la NCFMF, *Secondary Flow*, E. S. Taylor, director.

Tabla 8.3 Longitudes equivalentes adimensionales representativas (L_e/D) para válvulas y accesorios (Datos de [10].)

Tipo de accesorio	Longitud equivalente,[a] L_e/D
Válvulas (completamente abiertas)	
Válvula de compuerta	8
Válvula de globo	340
Válvula de ángulo	150
Válvula de bola	3
Válvula de retención: de bola	600
: de disco	55
Válvula de pie con filtro: disco con resortes	420
: disco articulado	75
Codo estándar: 90°	30
: 45°	16
Codo de retorno, 180°	50
T estándar: flujo directo	20
: flujo derivado	60

[a]Basado en $h_{l_m} = f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}$.

Todas las resistencias se dan para válvulas completamente abiertas; las pérdidas se incrementan de manera marcada cuando las válvulas están parcialmente abiertas. El diseño de éstas varía en forma significativa entre los fabricantes. Siempre que es posible, deben utilizarse las resistencias que surten los proveedores si se requieren resultados precisos.

Los conectores en un sistema de tuberías pueden tener conexiones de cuerda, brida o de soldadura. Para diámetros pequeños, las uniones de cuerda son las más comunes; los sistemas de tuberías grandes con frecuencia cuentan con uniones de brida o soldadas.

En la práctica, la inserción de pérdidas por conectores y válvulas varía considerablemente, dependiendo del cuidado que se tuvo en la fabricación del sistema de tuberías. Si se dejan rebabas de secciones de tubería cortada, éstas provocarán obstrucciones locales de flujo, lo cual incrementa las pérdidas de manera apreciable.

Aunque las pérdidas analizadas en esta sección se denominaron "pérdidas menores", pueden llegar a ser una gran fracción de las pérdidas totales del sistema. Es por ello que un sistema para el cual se van a efectuar cálculos debe verificarse con todo cuidado para asegurar que todas las pérdidas se han identificado y que sus magnitudes se han estimado. Si los cálculos se realizan cuidadosamente, los resultados serán satisfactorios en cuanto a la exactitud del trabajo de ingeniería. Usted puede esperar predecir pérdidas reales dentro de un ± 10 por ciento.

8-7.3 Ductos no circulares

Las correlaciones empíricas para el flujo de tubería también pueden emplearse en cálculos que implican ductos no circulares, siempre que sus secciones transversales no sean demasiado exageradas. Estos ductos de sección transversal cuadrada o rectangular pueden tratarse si la razón de la altura al ancho es aproximadamente menor que 3 o 4.

Las correlaciones para el flujo de tubería turbulento se han extendido para emplearse con geometrías no circulares introduciendo el *diámetro hidráulico*, definido como

$$D_h \equiv \frac{4A}{P} \tag{8.43}$$

en lugar del diámetro, D. En la ecuación 8.43, A es el área de la sección transversal y P es el *perímetro mojado*, la longitud de la pared en contacto con el fluido que circula en cualquier sección transversal. El factor 4 se introduce de manera que el diámetro hidráulico sea igual al diámetro del ducto para una geometría circular. En un ducto circular, $A = \pi D^2/4$ y $P = \pi D$, de modo que

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4\left(\frac{\pi}{4}\right)D^2}{\pi D} = D$$

Para un ducto rectangular de ancho b y altura h, $A = bh$ y $P = 2(b + h)$, por lo que

$$D_h = \frac{4bh}{2(b+h)}$$

Si la *proporción dimensional, ar,* se define como $ar = h/b$, entonces

$$D_h = \frac{2h}{1+ar}$$

para ductos rectangulares. Para un ducto cuadrado, $ar = 1$ y $D_h = h$.

Según se observa, el concepto del diámetro hidráulico puede aplicarse en el intervalo aproximado de $\frac{1}{4} < ar < 4$. En estas condiciones, las correlaciones para el flujo de tubería brindan resultados de precisión aceptable para ductos rectangulares; como la fabricación de tales ductos es fácil y barata a partir de hojas metálicas, se usan comúnmente en aplicaciones de aire acondicionado, calefacción y ventilación. Se dispone de una gran cantidad de datos acerca de pérdidas para flujo de aire (por ejemplo, véanse [11, 18]).

Las pérdidas debidas a flujos secundarios aumentan rápidamente en geometrías más extremas, por lo que las correlaciones no son aplicables a ductos anchos y planos o a ductos triangulares o de otras formas irregulares. Deben emplearse datos experimentales cuando se requiere información de diseño precisa en situaciones específicas.

8-8 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FLUJO EN TUBERÍA

Una vez que la pérdida de carga total se ha calculado empleando los métodos de la sección 8-7, los problemas de flujo en tubería pueden resolverse empleando la ecuación de energía, ecuación 8.28. Aunque se emplean las mismas técnicas básicas, incluso para sistemas de tuberías complejos, vamos a considerar primero problemas de flujo en tubería de una sola trayectoria.

8-8.1 Sistemas de una sola trayectoria

La ecuación 8.28 es la ecuación para el cálculo en sistemas de tuberías. La caída de presión a través de un sistema de tuberías es una función del flujo, el cambio en la altura y la pérdida de la carga

total. Esta última se compone de pérdidas mayores debidas a la fricción en secciones de área constante (ecuación 8.32) y pérdidas menores debidas a conectores, cambios de área, etc. (ecuaciones 8.38). La caída de presión podría escribirse en la forma funcional

$$\Delta p = \phi_3(L,\ Q,\ D,\ e,\ \Delta z,\ \text{configuración del sistema},\ \rho,\ \mu)$$

Las propiedades del fluido son constantes en el flujo de fluidos incompresibles en tuberías. La rugosidad, el cambio de altura y la configuración del sistema dependen de la disposición del sistema de tuberías. Una vez que éstos se han fijado (para un sistema y fluido dados), la dependencia se reduce a

$$\Delta p = \phi_4(L,\ Q,\ D) \tag{8.44}$$

La ecuación 8.44 relaciona cuatro variables. Cualquiera de ellas puede ser la cantidad desconocida en una situación de flujo práctica. En consecuencia, son posibles cuatro casos generales:

a) L, Q y D conocidas, Δp desconocida.
b) Δp, Q y D conocidas, L desconocida.
c) Δp, L y D conocidas, Q desconocida.
d) Δp, L y Q conocidas, D desconocida.

Los casos *a*) y *b*) pueden resolverse directamente aplicando las ecuaciones de continuidad y energía, y empleando los datos de pérdidas de la sección 8-7. Las soluciones para los casos *c*) y *d*) hacen uso de las mismas ecuaciones y datos, pero requieren iteración. Cada caso se estudia a continuación y se ilustra mediante un ejemplo.

a. *L*, *Q* y *D* conocidas, Δp desconocida

Un factor de fricción se obtiene del diagrama de Moody o de ecuaciones empíricas empleando los valores de Re y e/D calculados a partir de los datos proporcionados. La pérdida de carga total se calcula con base en las ecuaciones 8.32 y 8.38. La ecuación 8.28 se emplea después para evaluar la caída de presión, Δp. El procedimiento se ilustra en el problema ejemplo 8.5.

b. Δp, *Q* y *D* conocidas, *L* desconocida

La pérdida de carga total se calcula a partir de la ecuación 8.28. Un factor de fricción se obtiene del diagrama de Moody o de ecuaciones empíricas empleando los valores de Re y e/D calculados con base en los datos proporcionados. La longitud desconocida se determina resolviendo la ecuación 8.32. El procedimiento se ilustra en el problema ejemplo 8.6.

c. Δp, *L* y *D* conocidas, *Q* desconocida

La ecuación 8.28 se combina con las ecuaciones de definición correspondientes a la pérdida de carga; el resultado es una expresión para $\bar{V}$ (o Q) en términos del factor de fricción, f. La mayor

parte de los flujos de tubería de interés para la ingeniería tienen números de Reynolds relativamente grandes. Por consiguiente, aun cuando el número de Reynolds (y, por tanto, f) no puedan calcularse debido a que no se conoce Q, una primera buena suposición para el factor de fricción se toma de la región completamente rugosa de la figura 8.14. Empleando el valor de f supuesto, se calcula una primera aproximación para V. El número de Reynolds se calcula para esta V y se obtienen un nuevo valor para f y una segunda aproximación para V. Puesto que f es más bien una función que depende poco del número de Reynolds, es raro que se requieran más de dos iteraciones para la convergencia. Un flujo de este tipo se evalúa en el problema ejemplo 8.7.

d. Δp, L y Q conocidas, D desconocida

Cuando un dispositivo que maneja un fluido es disponible y se conoce la geometría del sistema de tuberías, el problema es determinar el tamaño de tubería más pequeño (y, consecuentemente, menos costoso) que pueda entregar el flujo deseado. Puesto que el diámetro de la tubería se desconoce, ni el número de Reynolds ni la rugosidad relativa pueden calcularse directamente y, por lo tanto, se requiere una solución iterativa. Un flujo de este tipo se ilustra en el problema ejemplo 8.8.

Los cálculos se inician suponiendo un diámetro de tubería de ensayo. Después se calculan el número de Reynolds y la rugosidad relativa utilizando la D supuesta. Se obtiene un factor de fricción de la figura 8.14. Luego se calcula la pérdida de carga a partir de las ecuaciones 8.32 y 8.38, y se resuelve la ecuación 8.28 para la caída de presión. La Δp de ensayo que resulta se compara con el requerimiento del sistema.

Si la Δp de ensayo es demasiado grande, se repiten los cálculos para un valor de D supuesto más grande. Si la Δp de ensayo es menor que el criterio, debe verificarse una D más pequeña.

Al elegir el tamaño de la tubería, es lógico trabajar con diámetros que son disponibles comercialmente. Las tuberías se fabrican en un número limitado de tamaños estándar. Algunos datos para los tamaños de tubería estándar se proporcionan en la tabla 8.4. Para datos de tuberías de resistencia extra o doble, consulte un manual, por ejemplo, [10]. Tuberías mayores de 12 pulg de diámetro nominal se producen en múltiplos de 2 pulg hasta un diámetro nominal de 36 pulg y en múltiplos de 6 pulg para tamaños aún mayores.

Tabla 8.4 *Tamaños estándar para tubería de acero al carbón, acero aleado y acero inoxidable* (Datos de [10].)

Tam. de tubería nominal (pulg)	Diám. interior (pulg)	Tam. de tubería nominal (pulg)	Diám. interior (pulg)
$\frac{1}{8}$	0.269	$2\frac{1}{2}$	2.469
$\frac{1}{4}$	0.364	3	3.068
$\frac{3}{8}$	0.493	4	4.026
$\frac{1}{2}$	0.622	5	5.047
$\frac{3}{4}$	0.824	6	6.065
1	1.049	8	7.981
$1\frac{1}{2}$	1.610	10	10.020
2	2.067	12	12.000

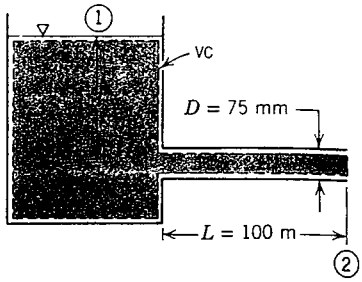
EJEMPLO 8.5 Flujo de tubería proveniente de un depósito: caída de presión desconocida

Una tubería horizontal y lisa de 100 m de largo se conecta a un gran depósito. ¿Qué profundidad, d, debe mantenerse en el depósito para producir un flujo de 0.0084 m³/s de agua? El diámetro interior de la tubería lisa es de 75 mm. La entrada es de borde cuadrado y el agua se descarga a la atmósfera.

PROBLEMA EJEMPLO 8.5

DATOS: Agua que fluye a 0.0084 m³/s a través de una tubería de 75 mm de diámetro con $L = 100$ m, conectada a un depósito de nivel constante. Entrada de borde cuadrado.

ENCUENTRE: La profundidad del depósito, d, para mantener el flujo.



SOLUCIÓN: Se calcula la ecuación:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_{l_T}=h_l+h_{l_m} \tag{8.28}$$

donde

$$h_l=f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \qquad \text{y} \qquad h_{l_m}=K\frac{\bar{V}^2}{2}$$

Para el problema dado, $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $\bar{V}_1 \simeq 0$, $\bar{V}_2 = \bar{V}$ y $\alpha_2 \simeq 1.0$. Suponiendo $z_2 = 0$, entonces $z_1 = d$. La simplificación de la ecuación 8.28 da como resultado

$$gd-\frac{\bar{V}^2}{2}=f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}+K\frac{\bar{V}^2}{2}$$

Entonces

$$d=\frac{1}{g}\left[f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}+K\frac{\bar{V}^2}{2}+\frac{\bar{V}^2}{2}\right]=\frac{\bar{V}^2}{2g}\left[f\frac{L}{D}+K+1\right]$$

Como $\bar{V}=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi D^2}$, entonces

$$d=\frac{8Q^2}{\pi^2D^4g}\left[f\frac{L}{D}+K+1\right]$$

Suponiendo agua a 20 C, $\rho = 999$ kg/m³ y $\mu = 1.0 \times 10^{-3}$ kg/m · s. Por tanto,

$$Re=\frac{\rho\bar{V}D}{\mu}=\frac{4\rho q}{\pi\mu D}$$

$$Re=\frac{4}{\pi}\times\frac{999\ \text{kg}}{\text{m}^3}\times\frac{0.0084\ \text{m}^3}{\text{s}}\times\frac{\text{m}\cdot\text{s}}{1.0\times10^{-3}\ \text{kg}}\times\frac{1}{0.075\ \text{m}}=1.42\times10^5$$

Para tubería lisa, de la figura 8.14, $f = 0.0170$. De la tabla 8.1, $K = 0.5$. Entonces,

$$d = \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g}\left[f\frac{L}{D} + K + 1\right]$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \times (0.0084)^2\ \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2} \times \frac{1}{(0.075)^4\ \text{m}^4} \times \frac{\text{s}^2}{9.81\ \text{m}}\left[(0.0170)\frac{100\ \text{m}}{0.075\ \text{m}} + 0.5 + 1\right]$$

$$d = 4.45\ \text{m} \longleftarrow d$$

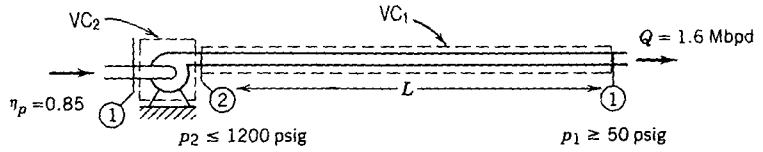
Este problema ilustra el método para calcular la pérdida de carga total.

EJEMPLO 8.6 Flujo en una línea de tubería: longitud desconocida

Petróleo crudo fluye a través de una sección nivelada del oleoducto de Alaska a razón de 1.6 millones de barriles diarios (un barril = 42 gal). El diámetro interior de la tubería es de 48 pulg; su rugosidad es equivalente a la de hierro galvanizado. La máxima presión permisible es 1200 psi; la mínima presión que se requiere para mantener los gases disueltos en solución en el petróleo crudo es 50 psi. El petróleo crudo tiene una DR = 0.93; su viscosidad a la temperatura de bombeo de 140 F es $\mu = 3.5 \times 10^{-4}$ lbf · s/pies^2. En estas condiciones, determine el máximo espaciamiento posible entre las estaciones de bombeo. Si la eficiencia de la bomba es 85 por ciento, determine la potencia que debe alimentarse en cada estación de bombeo.

PROBLEMA EJEMPLO 8.6

DATOS: Flujo de petróleo crudo a través de la sección horizontal del oleoducto de Alaska.



$D = 48$ pulg (rugosidad de hierro galvanizado), DR = 0.93, $\mu = 3.5 \times 10^{-4}$ lbf · s/pie^2

ENCUENTRE: *a*) El espaciamiento máximo, L.
b) La potencia necesaria en cada estación de bombeo.

SOLUCIÓN: Aplique la ecuación de energía para flujo estable e incompresible en tubería.

Ecuación de cálculo:

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) = h_{l_T}$$

$$= 0 \quad (3)$$

$$h_{l_T} = h_l + h_{l_m} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} + K\frac{\bar{V}^2}{2}$$

401

uposiciones: 1) $\alpha_1 \bar{V}_1^2 = \alpha_2 \bar{V}_2^2$
2) Tubería horizontal, $z_1 = z_2$
3) Se desprecian las pérdidas menores
4) Viscosidad constante

Entonces, empleando VC_1

$$\Delta p = p_2 - p_1 = f \frac{L}{D} \rho \frac{\bar{V}^2}{2} \quad \text{o} \quad L = \frac{2D}{f} \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} \quad \text{donde } f = f(Re, e/D)$$

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = 1.6 \times 10^6 \frac{\text{barril}}{\text{día}} \times \frac{4}{\pi (4)^2 \text{ pie}^2} \times 42 \frac{\text{gal}}{\text{barril}} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48 \text{ gal}} \times \frac{\text{día}}{24 \text{ hr}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \text{ s}}$$

$$\bar{V} = 8.27 \text{ pie/s}$$

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = (0.93)\ 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times 8.27 \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times 4 \text{ pie} \times \frac{\text{pie}^2}{3.5 \times 10^{-4} \text{ lbf} \cdot \text{s}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$$Re = 1.71 \times 10^5$$

De la figura 8.15, $e/D = 0.00012$ y de la figura 8.14, $f \simeq 0.017$. Por tanto,

$$L = \frac{2}{0.017} \times 4 \text{ pie} \times (1200 - 50) \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\text{pie}^3}{(0.93)\ 1.94 \text{ slug}} \times \frac{\text{s}^2}{(8.27)^2 \text{ pie}^2}$$

$$\times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{pie}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2} = 6.32 \times 10^5 \text{ pie}$$

$L = 632\,000$ pie (120 mi) L

Para encontrar la potencia de bombeo, aplique la primera ley de la termodinámica a VC_2, a través de la bomba en las secciones ① y ②.

Ecuación básica: $= 0(1)$ $= 0(2)$ $= 0(3)$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, d\forall + \int_{SC} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) $\bar{V}_2 = \bar{V}_1$
3) $z_2 = z_1$
4) Flujo uniforme en cada sección

Por consiguiente

$$\dot{W}_{en} = \dot{W}_s = \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \{\dot{m}\} + \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \{-\dot{m}\} - \dot{Q}$$

$$\dot{W}_{en} = \left(\frac{p_2 - p_2}{\rho} \right) \dot{m} + (u_2 - u_1)\dot{m} - \dot{Q} = \left(\frac{p_2 - p_2}{\rho} \right) \dot{m} + \text{pérdidas}$$

Las pérdidas se determinan en términos de la eficiencia de la bomba, η.

$$\text{Pérdidas} = (1 - \eta)\, \dot{W}_{en}$$

En consecuencia,

$\dot{W}_{en} =$

$=$

$\dot{W}_{en} =$

Este problem
que la potenc
la bomba, se
definición d

EJEMPLO 8.

Un sistema de
de 80 pies de a
con una antigü
menores pued
(gpm) a través

PROBLEM

DATOS:

ENCUEN

SOLUCI

Ecuacione

Suposici

Entonce

En consecuencia,

$$\dot{W}_{en} = \frac{1}{\eta}\frac{(p_2 - p_1)}{\rho}\dot{m} = \frac{1}{\eta}(p_2 - p_1)\bar{V}A = \frac{\bar{V}A\Delta p}{\eta}$$

$$= \frac{1}{0.85} \times 8.27\ \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4}(4)^2\ \text{pie}^2 \times 1150\ \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times 144\ \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550\ \text{pie} \cdot \text{lbf}}$$

$\dot{W}_{en} = 36\ 800$ hp (potencia suministrada) ← $\dot{W}_{necesario}$

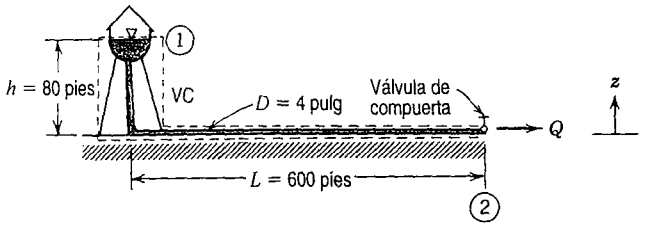
Este problema ejemplifica el método para resolver la longitud desconocida de la tubería. Advierta que la potencia de bombeo teórica, obtenida a partir de la aplicación de la primera ley a través de la bomba se reduce a $\dot{W} = Q\,\Delta p$. La potencia real necesaria puede determinarse a partir de la definición de eficiencia, $\eta = \dot{W}_{teórica}/\dot{W}_{real}$

EJEMPLO 8.7 Flujo de una torre de agua: flujo desconocido

Un sistema de protección contra incendios se alimenta de una torre de agua y de un tubo vertical de 80 pies de altura. La tubería más larga en el sistema es de 600 pies y está hecha de hierro fundido con una antigüedad cercana a 20 años. La tubería contiene una válvula de compuerta; otras pérdidas menores pueden despreciarse. El diámetro de la tubería es de 4 pulg. Determine el flujo máximo (gpm) a través de esta tubería.

PROBLEMA EJEMPLO 8.7

DATOS: El sistema de protección contra incendios que se muestra.



ENCUENTRE: Q, gpm.

SOLUCIÓN:

Ecuaciones de cálculo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = h_{l_T} \qquad (8.28)$$

($\bar{V}_1 \approx 0$ (2))

$$h_{l_T} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_2^2}{2} + h_{l_m} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_2^2}{2} + f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

Suposiciones: 1) $p_1 = p_2 = p_{atm}$

2) $\bar{V}_1 \approx 0$, y $\alpha_2 \approx 1.0$

Entonces la ecuación 8.28 puede escribirse como

$$g(z_1 - z_2) - \frac{\bar{V}_2^2}{2} = h_{l_T} = f\left(\frac{L}{D} + \frac{L_e}{D}\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

Para una válvula de compuerta completamente abierta, de la tabla 8.3, $L_e/D = 8$. De tal modo,

$$g(z_1 - z_2) = \frac{\bar{V}_2^2}{2}\left[f\left(\frac{L}{D} + 8\right) + 1\right]$$

Resolviendo para $\bar{V}_2$, obtenemos

$$\bar{V}_2 = \left[\frac{2g(z_1 - z_2)}{f(L/D + 8) + 1}\right]^{1/2}$$

Para ser conservadores, suponga que la tubería vertical es del mismo diámetro que la tubería horizontal. Por tanto,

$$\frac{L}{D} = \frac{600 \text{ pies} + 80 \text{ pies}}{4 \text{ pulg}} \times \frac{12 \text{ pulg}}{\text{pie}} = 2040$$

Además

$$z_1 - z_2 = h = 80 \text{ pies}$$

Puesto que $\bar{V}_2$ no se conoce, no podemos calcular *Re*. Pero podemos suponer un factor de fricción a partir de la región de flujo completamente rugosa. De la figura 8.15, $e/D \simeq 0.0025$ para tubería de hierro fundido. Como la tubería es bastante vieja, elija $e/D = 0.005$. Entonces, de la figura 8.14, suponemos $f \simeq 0.03$. De tal manera, una primera aproximación a $\bar{V}_2$ es

$$\bar{V}_2 = \left[2 \times 32.2 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \times 80 \text{ pies} \times \frac{1}{0.03(2040 + 8) + 1}\right]^{1/2} = 9.08 \text{ pies / s}$$

Verifique ahora el valor de f supuesto.

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu} = 9.08 \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times \frac{\text{pie}}{3} \times \frac{\text{s}}{1.2 \times 10^{-2} \text{ pie}^2} = 2.52 \times 10^5$$

Para $e/D = 0.005$, $f = 0.031$ de acuerdo con la figura 8.14. De este modo, obtenemos

$$\bar{V}_2 = \left[2 \times 32.2 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \times 80 \text{ pies} \times \frac{1}{0.031(2040 + 8) + 1}\right]^{1/2} = 8.94 \text{ pies / s}$$

En consecuencia, la convergencia es satisfactoria. El flujo volumétrico es

$$Q = \bar{V}_2 A = \bar{V}_2 \frac{\pi D^2}{4} = 8.94 \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{pie}^2 \times 7.48 \frac{\text{gal}}{\text{pie}^3} \times 60 \frac{\text{s}}{\text{min}^2}$$

$$Q = 350 \text{ gpm} \longleftarrow Q$$

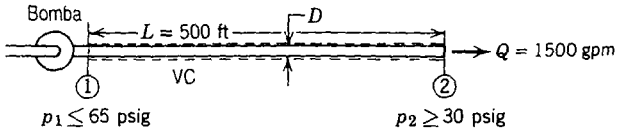
Este problema ilustra el procedimiento para resolver problemas de flujo en tubería en los que se desconoce el flujo. Note que la velocidad, y consecuentemente el flujo, es esencialmente proporcional a $1/\sqrt{f}$. Al duplicar e/D para tomar en cuenta el envejecimiento, se reduce el flujo en aproximadamente 10 por ciento.

EJEMPLO 8.8 Flujo en un sistema de irrigación: diámetro desconocido

Los rociadores en un sistema de riego agrícola van a ser alimentados con agua mediante 500 pies de tubería de aluminio estirada proveniente de una bomba accionada por un motor. En su intervalo de operación más eficiente, la salida de la bomba es de 1500 gpm a una presión de descarga que no excede de 65 psig. Para una operación satisfactoria, los irrigadores deben operar a 30 psig o a una presión más alta. Las pérdidas menores y los cambios de altura pueden despreciarse. Determine el tamaño de tubería estándar más pequeño que puede emplearse.

PROBLEMA EJEMPLO 8.8

DATOS: Un sistema de alimentación de agua, como el mostrado.



ENCUENTRE:
El valor estándar más pequeño de D.

SOLUCIÓN:
Δp, L y Q son conocidas. No se conoce D, por lo que la iteración es necesaria para determinar el diámetro estándar mínimo que satisface la restricción de caída de presión al flujo dado. La máxima caída de presión permisible a lo largo de la longitud, L, es

$$\Delta p_{máx} = p_{1máx} - p_{2mín} = (65 - 30)\ \text{psi} = 35\ \text{psi}$$

Ecuaciones de cálculo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + g z_2\right) = h_{l_T} \qquad (8.28)$$

$$h_{l_T} = h_l + h_{l_m} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

($h_{l_m} = 0(3)$)

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) $h_{l_T} = h_l$, esto es, $h_{l_m} = 0$
4) $z_1 = z_2$
5) $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}$; $\alpha_1 \simeq \alpha_2$

Entonces,

$$\Delta p = p_1 - p_2 = f\frac{L}{D}\frac{\rho \bar{V}^2}{2}$$

Puesto que se van a suponer diámetros de ensayo, conviene sustituir $\bar{V} = Q/A = 4Q/\pi D^2$, por lo que

$$\Delta p = f\frac{L}{D}\frac{\rho}{2}\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2 = \frac{8fL\rho Q^2}{\pi^2 D^5} \qquad (1)$$

El número de Reynolds es necesario para encontrar f. En términos de Q,

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D^2} \frac{D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \nu D}$$

Finalmente, Q debe convertirse a pies cúbicos por segundo.

$$Q = 1500 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48 \text{ gal}} = 3.34 \text{ pie}^3/\text{s}$$

Para una suposición inicial, tome una tubería nominal de 4 pulg (4.026 pulg d.i.):

$$Re = \frac{4Q}{\pi \nu D} = \frac{4}{\pi} \times 3.34 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1.2 \times 10^{-5} \text{ pies}^2} \times \frac{1}{4.026 \text{ pulg}} \times 12 \frac{\text{pulg}}{\text{pie}} = 1.06 \times 10^6$$

Para tubería estirada, $e/D = 0.000\,016$ (figura 8.15), de modo que $f \simeq 0.012$ (figura 8.14), y

$$\Delta p = \frac{8fL\rho Q^2}{\pi^2 D^5} = \frac{8}{\pi^2} \times 0.012 \times 500 \text{ pies} \times 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times (3.34)^2 \frac{\text{pies}^6}{\text{s}^2}$$

$$\times \frac{1}{(4.026)^5 \text{ pulg}^5} \times 1728 \frac{\text{pulg}^3}{\text{pies}^3} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$$\Delta p = 172 \text{ lbf/pulg}^2 > \Delta p_{máx}$$

Como esta caída de presión es demasiado grande, intente $D = 6$ pulg (en realidad 6.065 pulg d.i.):

$$Re = \frac{4}{\pi} \times 3.34 \frac{\text{pies}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1.2 \times 10^{-5} \text{ pies}^2} \times \frac{1}{6.065 \text{ pulg}} \times 12 \frac{\text{pulg}}{\text{pie}} = 7.01 \times 10^5$$

Para tubería estirada, $e/D = 0.000\,010$ (figura 8.15), por lo que $f \simeq 0.013$ (figura 8.14), y

$$\Delta p = \frac{8}{\pi^2} \times 0.013 \times 500 \text{ pies} \times 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times (3.34)^2 \frac{\text{pies}^6}{\text{s}^2}$$

$$\times \frac{1}{(6.065)^5 \text{ pulg}^5} \times (12)^3 \frac{\text{pulg}^3}{\text{pies}^3} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$$\Delta p = 24.0 \text{ lbf/pulg}^2 < \Delta p_{máx}$$

Como esto es menor que la caída de presión permisible, debemos verificar una tubería de 5 pulg (nominal). Con un d.i. real de 5.047 pulg,

$$Re = \frac{4}{\pi} \times 3.34 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1.2 \times 10^{-5} \text{ pie}^2} \times \frac{1}{5.047 \text{ pulg}} \times 12 \frac{\text{pulg}}{\text{pie}} = 8.43 \times 10^5$$

Para tubería estirada, $e/D = 0.000\,012$ (figura 8.15), por lo que $f \simeq 0.012$ (figura 8.14), y

$$\Delta p = \frac{8}{\pi^2} \times 0.012 \times 500 \text{ pies} \times 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times (3.34)^2 \frac{\text{pies}^6}{\text{s}^2}$$

$$\times \frac{1}{(5.047)^5 \text{ pulg}^5} \times (12)^3 \frac{\text{pulg}^3}{\text{pie}^3} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$$\Delta p = 55.5 \text{ lbf/pulg}^2 > \Delta p_{máx}$$

De manera q
tubería de 6 p

Este proble
desconoce
turbulento
constante

Hemos r
varias forma
para resolver
especializad
Los prol
y la aplicaci

EJEMPLO

La referenci
entrada, cor
entrada. Par
tubería desc
0.566 pies³/
De acuerdo

PROBLE

DATOS:

ENCUE

SOLU
Aplique

De manera que el criterio para la caída de presión se satisface para un diámetro nominal mínimo de tubería de 6 pulg.

D

Este problema ilustra el procedimiento para resolver situaciones de flujo en tubería cuando se desconoce el diámetro. Advierta que de acuerdo con la ecuación 1, la caída de presión en un flujo turbulento en tubería es proporcional a fl/D^5. La variación de f es pequeña, por lo que Δp a flujo constante es aproximadamente proporcional a $1/D^5$.

Hemos resuelto los problemas ejemplo 8.7 y 8.8 mediante iteración directa. Se han elaborado varias formas especializadas de diagramas del factor de fricción contra el número de Reynolds para resolver problemas de este tipo sin la necesidad de iteración. Para ejemplo de estos diagramas especializados, véanse [19] y [20].

Los problemas ejemplo 8.9 y 8.10 ilustran la evaluación de coeficientes de pérdidas menores y la aplicación de un difusor para reducir la energía cinética de salida de un sistema de flujo.

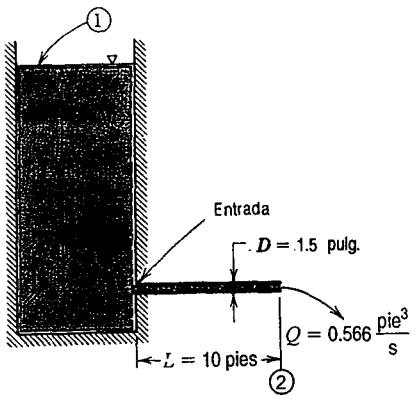
EJEMPLO 8.9 Cálculo del coeficiente de pérdida de entrada

La referencia [21] informa de resultados de mediciones realizadas para determinar las pérdidas de entrada, correspondientes al flujo de un depósito, a una tubería con varios grados de redondeo de entrada. Para las pruebas se utilizó una tubería de cobre de 10 pies de largo y 1.5 pulg de d.i. La tubería descarga a la atmósfera. Para una entrada de borde cuadrado, se midió una descarga de 0.566 pies^3/s cuando el nivel de depósito era de 85.1 pies por arriba de la línea central de la tubería. De acuerdo con estos datos, evalúe el coeficiente de pérdida para la entrada de borde cuadrado.

PROBLEMA EJEMPLO 8.9

DATOS: Una tubería con entrada de borde cuadrado que descarga el fluido que proviene de un depósito, según se muestra.

ENCUENTRE: K_{entrada}.



SOLUCIÓN:

Aplique la ecuación de energía para flujo estable e incompresible en tubería.

Ecuaciones de cálculo: $\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + g z_2 + h_{l_T}$ ($\bar{V}_1 \approx 0$ (2); $z_2 = 0$)

$$h_{l_T} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}_2^2}{2} + K_{\text{entrada}} \frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

Suposiciones: 1) $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$
2) $\bar{V}_1 \approx 0$

Sustituyendo h_{l_T}, y dividiendo entre g, se obtiene $z_1 = h = \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + K_{\text{entrada}} \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$

o

$$K_{\text{entrada}} = \frac{2g\,h}{\bar{V}_2^2} - f \frac{L}{D} - \alpha_2 \tag{1}$$

La velocidad promedio es

$$\bar{V}_2 = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2} = \frac{4}{\pi} \times 0.566 \ \frac{\text{pie}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{(1.5)^2 \ \text{pulg}^2} \times 144 \ \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2} = 46.1 \ \text{pie/s}$$

Asuma $T = 75$ F (24 C), donde $\nu = 8.8 \times 10^{-7}$ m^2/s (Fig. A.3). Entonces

$$Re = \frac{\bar{V} D}{\nu} = 46.1 \ \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times 1.5 \ \text{pulg} \times \frac{\text{s}}{8.8 \times 10^{-7} \ \text{m}^2} \times \frac{\text{pie}}{12 \ \text{pulg}} \times (0.3048)^2 \ \frac{\text{m}^2}{\text{pie}^2} = 6.08 \times 10^5$$

Para tubería estirada, $e/D = 0.00004$ (figura 8.15), por lo que $f = 0.013$ (figura 8.14). De la figura 8.11, $n = 8.7$, de manera que

$$\frac{\bar{V}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} = 0.848 \tag{8.23}$$

y

$$\alpha = \left(\frac{U}{\bar{V}}\right)^3 \frac{2n^2}{(3+n)(3+2n)} = 1.04 \tag{8.26}$$

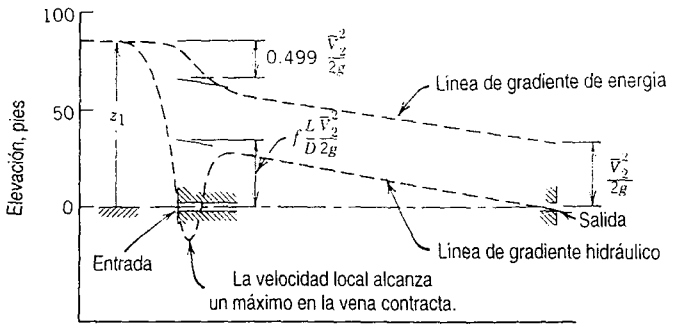
Al sustituir en la ecuación 1, obtenemos

$$K_{\text{entrada}} = 2 \times 32.2 \ \frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \times 85.1 \ \text{pie} \times \frac{\text{s}^2}{(46.1)^2 \ \text{pie}^2} - (0.013) \ \frac{10 \ \text{pies}}{1.5 \ \text{pulg}} \times \frac{12 \ \text{pulg}}{\text{pie}} - 1.04$$

$$K_{\text{entrada}} = 0.499 \qquad \longleftarrow K_{\text{entrada}}$$

Este coeficiente se compara favorablemente con el que se presenta en la tabla 8.1. Las líneas de los gradientes de energía e hidráulico se muestran a continuación. La gran pérdida de carga en una entrada de borde cuadrado se debe principalmente a la separación de la esquina afilada de la entrada y a la formación de la vena contracta inmediatamente aguas abajo de la esquina. El área de flujo efectiva

alcanza un mínimo en la vena contracta, por lo que la velocidad de flujo es un máximo ahí. El flujo se expande otra vez después de la vena contracta llenando la tubería. La expansión descontrolada después de la vena contracta es responsable de la mayor parte de la pérdida de carga. (Véase el problema ejemplo 8.12.)



El redondeo de la esquina de entrada reduce el grado de separación de manera significativa. Esto reduce el incremento de la velocidad a través de la vena contracta y, consecuentemente, reduce la pérdida de carga debida a la entrada. Una entrada "bien redondeada" casi elimina la separación de flujo; el patrón de flujo se aproxima al que se muestra en la figura 8.1. La pérdida de carga agregada en un entrada bien redondeada, comparada con flujo completamente desarrollado, es el resultado de esfuerzos de corte de pared más altos en el tramo de la entrada.

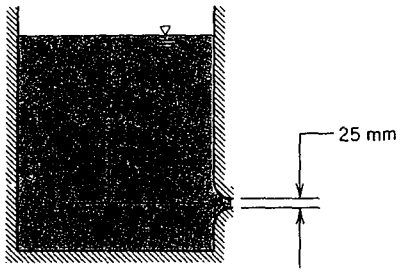
EJEMPLO 8.10 Empleo de un difusor para incrementar el flujo

Los derechos de agua otorgados a cada ciudadano por un emperador romano daban permiso para instalar dentro del ducto principal de suministro de agua una tobera calibrada, circular, de bronce y tubular [22]. Algunos ciudadanos se las ingeniaban para tomar una ventaja desleal de una ley que regulaba la relación de flujo mediante un método indirecto: instalaban difusores sobre la salida de las toberas para incrementar su descarga. Suponga que la carga estática disponible del ducto principal es $z_0 = 1.5$ m y que el diámetro de la salida de la tobera es $D = 25$ mm. (La descarga es a la presión atmosférica.) Determine el incremento de flujo cuando un difusor con $N/R_1 = 3.0$ y $AR = 2.0$ se conecta al extremo de la tobera.

PROBLEMA EJEMPLO 8.10

DATOS: Una tobera conectada al ducto principal de agua como se muestra.

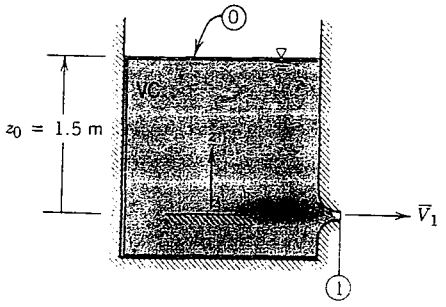
ENCUENTRE: El aumento en la descarga cuando se instala un difusor con $N/R_1 = 3.0$ y $AR = 2.0$.



SOLUCIÓN:
Aplique la ecuación de la energía para flujo incompresible y estable en una tubería.

Ecuación de cálculo: $$\frac{p_0}{\rho}+\alpha_0\frac{\bar{V}_0^2}{2}+gz_0=\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1+h_{l_T}$$

Suposiciones: 1) $\bar{V}_0 \approx 0$
2) $\alpha_1 \approx 1$



Para la tobera únicamente,

$$\frac{p_0}{\rho}+\alpha_0\frac{\bar{V}_0^2}{2}+gz_0=\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1+h_{l_T}$$
$$\approx 0\,(1) \qquad \approx 1\,(2) \qquad = 0$$

$$h_{l_T}=K_{\text{entrada}}\frac{\bar{V}_1^2}{2}\approx 0.04\frac{\bar{V}_1^2}{2} \qquad \text{(de la tabla 8.1)}$$

Por tanto,

$$gz_0=\frac{\bar{V}_1^2}{2}+0.04\frac{\bar{V}_1^2}{2}=1.04\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

$$\bar{V}_1=\sqrt{\frac{2gz_0}{1.04}}=\sqrt{\frac{2}{1.04}\times 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\times 1.5\ \text{m}}=5.32\ \text{m/s}$$

$$Q=\bar{V}_1A_1=\bar{V}_1\frac{\pi D^2}{4}=5.32\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\times\frac{\pi}{4}\times(0.025)^2\ \text{m}^2=0.00261\ \text{m}^3/\text{s}$$ ← Q

Para la tobera con el difusor conectado,

$$\frac{p_0}{\rho}+\alpha_0\frac{\bar{V}_0^2}{2}+gz_0=\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2+h_{l_T}$$
$$\approx 0\,(1) \qquad \approx 1\,(2) \qquad = 0$$

$$h_{l_T}=K_{\text{entrada}}\frac{\bar{V}_1^2}{2}+K_{\text{difusor}}\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

o

$$gz_0=\frac{\bar{V}_2^2}{2}+(K_{\text{entrada}}+K_{\text{difusor}})\frac{\bar{V}_1^2}{2} \qquad (1)$$

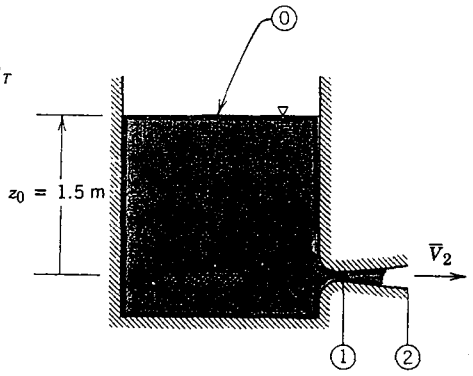


Figure 8.18 gives data for $C_p=\dfrac{p_2-p_1}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2}$ for diffusers.

Para obtener K_{difusor}, aplique la ecuación de la energía de (1) a (2).

$$\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2+K_{\text{difusor}}\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

Resolviendo, con $\alpha_2 \approx 1$, obtenemos

$$K_{\text{difusor}}=1-\frac{\bar{V}_2^2}{\bar{V}_1^2}-\frac{p_2-p_1}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2}=1-\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-C_p=1-\frac{1}{(AR)^2}-C_p$$

donde a partir de la continuidad, $\bar{V}_1A_1 = \bar{V}_2A_2$. De la figura 8.18, $C_p = 0.45$, por lo que

$$K_{\text{difusor}} = 1 - \frac{1}{(2.0)^2} - 0.45 = 0.75 - 0.45 = 0.3$$

Por tanto, al sustituir en la ecuación 1,

$$gz_0 = \frac{\bar{V}_2^2}{2} + (0.04 + 0.30)\frac{\bar{V}_1^2}{2} = \frac{\bar{V}_1^2}{2}\left[\frac{1}{(AR)^2} + 0.34\right] = 0.59\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

Para este sistema

$$\bar{V}_1 = \sqrt{\frac{2gz_0}{0.59}} = \sqrt{\frac{2}{0.59} \times 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1.5\ \text{m}} = 7.06\ \text{m/s}$$

y

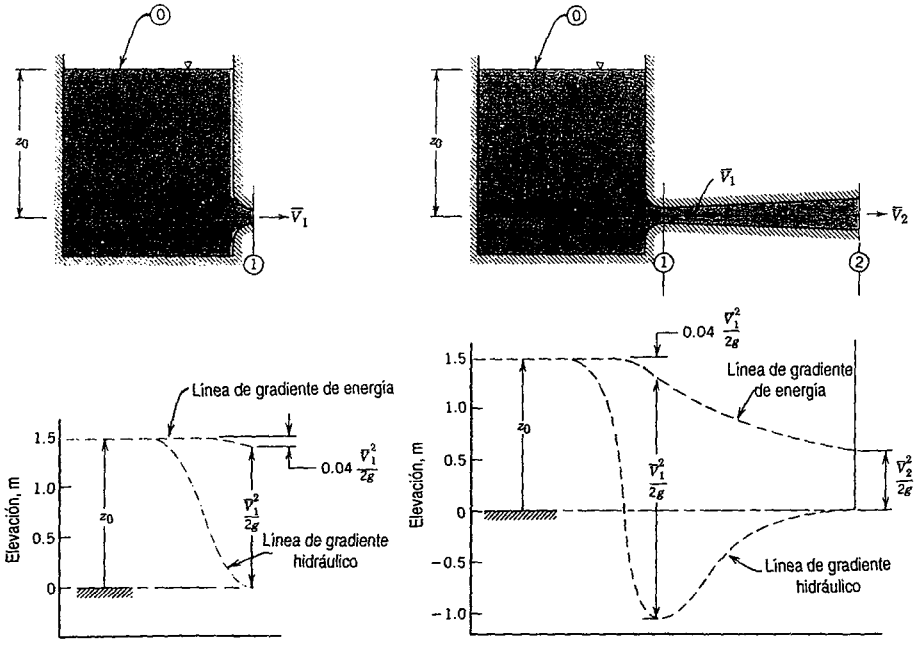
$$Q_d = \bar{V}_1A_1 = \bar{V}_1\frac{\pi D^2}{4} = 7.06\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4} \times (0.025)^2\ \text{m}^2 = 0.00347\ \text{m}^3/\text{s} \qquad \leftarrow Q_d$$

El aumento de flujo que resulta de añadir el difusor es

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{Q_d - Q}{Q} = \frac{Q_d}{Q} - 1 = \frac{0.00347}{0.00261} - 1 = 0.330 \quad \text{o} \quad 33 \text{ por ciento} \qquad \leftarrow \frac{\Delta Q}{Q}$$

La adición del difusor aumenta el flujo a través de la tobera de manera significativa. El difusor desahoga a la presión atmosférica; el aumento de presión a través del difusor reduce así la presión en el plano de salida de la tobera, provocando el aumento de la relación de flujo.

Las líneas del gradiente de energía e hidráulico se dibujan en las siguientes figuras —aproximadamente a escala— para la combinación de la tobera sola y la combinación de tobera-difusor. La tobera sola desahoga a la presión atmosférica, de modo que la línea de gradiente hidráulico cae a la altura cero en la salida de la tobera. La única pérdida en la tobera es 0.04 veces la carga de velocidad, por lo que la altura de la línea del gradiente de energía disminuye ligeramente, como se muestra.



La presión hidrostática en el plano de salida de la tobera se reduce por debajo de la atmosférica mediante el difusor. Como se muestra en el dibujo, la presión aumenta a través del difusor a la presión atmosférica en el plano de descarga. Con una razón de área del difusor de 2, la velocidad promedio se reduce en un factor de 2 y la energía cinética que sale del difusor es un cuarto del valor de entrada.

La línea del gradiente de energía desciende 0.04 veces la carga de velocidad de entrada en el plano de salida de la tobera. El difusor introduce la pérdida adicional, $K_{\text{difusor}} = 0.3$, la cual reduce aún más el nivel de la línea del gradiente de energía.

El comisionado de agua Frontinus estandarizó las condiciones para todos los romanos en el año 97 a.C. Él requirió que el tubo conectado a la tobera de cada tubo de usuario fuera del mismo diámetro para al menos 50 pies lineales del ducto principal del agua pública (véase el problema 8.117).

**8-8.2 Sistemas de trayectorias múltiples

En muchas situaciones prácticas, tales como el suministro de agua o los sistemas de protección contra incendios, deben analizarse redes de tuberías complejas. Las técnicas básicas desarrolladas en la sección 8-8.1 también pueden emplearse para analizar flujo en sistemas de tuberías de trayectorias múltiples. El procedimiento es análogo a la solución de circuitos eléctricos de corriente continua, pero con elementos no lineales.

El sistema de tuberías representativo mostrado en la figura 8.20 tiene dos nodos, denominados A y B, y tres ramas. El flujo total dentro del sistema debe distribuirse entre las ramas. En consecuencia, se desconoce el flujo a través de cada rama. Sin embargo, la caída de presión para cada rama es la misma, $p_A - p_B$. Esta información es suficiente para permitir una solución iterativa para el flujo en cada rama, como se muestra en el problema ejemplo 8.11.

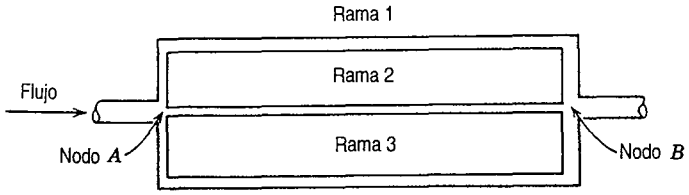


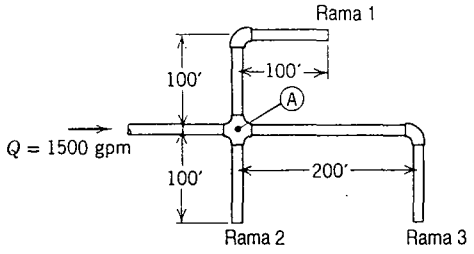
Fig. 8.20 Sistema de red de tubería.

El flujo y la caída de presión del fluido son, respectivamente, análogas a la corriente y al voltaje en el circuito eléctrico. Sin embargo, la simple relación lineal entre el voltaje y la corriente dada por la ley de Ohm no se aplica al sistema de flujo del fluido. En vez de eso, la caída de presión es aproximadamente proporcional al cuadrado del flujo. Esta no linealidad hace necesarias las soluciones iterativas, y los cálculos resultantes pueden ser bastante prolongados. Se han desarrollado varios esquemas para usarse con computadoras digitales. Por ejemplo, véase [23].

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

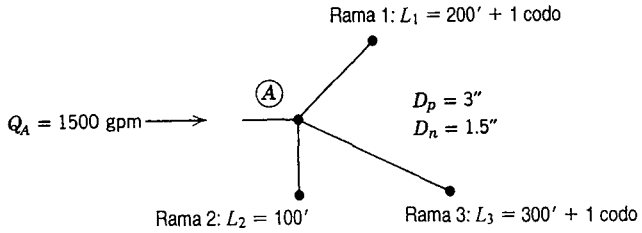
EJEMPLO 8.11 Sistema de flujo en una red de tuberías de trayectoria múltiple

El sistema de irrigación del ejemplo 8.8 se va a ampliar manteniendo constante el flujo total en 1500 gpm, añadiendo tres ramas, cada una de tubería de 3 pulg, como se muestra en el dibujo. El irrigador al final de cada rama tiene una tobera de 1.5 pulg de diámetro mínimo. Deben incluirse las pérdidas menores en codos, aunque los términos de altura se desprecien. Determine el flujo en cada rama, la presión requerida en Ⓐ, y la presión aplicada en cada tobera del irrigador.



PROBLEMA EJEMPLO 8.11

DATOS: La red de tuberías que se muestra esquemáticamente en la siguiente figura.



ENCUENTRE: *a*) Q_1, Q_2, Q_3.
b) p_A.
c) p_1, p_2, p_3 en las entradas de tobera.

SOLUCIÓN:
Aplique la ecuación 8.28 a cada rama. Elija el subíndice n para la salida de la tobera y el subíndice p para la tubería.

Ecuaciones de cálculo:

$$\frac{p_A}{\rho} + \alpha_A \frac{\bar{V}_A^2}{2} + g z_A = \frac{p_n}{\rho} + \alpha_n \frac{\bar{V}_n^2}{2} + g z_n + h_{l_T} \qquad h_{l_T} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_p^2}{2} + f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}_p^2}{2}$$

($\bar{V}_A^2/2 \approx 0(1)$)

Suposiciones:
1) $\bar{V}_A^2 \ll \bar{V}_n^2$; $\alpha_n \simeq 1.0$
2) $z_A \simeq z_n$
3) $p_n = p_{\text{atm}}$
4) Ignore las pérdidas debidas a la división del flujo en Ⓐ

Luego, para cada rama del sistema de flujo, empleando la presión manométrica en Ⓐ, obtenemos

$$\frac{p_A}{\rho} = \frac{\bar{V}_n^2}{2} + f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_p^2}{2} + f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}_p^2}{2}$$

Pero para flujo incompresible, $\bar{V}_p A_p = \bar{V}_n A_n$, por lo que $\bar{V}_n^2 = \bar{V}_p^2 (A_p/A_n)^2 = \bar{V}_p^2 (D_p/D_n)^4$, y

$$\frac{p_A}{\rho} = \frac{\bar{V}_p^2}{2}\left[\left(\frac{D_p}{D_n}\right)^4 + f\left(\frac{L}{D} + \frac{L_e}{D}\right)\right]$$

o

$$\bar{V}_p = \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}\left[\frac{1}{\left(\frac{D_p}{D_n}\right)^4 + f\left(\frac{L}{D} + \frac{L_e}{D}\right)}\right]^{1/2}$$

El flujo correspondiente para cada rama es

$$Q_p = \bar{V}_p A_p = A_p\sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}\left[\frac{1}{\left(\frac{D_p}{D_n}\right)^4 + f\left(\frac{L}{D} + \frac{L_e}{D}\right)}\right]^{1/2} \tag{1}$$

Para encontrar f, debemos determinar el número de Reynolds de la tubería. Si el flujo se divide igualmente como una primera aproximación, entonces $Q_p \simeq 500$ gpm por rama, y

$$Re = \frac{\bar{V}_p D_p}{\nu} = \frac{4Q_p}{\pi \nu D_p}$$

$$= \frac{4}{\pi} \times 500\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{s}}{1.2 \times 10^{-5}\ \text{pie}^2} \times \frac{1}{3\ \text{pulg}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48\ \text{gal}} \times \frac{12\ \text{pulg}}{\text{pie}}$$

$$Re = 4.73 \times 10^5$$

De la figura 8.14, para tubería lisa, $f \simeq 0.0133$. Para un codo, $L_e/D = 30$, de la tabla 8.3. Podemos obtener una primera aproximación para Q_p para cada rama; la sustitución en la ecuación 1 produce

$$Q_{p1} \simeq A_p\sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}\left[\frac{1}{\left(\frac{3.0}{1.5}\right)^4 + 0.0133\left(200\ \text{pies} \times \frac{1}{3\ \text{pulg}} \times \frac{12\ \text{pulg}}{\text{pie}} + 30\right)}\right]^{1/2}$$

$$Q_{p1} \simeq 0.192A_p\sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}$$

$$Q_{p2} \simeq A_p\sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}\left[\frac{1}{\left(\frac{3.0}{1.5}\right)^4 + 0.0133\left(100\ \text{pies} \times \frac{1}{3\ \text{pulg}} \times \frac{12\ \text{pulg}}{\text{pie}}\right)}\right]^{1/2}$$

$$Q_{p2} \simeq 0.217A_p\sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}$$

Ⓐ. obtenemos

$D_p/D_n)^4$, y

(1)

i el flujo se divide

$\frac{\text{pulg}}{\text{pie}}$

abla 8.3. Podemos
ción 1 produce

y

$$Q_{p3} = A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}} \left[\frac{1}{\left(\frac{3.0}{1.5}\right)^4 + 0.0133\left(300 \text{ pies} \times \frac{1}{3 \text{ pulg.}} \times 12\frac{\text{pulg.}}{\text{pie}} + 30\right)} \right]^{1/2}$$

$$Q_{p3} = 0.192 A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}$$

A partir de la continuidad,

$$Q_A = Q_{p1} + Q_{p2} + Q_{p3} = (0.192 + 0.217 + 0.176) A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}} = 0.585 A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}$$

Por tanto,

$$\frac{Q_{p1}}{Q_A} = \frac{0.192 A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}}{0.585 A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}} = 0.328$$

o

$$Q_{p1} = (0.328)1500 \text{ gpm} = 492 \text{ gpm}$$

De manera similar

$$\frac{Q_{p2}}{Q_A} = \frac{0.217}{0.585} = 0.371 \qquad Q_{p2} = 557 \text{ gpm}$$

$$\frac{Q_{p3}}{Q_A} = \frac{0.176}{0.585} = 0.301 \qquad Q_{p3} = 452 \text{ gpm}$$

Después de esto, es posible calcular mejores aproximaciones para el número de Reynolds y el factor de fricción para cada rama.

$$Re_1 = \frac{Q_{p1}}{500 \text{ gpm}} \times 4.73 \times 10^5 = \frac{492}{500} \times 4.73 \times 10^5 = 4.65 \times 10^5$$

De la figura 8.14, $f_1 = 0.0133$. Similarmente,

$$Re_2 = \frac{557}{500} \times 4.73 \times 10^5 = 5.27 \times 10^5 \qquad f_2 = 0.0130$$

y

$$Re_3 = \frac{452}{500} \times 4.73 \times 10^5 = 4.28 \times 10^5 \qquad f_3 = 0.0136$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 1, obtenemos

$$Q_{p1} = 0.192 A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}$$

$$Q_{p2} = 0.217 A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}$$

y

$$Q_{p3} = 0.175 A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}$$

De la continuidad,

$$Q_A = Q_{p1} + Q_{p2} + Q_{p3} = (0.192 + 0.217 + 0.175) A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}} = 0.584 A_p \sqrt{\frac{2p_A}{\rho}}$$

Resolviendo para el flujo individual,

$$Q_{p1} = \frac{0.192}{0.584} \times 1500 \text{ gpm} = 493 \text{ gpm}$$

$$Q_{p2} = \frac{0.217}{0.584} \times 1500 \text{ gpm} = 557 \text{ gpm}$$

y

$$Q_{p3} = \frac{0.175}{0.584} \times 1500 \text{ gpm} = 449 \text{ gpm} \longleftarrow Q_1, Q_2, Q_3$$

La resolución de la ecuación 1 respecto a p_A produce

$$p_A = \frac{\rho}{2}\left(\frac{Q_p}{A_p}\right)^2 \left[\left(\frac{D_p}{D_n}\right)^4 + f\left(\frac{L}{D} + \frac{L_e}{D}\right)\right]$$

Al sustituir para la rama (1),

$$p_A = \frac{1}{2} \times 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \left(493 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{4}{\pi} \frac{1}{(3)^2 \text{ pulg}^2} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48 \text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2}\right)^2$$

$$\times \left[\left(\frac{3.0}{1.5}\right)^4 + 0.0133 \left(200 \text{ pies} \times \frac{1}{3 \text{ pulg}} \times 12 \frac{\text{pulg}}{\text{pie}} + 30\right)\right] \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}} \times \frac{\text{pie}^2}{144 \text{ pulg}^2}$$

$$p_A = 91.2 \text{ lbp/pulg}^2$$

Las presiones para las ramas (2) y (3) mediante cálculos similares son 91.4 y 90.5 psig, respectivamente. (Las ligeras diferencias se deben al redondeo del flujo.) Por tanto,

$$p_A \approx 91.0 \text{ psig} \longleftarrow p_A$$

La presión en la entrada de cada tobera del irrigador puede calcularse de la ecuación de energía. La ecuación entre (A) y la entrada de la tobera, sección (i), es

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{\bar{V}_A^2}{2} + g z_A = \frac{p_i}{\rho} + \frac{\bar{V}_p^2}{2} + g z_i + h_{l_T} \qquad h_{l_T} = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_p^2}{2} + f\frac{L_e}{D}\frac{\bar{V}_p^2}{2}$$

De la continuidad, $\bar{V}_A = Q_A/A_A$ y $\bar{V}_p = Q_p/A_p$, por lo que

$$p_i = p_A + \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{Q_A}{A_A}\right)^2 - \left(f\frac{L}{D} + f\frac{L_e}{D} + 1\right)\left(\frac{Q_p}{A_p}\right)^2\right]$$

o

La sustitución

$p_{i_1} = 91.0$ lbf/pulg

$\times$ (150

$\times$ { 1

$\times$ 144

$p_{i_1} = 52.3$ lbf

Cálculos sim

{ Este probl
{ trayectoria

PARTE C MEDICI

La elección
el costo, la
servicio. De

8-9 MÉTODOS DIREC

Es posible
masa del líc
largo como
La cor
densidades
precisa del
desplazanc
medio de
requiere c
En ap
ficarse me
doméstic
producto,
calculan

o

$$p_i = p_A + \frac{\rho}{2}\left(\frac{Q_A}{A_A}\right)^2\left\{1-\left[f\left(\frac{L}{D}+\frac{L_e}{D}\right)+1\right]\left(\frac{Q_p}{Q_A}\right)^2\left(\frac{A_A}{A_p}\right)^2\right\}$$

La sustitución para la rama ① da como resultado

$$p_{i_1} = 91.0\ \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} + \frac{1}{2}\times 1.94\ \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3}$$
$$\times\left(1500\ \frac{\text{gal}}{\text{min}}\times\frac{4}{\pi}\ \frac{1}{(6)^2\ \text{pulg}^2}\times\frac{\text{pie}^3}{7.48\ \text{gal}}\times\frac{\text{min}}{60\ \text{s}}\times 144\ \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2}\right)^2$$
$$\times\left\{1-\left[0.0133\left(200\ \text{pies}\times\frac{1}{3\ \text{pulg}}\times\frac{12\ \text{pulg}}{\text{pie}}+30\right)+1\right]\left(\frac{493}{1500}\right)^2\left(\frac{6}{3}\right)^4\right\}\ \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{pie}}$$
$$\times\frac{\text{pie}^2}{144\ \text{pulg}^2}$$

$p_{i_1} = 52.3\ \text{lbf/pulg}^2$

Cálculos similares para las ramas ② y ③ producen

$$p_{i_2} = 66.3\ \text{lbf/pulg.}^2 \qquad \text{y} \qquad p_{i_3} = 43.3\ \text{lbf/pulg.}^2 \longleftarrow p_i$$

{ Este problema ilustra el método general empleado para resolver problemas de flujo en tubería de trayectoria múltiple. }

PARTE C MEDICIÓN DE FLUJO

La elección de un medidor de flujo es afectada por la exactitud requerida, el intervalo de medición, el costo, la complicación, la facilidad de lectura o reducción de datos, así como por la vida de servicio. Debe elegirse el dispositivo más simple y barato que brinde la exactitud deseada.

8-9 MÉTODOS DIRECTOS

Es posible emplear tanques para determinar el flujo de líquidos estables midiendo el volumen o masa del líquido recolectado durante un intervalo de tiempo conocido. Si éste es lo suficientemente largo como para medirse con exactitud, el flujo puede determinarse precisamente de esta manera.

La compresibilidad debe considerarse en las mediciones de volumen para flujos de gas. Las densidades de los gases son por lo general demasiado pequeñas para permitir la medición directa precisa del flujo másico. Sin embargo, con frecuencia puede colectarse una muestra de volumen desplazando una "campana" o jarra invertida sobre agua (si la presión se mantiene constante por medio de contrapesos). Si se van a ejecutar con cuidado las mediciones de masa o volumen, no se requiere calibración; ésta es una gran ventaja de los métodos directos.

En aplicaciones especializadas, en particular para usos remotos o de registro, pueden especificarse medidores de flujo de desplazamiento positivo. Los ejemplos comunes incluyen medidores domésticos de agua y gas natural, los cuales se calibran para leer directamente en unidades de producto, o bombas de medición de gasolina, las cuales miden el flujo total y en forma automática calculan el costo. Es posible encontrar comercialmente muchos medidores de desplazamiento

positivo. Consulte información de los fabricantes o las referencias (por ejemplo, [8]) para detalles de instalación y diseño.

8-10 RESTRICCIÓN DE LOS MEDIDORES DE FLUJO PARA FLUJOS INTERNOS

La mayor parte de las restricciones de los medidores para flujo interno (excepto el elemento de flujo laminar, sección 8-10.4) se basan en la aceleración de una corriente de fluido a través de alguna forma de tobera, como se muestra esquemáticamente en la figura 8.21. La separación de flujo en el borde afilado de la garganta de la tobera provoca la formación de una zona de recirculación, como indican las líneas punteadas aguas abajo de la tobera. El flujo de la corriente principal continúa acelerándose desde la garganta de la tobera para formar una *vena contracta* en la sección ② y luego se desacelera otra vez para llenar el ducto. En la vena contracta, el área del flujo es un mínimo, las líneas de corriente son esencialmente rectas y la presión es uniforme a través de la sección del canal.

El flujo teórico puede relacionarse con el diferencial de presión entre las secciones ① y ②

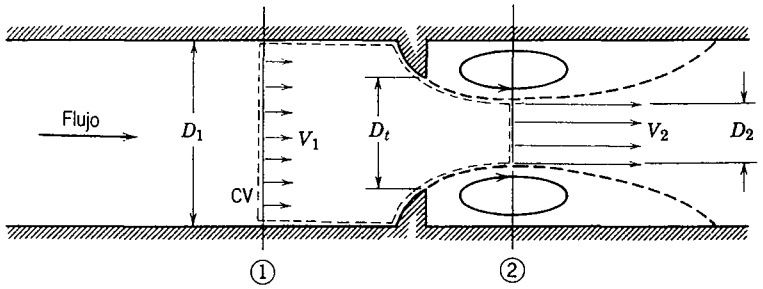


Fig. 8.21 Flujo interno a través de una tobera generalizada, mostrando el volumen de control utilizado para el análisis.

aplicando las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli. Los factores de corrección empíricos pueden aplicarse para obtener el flujo real.

Ecuaciones básicas:

$$= 0(1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, d\forall + \int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 \tag{6.9}$$

Suposiciones:

1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo a lo largo de una línea de corriente
4) No hay fricción
5) Velocidad uniforme en las secciones ① y ②
6) Sin curvatura de la línea de corriente en las secciones ① y ②, por lo que la presión es uniforme a través de esas secciones
7) $z_1 = z_2$

Entonces, de la ecuación de Bernoulli,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho V_2^2}{2}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2\right]$$

y de la continuidad

$$0 = \{-|\rho V_1 A_1|\} + \{|\rho V_2 A_2|\}$$

o

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \text{por lo que} \quad \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

La sustitución produce

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho V_2^2}{2}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

Despejando la velocidad teórica, V_2,

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \tag{8.45}$$

El flujo teórico está dado entonces por

$$\dot{m}_{\text{teórica}} = \rho V_2 A_2 = \rho \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}\, A_2$$

o

$$\dot{m}_{\text{teórica}} = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \tag{8.46}$$

La ecuación 8.46 muestra la relación general entre el flujo másico y la caída de presión para un medidor de flujo de restricción: el flujo másico es proporcional a la raíz cuadrada del diferencial de presión a través de las tomas del medidor. Esta relación limita al flujo que puede medirse con precisión hasta aproximadamente un rango de 4:1.

Varios factores limitan la utilidad de la ecuación 8.46 en el cálculo del flujo másico real a través del medidor. Se desconoce el área de flujo real en la sección ② cuando la vena contracta es pronunciada (esto es, en placas de orificio cuando D_t es una pequeña fracción de D_1). Los perfiles de velocidad se acercan a flujo uniforme sólo a números de Reynolds muy grandes. Los efectos de la fricción pueden volverse importantes (especialmente aguas abajo del medidor) cuando los contornos del medidor son abruptos. Por último, la ubicación de las tomas de presión afecta la lectura de la presión diferencial, $p_1 - p_2$.

La ecuación teórica se ajusta para el número de Reynolds y la razón de diámetro definiendo un *coeficiente de descarga* empírico como

$$C \equiv \frac{\text{flujo másico real}}{\text{flujo másico teórico}} \tag{8.47}$$

Mediante el empleo del coeficiente de descarga, el flujo másico real se expresa como

$$\dot{m}_{\text{actual}} = \frac{CA_t}{\sqrt{1-(A_t/A_1)^2}} \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \tag{8.48}$$

o con $\beta = D_t/D_1$, entonces $(A_t/A_1)^2 = (D_t/D_1)^4 = \beta^4$, por lo que

$$\dot{m}_{\text{actual}} = \frac{CA_t}{\sqrt{1-\beta^4}} \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \tag{8.49}$$

En la ecuación 8.49, $1/\sqrt{1-\beta^4}$ es el *factor velocidad de aproximación*. El coeficiente de descarga y la velocidad del factor de aproximación se combinan con frecuencia en un solo *coeficiente de flujo*,

$$K \equiv \frac{C}{\sqrt{1-\beta^4}} \tag{8.50}$$

En términos del coeficiente de flujo, el flujo másico real se expresa como

$$\dot{m}_{\text{actual}} = KA_t \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \tag{8.51}$$

Para elementos de medición estandarizados, se han empleado datos de prueba [8, 24] para desarrollar ecuaciones empíricas que predicen los coeficientes de descarga y de flujo a partir del orificio del medidor, el diámetro de la tubería y el número de Reynolds. La exactitud de las ecuaciones (dentro de rangos especificados) suele ser adecuada de manera que el medidor pueda emplearse sin calibración. Si el número de Reynolds, el tamaño de la tubería o el diámetro del orificio están fuera del rango especificado de la ecuación, los coeficientes deben medirse experimentalmente.

Para el régimen de flujo turbulento (número de Reynolds de la tubería mayor que 4000) el coeficiente de descarga puede expresarse mediante una ecuación de la forma [8]

$$C = C_\infty + \frac{b}{Re_{D_1}^n} \tag{8.52}$$

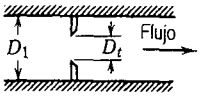
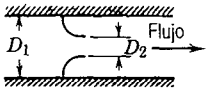
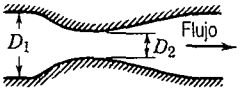
La forma correspondiente para la ecuación del coeficiente de flujo es

$$K = K_\infty + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^4}} \frac{b}{Re_{D_1}^n} \tag{8.53}$$

En las ecuaciones 8.52 y 8.53, el subíndice ∞ denota el coeficiente a un número de Reynolds infinito; las constantes b y n permiten el escalamiento a números de Reynolds finitos. En las siguientes tres subsecciones se brindan ecuaciones de correlación y curvas de coeficientes contra el número de Reynolds para elementos de medición específicos, siguiendo después una comparación general de sus características.

Como hemos señalado, la selección del medidor de flujo depende de factores tales como el costo, la precisión, la necesidad de calibración y la facilidad de instalación y mantenimiento. Algunos de estos factores se comparan para medidores de placa de orificio, tobera de flujo y venturi en la tabla 8.5.

Tabla 8.5 Características de medidores de orificio, toberas de flujo y venturi

Tipo de medidor de flujo	Diagrama	Pérdida de carga	Costo
Orificio		Alta	Bajo
Tobera de flujo		Intermedia	Intermedio
Venturi		Baja	Alto

Los coeficientes de medidores de flujo de los que se informa en la literatura técnica se han medido con distribuciones de velocidad turbulentas completamente desarrolladas en la entrada del medidor (sección ①). Si se va a instalar un medidor de flujo aguas abajo de una válvula, un codo u otra perturbación, debe colocarse una sección recta de tubería enfrente del medidor. Se requieren aproximadamente 10 diámetros de tubería recta para medidores venturi, y hasta 40 diámetros para medidores de placa de orificio y tobera de flujo. Cuando un medidor se ha instalado apropiadamente, el flujo puede calcularse de las ecuaciones 8.49 u 8.51, después de elegir un valor apropiado para el coeficiente de descarga empírico, C, o el coeficiente de flujo, K, definido en las ecuaciones 8.47 y 8.50. Algunos datos de diseño para flujo incompresible se proporcionan en las siguientes secciones. Los mismos métodos básicos pueden extenderse a flujos compresibles, pero éstos no se tratarán aquí. Para mayores detalles, véase [8] o [24].

8-10.1 La placa de orificio

La placa de orificio (figura 8.22) es una placa delgada que puede sujetarse entre bridas de tubería. Como la geometría es simple, es de bajo costo y fácil de instalar y de reemplazar. El borde afilado del orificio no se llenará con incrustaciones o materia suspendida. Sin embargo, la materia suspendida puede acumularse en el lado de entrada de un orificio concéntrico en una tubería horizontal; un orificio excéntrico puede situarse al nivel del fondo de la tubería para evitar esta dificultad. Las principales desventajas del orificio son su capacidad limitada y la alta pérdida de carga permanente debida a la expansión incontrolada aguas abajo del elemento de medición.

Las tomas de presión para orificios pueden ubicarse en varias posiciones, como se muestra en la figura 8.22 (véase [8] o [24] para detalles adicionales). En vista de que la ubicación de las tomas de presión afecta al coeficiente de flujo determinado empíricamente, deben seleccionarse valores adecuados de C y K congruentes con la posición de las tomas de presión.

La ecuación de correlación recomendada para un orificio concéntrico con tomas de presión [8] es

$$C = 0.5959 + 0.0312\beta^{2.1} - 0.184\beta^{8} + \frac{91.71\beta^{2.5}}{Re_{D_1}^{0.75}} \tag{8.54}$$

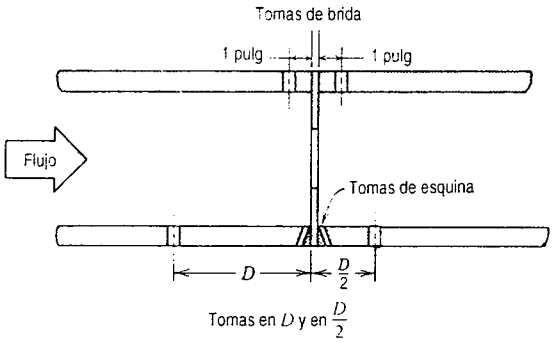


Fig. 8.22 Geometría de orificio y ubicación de las tomas piezométricas [8].

La ecuación 8.54 predice coeficientes de descarga de orificio dentro de ±0.6 por ciento para $0.2 < \beta < 0.75$ y para $10^4 < \mathrm{Re}_{D_1} < 10^7$. Algunos coeficientes de flujo calculados a partir de las ecuaciones 8.54 y 8.50 se presentan en la figura 8.23. Los coeficientes de flujo son relativamente insensibles al número de Reynolds para valores de Re_{D_1} por arriba de 10^5 cuando $\beta > 0.5$.

Se dispone de una ecuación de correlación similar para placas de orificio con tomas D y $D/2$. Las tomas de bridas requieren una correlación diferente para cada tamaño de línea. Las tomas de tubería, localizadas en $2\frac{1}{2}$ y $8D$, ya no se recomiendan para trabajo preciso.

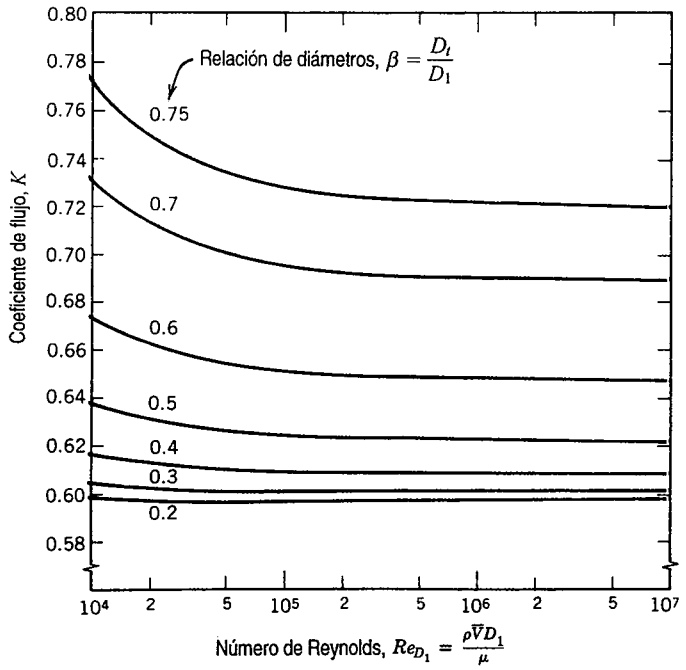
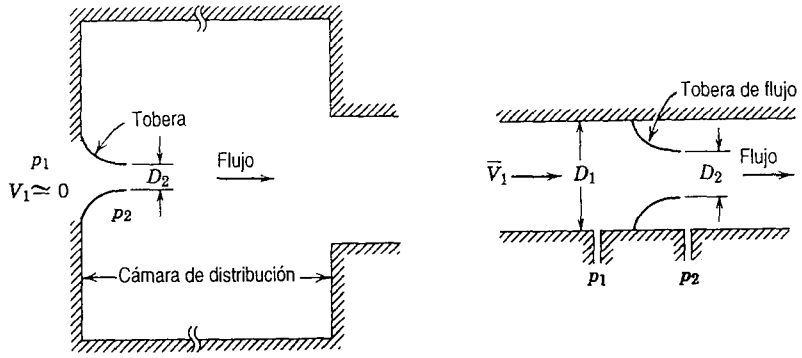


Fig. 8.23 Coeficientes de flujo para orificios concéntricos con tomas piezométricas.

El problema ejemplo 8.12, que aparece después en esta sección, ilustra la aplicación de los datos del coeficiente de flujo para determinar el tamaño del orificio.

8-10.2 La tobera de flujo

Las toberas de flujo pueden emplearse como elementos de medición ya sea en cámaras de distribución o en ductos, como se muestra en la figura 8.24; la sección de la tobera es aproximadamente un cuarto de elipse. Los detalles de diseño y las posiciones recomendadas para las tomas de presión se dan en [24]



a) En cámara *b*) En ducto

Fig. 8.24 Instalaciones típicas de medidores de flujo de tobera.

La ecuación de correlación recomendada para una tobera de flujo de radio largo ASME [8] es

$$C = 0.9975 - \frac{6.53\beta^{0.5}}{Re_{D_1}^{0.5}} \tag{8.55}$$

La ecuación 8.55 predice coeficientes de descarga para toberas de flujo dentro de ±2.0 por ciento para $0.25 < \beta < 0.75$ para $10^4 < Re_{D_1} < 10^7$. Algunos coeficientes de flujo calculados a partir de las ecuaciones 8.55 y 8.50 se presentan en la figura 8.25. (K puede ser mayor que uno cuando la velocidad del factor de aproximación supera uno.)

a. Instalación en tubería

Para la instalación en tubería, K debe leerse de la figura 8.25. Esta figura muestra que K es en esencia independiente del número de Reynolds para $Re_{D_1} > 10^6$. De manera que a flujos altos, el flujo puede calcularse directamente empleando la ecuación 8.51. A flujos más bajos, donde K es una función débil del número de Reynolds, es posible que se requiera iteración.

b. Instalación en una cámara de distribución

Para la instalación en una cámara de distribución, las toberas deben fabricarse a partir de aluminio moldeado por centrifugación, fibra de vidrio moldeada u otros materiales económicos. Es por ello

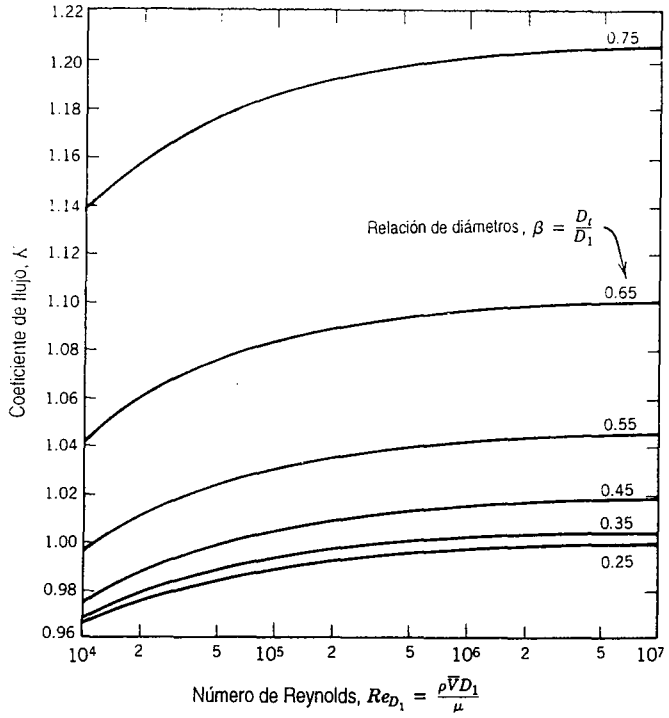


Fig. 8.25 Coeficientes de flujo para toberas de flujo de radio largo ASME.

que son sencillas y baratas en cuanto a su fabricación e instalación. Como la presión de la cámara de distribución es igual a p_2, la localización de la toma de presión aguas abajo no es crítica. Es posible integrar medidores adecuados para un amplio rango de flujos, instalando varias toberas en una cámara de distribución. A flujos bajos, la mayor parte de ellos puede conectarse. Para grandes flujos, pueden emplearse más toberas.

Para toberas en la cámara de distribución, los coeficientes de flujo típicos están en el intervalo de $0.95 < K < 0.99$; los valores mayores se aplican a números de Reynolds altos. De modo que la masa del flujo puede calcularse dentro de aproximadamente ± 2 por ciento, empleando la ecuación 8.51 con $K = 0.97$.

8-10.3 El venturi

Los medidores venturi, como el dibujado en la tabla 8.5, se elaboran por lo general a partir de fundiciones y se maquinan hasta tolerancias cercanas para duplicar el rendimiento del diseño estándar. Como resultado, los medidores venturi son pesados, voluminosos y costosos. La sección aguas abajo a partir de la garganta del difusor cónico brinda una excelente recuperación de presión; en consecuencia, la pérdida de carga total es baja. Los medidores venturi ofrecen la característica de autolimpieza debido a sus contornos internos lisos.

Los datos experimentales muestran que los coeficientes de descarga para medidores venturi varían de 0.980 a 0.995 a números de Reynolds elevados ($Re_{D_t} > 2 \times 10^5$). De modo que $C = 0.99$ puede utilizarse para medir el flujo másico dentro de aproximadamente ± 1 por ciento a

números de Reynolds altos [8]. Es necesario consultar la información de los fabricantes en cuanto a datos específicos a números de Reynolds por abajo de 10^5.

La placa de orificio, la tobera de flujo y el venturi producen caídas de presión proporcionales al cuadrado del flujo, de acuerdo con la ecuación 8.51. En la práctica, debe elegirse un tamaño de medidor que se ajuste al mayor flujo esperado. En virtud de que la relación de la caída de presión contra el flujo es no lineal, es posible medir con precisión un intervalo limitado de flujo. Los medidores de flujo con gargantas simples suelen considerarse para flujos sobre un intervalo de 4:1 [8].

La pérdida irrecuperable en la carga a través de un elemento de medición puede expresarse como una fracción de la presión diferencial, Δp, a través del elemento. Las pérdidas de presión se presentan con funciones de la razón de diámetro en la figura 8.26 [8].

8-10.4 El elemento de flujo laminar

El elemento de flujo laminar[5] se diseña para producir un diferencial de presión directamente proporcional al flujo. El elemento de flujo laminar (EFL) consta de una sección de medición subdividida en muchos pasajes, cada uno de ellos suficientemente pequeño en diámetro para asegurar el flujo laminar completamente desarrollado. Como se muestra en la sección 8-3, la caída de presión en el flujo laminar en un ducto es directamente proporcional al flujo. En vista de que la relación de la caída de presión contra el flujo es lineal, es posible emplear el EFL con precisión razonable sobre un intervalo de 10:1 del flujo. La relación entre la caída de presión y el caudal para flujo laminar depende también de la viscosidad, la cual es una fuerte función de la temperatura. En consecuencia, la temperatura del fluido debe conocerse para obtener mediciones precisas con el EFL.

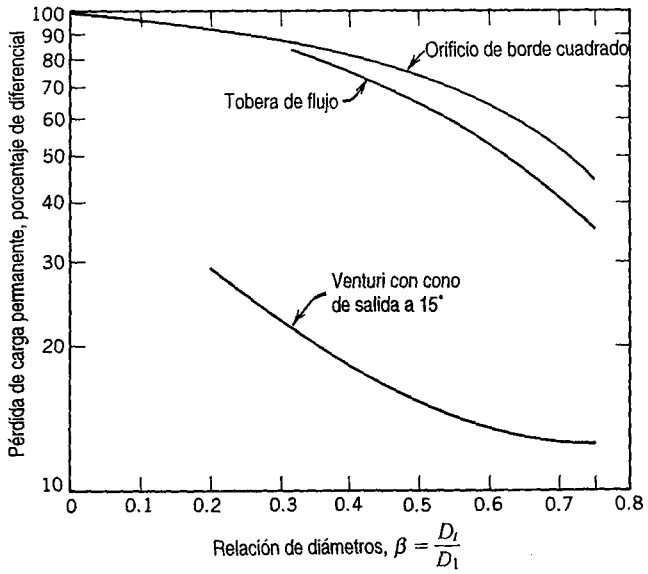


Fig. 8.26 Pérdida de carga permanente producida por diversos elementos de medición de flujo [8].

[5] Patentado y fabricado por Meriam Instrument Co., 10920 Madison Ave., Cleveland, Ohio.

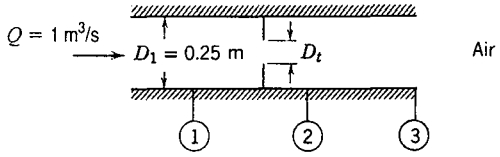
Un elemento de flujo laminar cuesta aproximadamente lo mismo que un venturi, pero es mucho más ligero y pequeño. Así, el EFL se emplea cada vez más ampliamente en aplicaciones donde lo compacto y el amplio intervalo son importantes.

EJEMPLO 8.12 Flujo a través de un medidor de orificio

Se espera un flujo de aire de 1 m³/s en condiciones estándar en un ducto de 0.25 m de diámetro. Un medidor de orificio se emplea para medir el flujo. El manómetro disponible para efectuar la medición tiene un intervalo máximo de 300 mm de agua. ¿Qué diámetro de la placa de orificio debe emplearse con tomas de esquina? Analice la pérdida de carga si el área de flujo en la vena contracta es $A_2 = 0.65\,A_t$. Compare con los datos de la figura 8.26.

PROBLEMA EJEMPLO 8.12

DATOS: El flujo a través de un ducto y un orificio según se muestra.



$(p_1 - p_2)_{máx} = 300$ mm H_2O

ENCUENTRE: *a*) D_t.
b) La pérdida de carga entre las secciones ① y ③.
c) Compare con los datos de la figura 8.26.

SOLUCIÓN:
La placa de orificio puede diseñarse empleando la ecuación 8.51 y los datos de la figura 8.23.

Ecuación de cálculo: $$\dot{m}_{real} = K A_t \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \tag{8.51}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo incompresible

Como $A_t/A_1 = (D_t/D_1)^2 = \beta^2$,

$$\dot{m}_{real} = K \beta^2 A_1 \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}$$

o

$$K\beta^2 = \frac{\dot{m}_{real}}{A_1\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}} = \frac{\rho Q}{A_1\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}} = \frac{Q}{A_1}\sqrt{\frac{\rho}{2(p_1 - p_2)}}$$

$$= \frac{Q}{A_1}\sqrt{\frac{\rho}{2g\rho_{H_2O}\Delta h}}$$

$$= \frac{1\ \text{m}^3}{\text{s}} \times \frac{4}{\pi}\frac{1}{(0.25)^2\ \text{m}^2}\left[\frac{1}{2} \times 1.23\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{s}^2}{9.81\ \text{m}} \times \frac{\text{m}^3}{999\ \text{kg}} \times \frac{1}{0.30\ \text{m}}\right]^{1/2}$$

$$K\beta^2 = 0.295 \quad \text{o} \quad K = \frac{0.295}{\beta^2} \tag{1}$$

ue un venturi, pero es
mente en aplicaciones

le 0.25 m de diámetro.
onible para efectuar la
de la placa de orificio
rea de flujo en la vena

a figura 8.23.

(8.51)

$$\frac{1}{0.30\ \text{m}}\Big]^{1/2}$$

(1)

Como K es una función tanto de β como de Re_{D_t}, debemos iterar para encontrar β. El número de Reynolds del ducto es

$$Re_{D_1} = \frac{\rho \bar{V}_1 D_1}{\mu} = \frac{\rho(Q/A_1)D_1}{\mu} = \frac{4Q}{\pi \nu D_1}$$

$$Re_{D_1} = \frac{4}{\pi} \times \frac{1\ \text{m}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1.45 \times 10^{-5}\ \text{m}^2} \times \frac{1}{0.25\ \text{m}} = 3.51 \times 10^5$$

Suponiendo $\beta = 0.75$. De la figura 8.23, K debe ser 0.72. De la ecuación 1,

$$K = \frac{0.295}{(0.75)^2} = 0.524$$

Por lo que nuestra suposición para β es demasiado grande. Suponga $\beta = 0.70$. De la figura 8.23, K debe ser 0.69. De la ecuación 1,

$$K = \frac{0.295}{(0.70)^2} = 0.602$$

En consecuencia, nuestra suposición para β sigue siendo demasiado grande. Suponga $\beta = 0.65$. De la figura 8.23, K debe ser 0.67. De la ecuación 1,

$$K = \frac{0.295}{(0.65)^2} = 0.698$$

Hay concordancia satisfactoria con $\beta \simeq 0.66$ y

$$D_t = \beta D_1 = 0.66(0.25\ \text{m}) = 0.165\ \text{m} \longleftarrow D_t$$

Para evaluar la pérdida de carga permanente, aplique la ecuación 8.28 entre las secciones (1) y (3). Calculando la ecuación:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1\right) - \left(\frac{p_3}{\rho} + \alpha_3 \frac{\bar{V}_3^2}{2} + g z_3\right) = h_{l_T} \tag{8.28}$$

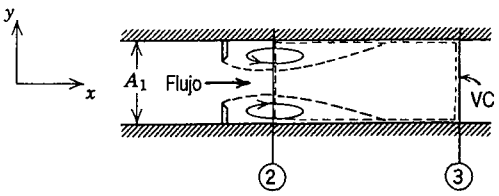
Suposiciones: 3) $\alpha_1 \bar{V}_1^2 = \alpha_3 \bar{V}_3^2$

4) Se desprecia Δz

Entonces,

$$h_{l_T} = \frac{p_1 - p_3}{\rho} = \frac{p_1 - p_2 - (p_3 - p_2)}{\rho} \tag{2}$$

La presión en (3) puede encontrarse aplicando la componente x de la ecuación del momento al volumen de control entre las secciones (2) y (3).



$A_2 = A_{\text{vena contracta}}$

Ecuación básica: $= 0(5) = 0(1)$

$$F_{S_x} - F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall + \int_{SC} u\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Suposiciones:
5) $F_{B_x} = 0$
6) Flujo uniforme en las secciones (2) y (3)
7) Presión uniforme a través del ducto en las secciones (2) y (3)
8) Se desprecia la fuerza de fricción sobre el VC

Por tanto,

$$(p_2 - p_3)A_1 = u_2\{-|\rho\vec{V}_2A_2|\} + u_3\{|\rho\vec{V}_3A_3|\} = (u_3 - u_2)\rho Q = (\vec{V}_3 - \vec{V}_2)\rho Q$$

o

$$p_3 - p_2 = (\vec{V}_2 - \vec{V}_3)\frac{\rho Q}{A_1}$$

Después de esto, $\vec{V}_3 = Q/A_1$, y

$$\vec{V}_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{0.65A_t} = \frac{Q}{0.65\beta^2 A_1}$$

Por consiguiente,

$$p_3 - p_2 = \frac{\rho Q^2}{A_1^2}\left[\frac{1}{0.65\beta^2} - 1\right]$$

$$p_3 - p_2 = 1.23\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (1)^2\ \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2} \times \frac{4^2}{\pi^2}\frac{1}{(0.25)^4\ \text{m}^4}\left[\frac{1}{0.65(0.66)^2} - 1\right]\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$p_3 - p_2 = 1290\ \text{N/m}^2$$

La razón de diámetro, β, se seleccionó para brindar la separación máxima del manómetro a un flujo máximo. En consecuencia,

$$p_1 - p_2 = \rho_{H_2O} g\Delta h = 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.30\ \text{m} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} = 2940\ \text{N/m}^2$$

Al sustituir en la ecuación 2, se obtiene

$$h_{l_T} = \frac{p_1 - p_3}{\rho} = \frac{p_1 - p_2 - (p_3 - p_2)}{\rho}$$

$$h_{l_T} = (2940 - 1290)\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^3}{1.23\ \text{kg}} = 1340\ \text{N}\cdot\text{m/kg} \longleftarrow h_{l_T}$$

Para comparar con la figura 8.26, exprese la pérdida de presión permanente como una fracción de la diferencial del medidor

$$\frac{p_1 - p_3}{p_1 - p_2} = \frac{(2940 - 1290)\ \text{N/m}^2}{2940\ \text{N/m}^2} = 0.561$$

La fracción de la figura 8.26 es aproximadamente 0.57. ¡Ésta es una concordancia satisfactoria!

Este problema ilustra los cálculos de medidores de flujo y muestra el empleo de la ecuación del momento para calcular el aumento de presión en una expansión repentina.

8-11 MEDIDORE

Vari
Esto
de fl

gase
tapa
flota
calib

(figu
la ro

de p
tanto
de tu
seña

se se
0.21
La s
y ag
para
(El p
flujo

una
gene

8-11 MEDIDORES DE FLUJO LINEALES

Varios tipos de medidores de flujo producen salidas que son directamente proporcionales al flujo. Estos medidores generan señales sin la necesidad de medir la presión diferencial. Los medidores de flujo lineales más comunes se analizan brevemente en los siguientes párrafos.

Los *medidores de flotador* pueden utilizarse para indicar el flujo directamente en líquidos o gases. Un ejemplo se muestra en la figura 8.27. En operación, la bola o flotador sube en un tubo tapado transparente, por medio del fluido que fluye hasta que la fuerza de arrastre y el peso del flotador se equilibran. Tales medidores (llamados a menudo rotámetros) se pueden encontrar con calibración de fábrica para varios fluidos comunes e intervalos de flujo.

Un propulsor de paletas de marcha libre puede montarse en una sección de tubo cilíndrica (figura 8.28) para hacer un *medidor de flujo de turbina*. Con el diseño apropiado, es posible hacer la rotación del propulsor casi proporcional al flujo volumétrico en un amplio intervalo.

La velocidad rotacional del elemento de turbina puede registrarse empleando un recolector de portadora magnético o modulado, externo al medidor. Este método de registro requiere, por tanto, que no existan ni penetraciones ni obturaciones en el ducto. Por ello, los medidores de flujo de turbina pueden utilizarse con seguridad para medir el flujo en fluidos tóxicos o corrosivos. La señal eléctrica puede exhibirse, grabarse o integrarse para brindar la información total del flujo.

La separación de vórtice de una obstrucción simulada puede emplearse para medir flujo. Como se señaló en el capítulo 7, el número de Strouhal, $St = fL/V$, es aproximadamente constante ($St \approx 0.21$). Por ello, la frecuencia de la separación de vórtice, f, es proporcional a la velocidad del flujo. La separación de vórtice de la obstrucción origina cambios en la velocidad y la presión alrededor y aguas abajo de la obstrucción. Es posible utilizar sensores de presión, térmicos o ultrasónicos para detectar la frecuencia de separación de vórtice y, de ese modo, deducir la velocidad del fluido. (El perfil de velocidad no afecta la constancia de la frecuencia de separación.) Los medidores de flujo de vórtice pueden utilizarse en un intervalo de 20:1 del flujo [8].

El medidor de flujo electromagnético emplea el principio de la inducción magnética. Se crea una campo magnético a través de una tubería. Cuando un fluido conductivo pasa por el campo, se genera un voltaje en ángulos rectos al campo y los vectores de velocidad. Los electrodos colocados

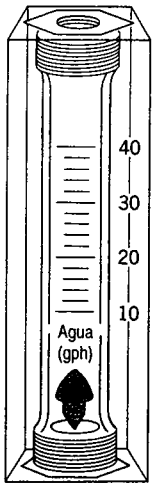


Fig. 8.27 El rotámetro es un medidor de flujo de área variable tipo flotador. (Cortesía de Dwyer Instrument Co., Ciudad de Michigan, Indiana.)

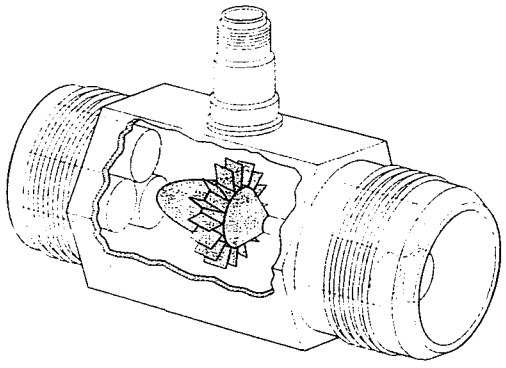


Fig. 8.28 Medidor de flujo de turbina. (Cortesía de Potter Aeronautical Corp., Union, Nueva Jersey.)

sobre un diámetro de tubería se emplean para detectar la señal de voltaje resultante. Ésta es proporcional a la velocidad axial promedio cuando el perfil es axisimétrico.

Los medidores de flujo magnéticos pueden usarse con líquidos que tienen conductividades eléctricas por arriba de 100 microsiemens por metro (1 siemen = 1 ampere por volt). La velocidad de flujo mínima debe ser superior a aproximadamente 0.3 m/s, pero no hay restricciones en el número de Reynolds. El intervalo de flujo citado normalmente es 10:1 [8].

Los medidores de flujo ultrasónico responden también a la velocidad promedio en una sección transversal de tubería. Son comunes dos tipos principales de medidores ultrasónicos: el tiempo de propagación se mide para líquidos limpios y el corrimiento de la frecuencia de reflexión (efecto Doppler) se mide para flujos que transportan partículas. La velocidad de una onda acústica aumenta en la dirección del flujo y disminuye cuando se transmite contra el flujo. En líquidos limpios, se emplea una trayectoria acústica inclinada al eje de la tubería para deducir la velocidad de flujo. En la práctica, se utilizan trayectorias múltiples para estimar el flujo volumétrico con exactitud.

Los medidores de flujo ultrasónicos de efecto Doppler dependen de la reflexión de las ondas sonoras (en el intervalo de MHz) en partículas dispersas en el fluido. Cuando las partículas se mueven a la velocidad del flujo, el corrimiento de la frecuencia es proporcional a la velocidad del flujo; para un trayectoria elegida de manera apropiada, la salida es proporcional al flujo volumétrico. Es posible emplear uno o dos transductores; el medidor puede engancharse en el exterior de la tubería. Los medidores ultrasónicos pueden requerir calibración en el sitio. El intervalo del flujo es 10:1 [8].

8-12 MÉTODOS TRANSVERSALES

En algunas situaciones, por ejemplo en equipo de distribución de aire o de refrigeración, resulta impráctico o imposible instalar medidores de flujo fijos. En tales casos puede ser posible obtener datos del flujo empleando técnicas transversales.

Para efectuar una medición transversal del flujo, la sección transversal del ducto se subdivide en segmentos de igual área. La velocidad se mide en el centro de cada segmento de área empleando un tubo de pitot, un tubo de carga total o un anemómetro apropiado. El flujo volumétrico para cada segmento es aproximado por el producto de la velocidad medida y el área del segmento. El flujo a través del ducto completo es la suma de estos flujos segmentados. Los detalles de procedimientos recomendados para las mediciones del flujo por medio del método transversal se presentan en [25].

El empleo de tubos de pitot o de tubos estáticos de pitot para las mediciones transversales

requiere
cuando
de resp
estas di
Lo
caliente
realime
registra
velocid
térmico
pequeñ
elemen
flujo es
Por ello
mientos
corrosiv
De
ampliar
resultar
pueden
conteni
Lo
das don
se enfo
partícul
propósi
luz dis
corrimi
por lo c
afectad
princip
alineac

8-13 RESUMEN D

Después

1.

2.

requiere el acceso directo al campo de flujo. Los tubos de pitot proporcionan resultados inciertos cuando se presentan los gradientes de presión o la curvatura de la línea de corriente, y sus tiempos de respuesta son lentos. Dos tipos de anemómetro —el térmico y el de láser Doppler— superan estas dificultades parcialmente, aunque introducen nuevas complicaciones.

Los anemómetros térmicos emplean elementos diminutos (ya sea elementos de alambre caliente o de película caliente) que se calientan eléctricamente. Los complejos circuitos de realimentación electrónica se emplean para mantener la temperatura del elemento constante y para registrar la transferencia de calor de entrada. La transferencia de calor puede relacionarse con la velocidad del flujo local por medio de calibración. La ventaja principal de los anemómetros térmicos es el pequeño tamaño del elemento registrador. Se disponen comercialmente sensores tan pequeños como 0.002 mm de diámetro y 0.1 mm de largo. Puesto que la masa térmica de tales elementos diminutos es en extremo pequeña, su respuesta a las fluctuaciones en la velocidad del flujo es rápida. Las respuestas de frecuencia hasta el intervalo de 50 kHz han sido citadas por [26]. Por ello los anemómetros térmicos son ideales para medir cantidades de turbulencia. Los recubrimientos internos pueden aplicarse para permitir su empleo en conductores o gases o líquidos corrosivos.

Debido a su rápida respuesta y a su pequeño tamaño, los anemómetros térmicos se emplean ampliamente en la investigación. Se han publicado numerosos esquemas que tratan los datos resultantes. Las técnicas de procesamiento digital, incluso las transformaciones de Fourier rápidas, pueden aplicarse a señales para obtener los valores y momentos medios, así como para analizar el contenido y la correlación de la frecuencia.

Los anemómetros láser-Doppler (ALD) cada vez se utilizan más en aplicaciones especializadas donde el acceso físico directo al campo de flujo es difícil o imposible. Uno o más haces láser se enfocan en un pequeño volumen en el flujo en la posición de interés. La luz láser se dispersa en partículas que se encuentran presentes en el flujo (polvo o partículas) o se introducen para este propósito. La velocidad de flujo local provoca un corrimiento de frecuencia (efecto Doppler). La luz dispersada y el rayo de referencia se colectan mediante equipos ópticos de recepción. El corrimiento de frecuencia es proporcional a la velocidad del flujo; esta relación puede calcularse, por lo que no hay necesidad de calibrar. Como la velocidad se mide directamente, la señal no es afectada por los cambios en la temperatura, la densidad o la composición en el campo de flujo. La principal desventaja de los ALD es que el equipo óptico es caro y frágil, además de requerirse una alineación en extremo cuidadosa.

8-13 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 8, usted será capaz de efectuar lo siguiente:

1. Definir:

flujo interno	coeficiente de flujo de energía cinética
longitud de entrada	coeficiente de flujo de momento
flujo completamente desarrollado	pérdida de carga
velocidad de fricción	pérdidas de carga mayor y menor
esfuerzo de Reynolds	diámetro hidráulico

2. Para flujos laminares completamente desarrollados, aplicar la ecuación de la segunda ley de Newton

para un volumen de control a un volumen de control diferencial elegido adecuadamente para determinar: la distribución de velocidad, la distribución de los esfuerzos de corte, el flujo volumétrico, la velocidad promedio y la localización de la velocidad máxima.

3. Para flujo completamente desarrollado en una tubería, determinar el esfuerzo de corte de pared y la variación del esfuerzo de corte en el flujo en términos del gradiente de presión.
4. Para flujo turbulento completamente desarrollado en una tubería, con la distribución de velocidad representada por un perfil de la ley exponencial, determinar $\bar{V}/U$.
5. Escribir la primera ley de la termodinámica en una forma adecuada para la solución de problemas de flujo en tubería.
6. Emplear el diagrama de Moody para determinar el factor de fricción para flujo completamente desarrollado en tubería.
7. Resolver problemas de sistemas de flujo de una trayectoria simple para cada uno de los cuatro casos analizados en la sección 8-8.1; dibujar las líneas de distribución de presión y de los gradientes hidráulico y de energía.
**8. Emplear las técnicas básicas de la sección 8-8.1 para analizar sistemas de flujo en tubería de trayectoria múltiple.
9. Determinar el flujo másico a partir del diferencial de presión medido empleando una placa de orificio, una tobera de flujo o un medidor venturi.
10. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionan con el material que ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Streeter, V. L., ed., *Handbook of Fluid Dynamics.* Nueva York: McGraw-Hill, 1961.
2. Rouse, H., y S. Ince, *History of Hydraulics.* Nueva York: Dover, 1957.
3. Laufer, J., "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow", U.S. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Reporte técnico 1174, 1954.
4. Tennekes, H., y J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence.* Cambridge, MA: The MIT Press, 1972.
5. Hinze, J. O., *Turbulence*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1975.
6. Moody, L. F., "Friction Factors for Pipe Flow", *Transactions of the ASME, 66*, 8, noviembre 1944, pp. 671-684.
7. Colebrook, C. F., "Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws", *Journal of the Institution of Civil Engineers, Londres, 11*, 1938-39, pp. 133-156.
8. Miller, R. W., *Flow Measurement Engineering Handbook*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1985.
9. Swamee, P. K., y A. K. Jain, "Explicit Equations for Pipe-Flow Problems", *Proceedings of the ASCE. Journal of the Hydraulics Division, 102*, HY5, mayo 1976, pp. 657-664.
10. "Flow of Fluids through Valves, Fittings, and Pipe", Nueva York: Crane Company, Technical Paper No. 410, 1982.
11. *ASHRAE Handbook —Fundamentals.* Atlanta, GA: American Society of Heating, Refrigerating, and Air Conditioning Engineers, Inc., 1981.
12. Cockrell, D. J., y C. I. Bradley, "The Response of Diffusers to Flow Conditions at Their Inlet", Paper No. 5, *Symposium on Internal Flows*, University of Salford, Salford, England, abril 1971, pp. A32-A41.
13. Sovran, G., y E. D. Klomp, "Experimentally Determined Optimum Geometries for Rectilinear Diffusers

** Este objetivo se aplica a una sección que puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

with I
Sovra
14. Feiere
Flow
Mech
1972,
15. McDo
Diffu
16. Runst
17. Renea
Diffu
18. *Aeros*
19. Daily
20. Whit
21. Hami
Wash
22. Hersc
40-1(
23. Lam,
Equa
335-
24. Bean
Mecl
25. ISO
of Ve
Gine
26. Gold
27. Potte

PROBLEMAS

8.1 A
el
c

8.2 P
r
d

8.3 P
r
t

8.4 P
r
d

8.5 F
F
l

8.6 (

with Rectangular, Conical, or Annular Cross-Sections", en *Fluid Mechanics of Internal Flows*, G. Sovran, ed. Amsterdam: Elsevier, 1967.

14. Feiereisen, W. J., R. W. Fox, y A. T. McDonald, "An Experimental Investigation of Incompressible Flow without Swirl in R-Radial Diffusers", Proceedings, Second International Japan Society of Mechanical Engineers Symposium on Fluid Machinery and Fluidics, Tokyo, Japón, septiembre 4-9, 1972, pp. 81-90.
15. McDonald, A. T., y R. W. Fox, "An Experimental Investigation of Incompressible Flow in Conical Diffusers", *International Journal of Mechanical Sciences*, 8, 2, febrero 1966, pp. 125-139.
16. Runstadler, P. W., Jr., "Diffuser Data Book", Hanover, NH: Creare, Inc., Nota técnica 186, 1975.
17. Reneau, L. R., J. P. Johnston, y S. J. Kline, "Performance and Design of Straight, Two-Dimensional Diffusers", *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, 89D*, 1, marzo 1967, pp. 141-150.
18. *Aerospace Applied Thermodynamics Manual*, Nueva York: Society of Automotive Engineers, 1969.
19. Daily, J. W., y D. R. F. Harleman, *Fluid Dynamics*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
20. White, F. M., *Fluid Mechanics*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1986.
21. Hamilton, J. B., "The Suppression of Intake Losses by Various Degrees of Rounding", University of Washington, Seattle, WA, Experiment Station Bulletin 51, 1929.
22. Herschel, C., *The Two Books on the Water Supply of the City of Rome, from Sextus Julius Frontinus* (ca. 40-103 A.D.). Boston, 1899.
23. Lam, C. F., y M. L. Wolla, "Computer Analysis of Water Distribution Systems: Part 1, Formulation of Equations", *Proceedings of the ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 98*, HY2, febrero 1972, pp. 335-344.
24. Bean, H. S., ed., *Fluid Meters, Their Theory and Application*. Nueva York: American Society of Mechanical Engineers, 1971.
25. ISO 7145, *Determination of Flowrate of Fluids in Closed Conduits or Circular Cross Sections —Method of Velocity Determination at One Point in the Cross Section*, ISO UDC 532.57.082.25:532.542, 1a. ed. Ginebra: International Standards Organization, 1982.
26. Goldstein, R. J., ed., *Fluid Mechanics Measurements*. Washington, D.C.: Hemisphere, 1983.
27. Potter, M. C., y J. F. Foss, *Fluid Mechanics*. Nueva York: Ronald, 1975.

PROBLEMAS

8.1 Aire estándar entra a un ducto de 0.3 m de diámetro. El flujo volumétrico es 2 m^3/min. Determine si el flujo es laminar o turbulento. Estime la longitud de entrada requerida para establecer flujo completamente desarrollado.

8.2 Para flujo en tubos circulares, la transición a flujo turbulento en sistemas de ingeniería rara vez es retardada pasando de $Re = 2300$. En una gráfica log-log de la velocidad promedio contra el diámetro del tubo, dibuje las líneas que correspondan a $Re = 2300$ para *a*) aire estándar y *b*) agua a 15 C.

8.3 Para flujo en tubos circulares, la transición a flujo turbulento en sistemas de ingeniería rara vez es retardada pasando de $Re = 2300$. En una gráfica log-log del flujo volumétrico contra el diámetro del tubo, dibuje las líneas que correspondan a $Re = 2300$ para *a*) aire estándar y *b*) agua a 15 C.

8.4 Para flujo en tubos circulares, la transición a flujo turbulento en sistemas de ingeniería rara vez es retardada pasando de $Re = 2300$. En una gráfica log-log del flujo másico contra el diámetro del tubo, dibuje las líneas que correspondan a $Re = 2300$ para *a*) aire estándar y *b*) agua a 15 C.

8.5 Para flujo laminar en una tubería de 12.7 mm de diámetro, determine *a*) el máximo flujo volumétrico permisible si el fluido es agua y *b*) la velocidad promedio máxima si el fluido es aire. ¿Cuál es la longitud de entrada correspondiente?

8.6 Considere flujo incompresible en un canal circular. Deduzca expresiones generales para el número

de Reynolds en términos de *a*) el flujo volumétrico y el diámetro del tubo y *b*) el flujo másico y el diámetro del tubo. El número de Reynolds es 1800 en una sección donde el diámetro del tubo es 10 mm. Encuentre el número de Reynolds para el mismo flujo en una sección donde el diámetro del tubo es 6 mm.

8.7 El perfil de velocidad para flujo completamente desarrollado entre placas paralelas estacionarias está dado por $u = ay(h - y)$, donde a es una constante. h es el ancho total de la separación entre las placas y y es la distancia medida hacia arriba desde la placa inferior. Determine la razón $V/u_{máx}$.

8.8 Un fluido incompresible fluye entre dos placas paralelas estacionarias infinitas. El perfil de velocidad está dado por $u = u_{máx}(Ay^2 + By + C)$, donde A, B y C son constantes y y se mide desde el centro de la separación. El ancho total de la separación es h unidades. Emplee condiciones de frontera apropiadas para expresar la magnitud y las unidades de las constantes en términos de h. Desarrolle una expresión para el flujo volumétrico por unidad de profundidad y evalúe la razón $V/u_{máx}$.

8.9 Un aceite viscoso fluye establemente entre placas paralelas. El flujo es laminar y completamente desarrollado. El ancho total de la separación entre las placas es $h = 3$ mm. La viscosidad del aceite es 0.5 N · s/m^2 y el gradiente de presión es −1200 N/m^2/m. Encuentre la magnitud y la dirección del esfuerzo de corte sobre la placa superior y el flujo volumétrico a través del canal, por metro de ancho.

8.10 Aceite viscoso fluye establemente entre placas paralelas. El flujo está completamente desarrollado y es laminar. El gradiente de presión es −8 lbf/pie^2/pie y el ancho medio del canal es $h = 0.06$ pulg. Calcule la magnitud y dirección del esfuerzo de corte de pared en la superficie de la placa superior. Determine el flujo volumétrico a través del canal ($\mu = 0.01$ lbf · s/pie^2).

8.11 Un fluido fluye establemente entre dos placas paralelas. El flujo está completamente desarrollado y es laminar. La distancia entre las placas es h.

a) Deduzca una ecuación para el esfuerzo de corte como una función de y. Grafique esta función.

b) Para $\mu = 2.4 \times 10^{-5}$ lbf · s/pie^2, $\partial p/\partial x = -4.0$ lbf/pie^2/pie y $h = 0.05$ pulg, calcule el esfuerzo de corte máximo, en lbf/pie^2.

8.12 Un gato hidráulico soporta una carga de 20,000 libras. Se cuenta con los siguientes datos:

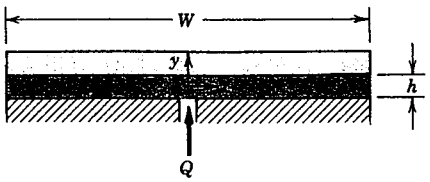
Diámetro del émbolo	4.0 pulg
Separación radial entre el émbolo y el cilindro	0.002 pulg
Longitud del émbolo	4.8 pulg

Estime la relación de fuga del fluido hidráulico del lado del émbolo, suponiendo que el fluido es aceite SAE 30 a 80 F.

8.13 Se confina aceite en un cilindro de 4 pulg de diámetro mediante un émbolo que tiene una separación radial de 0.001 pulg y una longitud de 2 pulg. Se aplica una fuerza estable de 5000 libras al émbolo. Suponga las propiedades del aceite SAE 30 a 120 F. Estime la relación a la cual el aceite se fuga más allá del émbolo.

8.14 Se crea una alta presión en un sistema por medio de un pequeño arreglo de cilindro-émbolo. El diámetro del émbolo es 0.25 pulg y se extiende 2 pulg dentro del cilindro. La separación radial entre el émbolo y el cilindro es 10^{-4} pulg. Ignore las deformaciones elásticas del émbolo y el cilindro debidas a la presión. Suponga que las propiedades del fluido son las del aceite SAE 10W a 100 F. Cuando la presión en el cilindro es 100 000 psi, estime la relación de fuga.

8.15 Un cojinete hidrostático soportará una carga de 3600 libras por pie de longitud perpendicular al diagrama. El cojinete está provisto con aceite SAE 30 a 100 F y 100 psig a través de la hendidura



P8.15

8.16

8.17

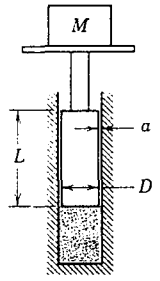
8.18

8.19

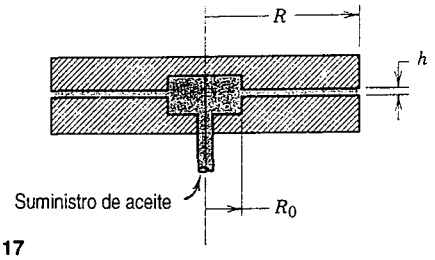
8.20

central. Puesto que el aceite es viscoso y la separación es pequeña, el flujo puede considerarse completamente desarrollado. Calcule *a*) el ancho requerido de la almohadilla del cojinete, *b*) el gradiente de presión resultante, dp/dx, y *c*) la altura de la separación, si $Q = 0.0006$ pies^3/min por pie de longitud.

8.16 El componente básico de un probador de presión manométrica consta de un aparato de cilindro-émbolo, como se muestra. El émbolo, de 6 mm de diámetro, se carga para desarrollar una presión de magnitud conocida. (La longitud del émbolo es 25 mm.) Calcule la masa, M, requerida para producir 1.5 MPa (manométrica) en el cilindro. Determine el flujo de fuga como una función de la separación radial, a, para esta carga si el líquido es aceite SAE 30 a 20 C. Especifique la separación radial máxima permisible de modo que el movimiento vertical del émbolo debido a la fuga sea menor que 1 mm/min.



P8.16



P8.17

8.17 Se bombea un líquido viscoso, a un flujo volumétrico Q, a través de la abertura central dentro de la estrecha separación entre los discos paralelos mostrados. El flujo es bajo, por lo que el flujo es laminar, y el gradiente de presión debido a la aceleración convectiva en la separación es despreciable comparado con el gradiente que resulta de las fuerzas viscosas (éste recibe el nombre de *flujo capilar*). Obtenga una expresión general para la variación de la velocidad promedio en la separación entre los discos. Para flujo capilar, el perfil de velocidad en cualquier sección transversal en la separación es el mismo que para el flujo completamente desarrollado entre placas paralelas estacionarias. Evalúe el gradiente de presión, dp/dr, como una función del radio. Obtenga una expresión para $p(r)$. Demuestre que la fuerza neta requerida para mantener la placa superior en la posición mostrada es

$$F = \frac{3\mu Q R^2}{h^3}\left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]$$

8.18 Dos capas inmiscibles de líquido viscoso fluyen entre largas placas paralelas. El espacio entre $y = 0$ y $y = b$ se llena con el líquido 1, que tiene las propiedades ρ_1 y μ_1. El espacio entre $y = -b$ y $y = 0$ se llena con el líquido 2, que tiene las propiedades ρ_2 y μ_2. Encuentre la distribución de velocidad si el gradiente de presión es $\partial p/\partial x = -K$.

8.19 Considere el simple modelo de la ley exponencial para un fluido no newtoniano dado por la ecuación 2.11. Extienda el análisis de la sección 8-2.1 para mostrar que el perfil de velocidad para flujo laminar completamente desarrollado de un fluido de la ley exponencial entre placas paralelas separado por la distancia $2h$, puede escribirse

$$u = \left(\frac{h}{k}\frac{\Delta p}{L}\right)^{1/n}\frac{nh}{n+1}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

donde y es la coordenada medida desde la línea central del canal.

8.20 Evalúe el flujo volumétrico para el flujo laminar completamente desarrollado de un fluido de la ley exponencial, que se encuentra entre placas paralelas estacionarias (problema 8.19). Demuestre que el perfil de velocidad puede escribirse

$$\frac{u}{\bar{V}} = \frac{2n+1}{n+1}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

donde y es la coordenada medida desde la línea central del canal.

8.21 Un cojinete de chumacera sellado se forma a partir de cilindros concéntricos. Los radios interior y exterior son 25 y 26 mm y la longitud de la chumacera es 100 mm, la cual gira a 2800 rpm. La separación se llena con aceite en movimiento laminar. El perfil de velocidad es lineal a través de la separación. El momento de torsión necesario para hacer girar la chumacera es 0.2 N · m. Calcule la viscosidad del aceite. ¿El momento de torsión aumentará o disminuirá con el tiempo? ¿Por qué?

8.22 Considere el flujo laminar completamente desarrollado entre placas paralelas infinitas separadas por un claro de ancho $d = 0.35$ pulg. La placa superior se mueve hacia la derecha con velocidad $U_2 =$ 2 pies/s; la placa inferior se mueve hacia la izquierda con velocidad $U_1 = 1$ pie/s. El gradiente de presión en la dirección del flujo es cero. Desarrolle una expresión para la distribución de velocidad en la separación. Encuentre el flujo volumétrico por unidad de profundidad que pasa por una sección transversal dada.

8.23 Considere el flujo laminar completamente desarrollado entre placas paralelas infinitas separadas por un claro de ancho h. La placa superior se mueve hacia la derecha con velocidad U_2; la placa inferior se mueve hacia la izquierda con velocidad U_1. El gradiente de presión en la dirección del flujo es cero. El flujo volumétrico neto en la dirección x positiva es $Q = U_1h/2$ pie^3/s por unidad de profundidad. Determine la razón de velocidad, U_2/U_1.

8.24 Considere el flujo laminar completamente desarrollado, estable e incompresible entre placas paralelas infinitas. La placa superior se mueve hacia la derecha a $U = 3$ mm/s. No hay variación de presión en la dirección x, pero hay una fuerza másica constante debida a un campo eléctrico, $\rho B_x =$ 800 N/m^3. La separación entre las placas es $h = 0.1$ mm y la viscosidad del líquido es 0.02 kg/m · s. Evalúe el perfil de velocidad, $u(y)$, si $y = 0$ en la placa inferior estacionaria. Calcule el flujo volumétrico más allá de una sección vertical.

8.25 Agua a 60 C fluye entre dos largas placas planas. La placa inferior se mueve hacia la izquierda a una velocidad de 0.3 m/s, mientras que la placa superior se encuentra estacionaria. El espaciamiento entre las placas es de 3 mm y el flujo es laminar. Determine el gradiente de presión requerido para producir un flujo neto cero en una sección transversal.

8.26 La cabeza de registro-escritura del sistema de almacenamiento de memoria de la unidad de disco de una computadora flota sobre un disco giratorio en una película muy delgada de aire (el espesor de la película es 0.5 μm). La cabeza se localiza a 150 mm de la línea central del disco, el cual gira a 3600 rpm. La cabeza de registro-escritura es de 10 mm cuadrados. Para aire estándar en la separación entre la cabeza y el disco, determine *a*) el número de Reynolds del flujo, *b*) el esfuerzo de corte viscoso y *c*) la potencia requerida para superar el esfuerzo viscoso.

8.27 Considere el flujo laminar completamente desarrollado y estable de un líquido viscoso hacia abajo de una superficie inclinada. La capa de líquido es de espesor constante, h. Utilice un volumen de control diferencial elegido adecuadamente para obtener el perfil de velocidad. Desarrolle una expresión para el flujo volumétrico.

8.28 Una película de agua (a 15 C) en un movimiento laminar y estable corre hacia abajo por una prolongada pendiente, inclinada 30° por debajo de la horizontal. El espesor de la película es 0.8 mm. Suponga que el flujo está completamente desarrollado y a un gradiente de presión cero. Determine el esfuerzo de corte de la superficie y el flujo volumétrico por ancho unitario.

8.29 Agua a 60 F fluye entre placas paralelas con ancho de separación $b = 0.01$ pie. La placa superior se mueve con velocidad $U = 1$ pie/s en la dirección x positiva. El gradiente de presión es $\partial p/\partial x = -0.60$ lbf/pie^2/pie. Localice el punto de velocidad máxima y determine su magnitud (deje $y = 0$ en la placa inferior). Dibuje las distribuciones de velocidad y de los esfuerzos de corte. Determine el volumen del flujo que pasa por una sección transversal dada (x = constante) en 10 s.

8.30 Con
por
volu
cuar

8.31 Una
U_0,
líqu
con
cer
cla
Ob

8.32

8.33

8.34

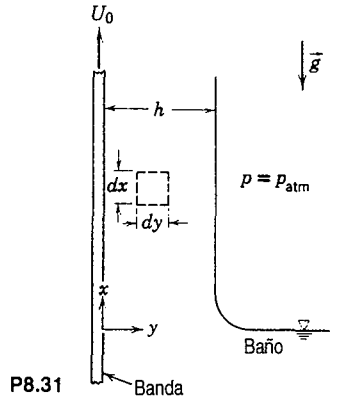
8.35

8.36

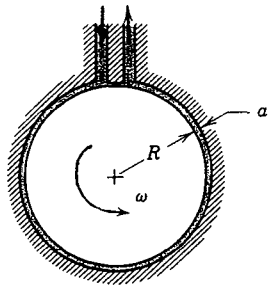
8.37

8.30 Considere un flujo laminar, completamente desarrollado y estable entre placas paralelas, separadas por la distancia h, con gradiente de presión impuesto conocido, $\partial p/\partial x$. Iniciando a partir de un volumen de control diferencial, deduzca una expresión para la velocidad, U, de la placa superior cuando no se le aplica fuerza externa.

8.31 Una banda continua, que pasa con dirección hacia arriba a través de un baño químico a velocidad U_0, recoge una película líquida de espesor h, densidad ρ y viscosidad μ. La gravedad tiende a que el líquido se desprenda y caiga, pero el movimiento de la banda evita que el líquido se separe por completo. Suponga que el flujo es completamente desarrollado y laminar con gradiente de presión cero y que la atmósfera no produce esfuerzo de corte en la superficie exterior de la película. Establezca claramente las condiciones de frontera que serán satisfechas por la velocidad en $y = 0$ y $y = h$. Obtenga una expresión para el perfil de velocidad.



P8.31



P8.32

8.32 Una bomba peristáltica se elabora a partir de una cavidad fija con un tambor rotatorio interno ajustado. La separación es pequeña comparada con el diámetro del tambor, por lo que el flujo en el espacio anular puede tratarse como el que fluye entre placas paralelas. El fluido es arrastrado alrededor del anillo por medio de las fuerzas viscosas. Evalúe las características de funcionamiento de la bomba (presión diferencial, potencia de entrada y eficiencia) como funciones del flujo volumétrico. Suponga que la profundidad normal al diagrama es b.

8.33 Considere de nuevo la bomba peristáltica del problema 8.32. Encuentre el punto de operación (flujo volumétrico y aumento de presión) que origina la eficiencia óptima. Exprese sus resultados en términos de $Q/Q_{máx}$, donde Q es el flujo volumétrico.

8.34 La fuerza de sujeción para sostener una pieza en una operación de giro metálico la proporciona un aceite de alta presión alimentado por una bomba. El aceite escapa axialmente a través de un espacio anular con diámetro D, longitud L y separación radial a. El miembro interior del anillo gira a velocidad angular ω. La potencia se requiere tanto para bombear el aceite como para superar la disipación viscosa en la separación anular. Desarrolle expresiones en términos de la geometría especificada para la potencia de la bomba, $\mathcal{P}_p$, y la potencia de disipación viscosa, $\mathcal{P}_v$. Muestre que el requerimiento total de potencia se minimiza cuando la separación radial, a, se elige tal que $\mathcal{P}_v = 3\,\mathcal{P}_p$.

8.35 Para flujo laminar completamente desarrollado en una tubería, determine la distancia radial desde el eje de la tubería a la cual la velocidad es igual a la velocidad promedio.

8.36 Considere primero agua y después aceite lubricante SAE 10W que fluyen a 40 C en un tubo de 6 mm de diámetro. Determine el flujo máximo (y el gradiente de presión correspondiente, $\partial p/\partial x$) para cada fluido al cual se esperaría flujolaminar.

8.37 Una línea de inyección de agua está hecha a partir de un tubo capilar liso con diámetro interno $D =$ 0.25 mm. Determine el flujo volumétrico máximo al cual el flujo es laminar. Evalúe la caída de presión requerida para producir este flujo a través de una sección de tubo con longitud $L = 0.75$ m.

8.38 Un arreglo de medición de viscosidad para un laboratorio de mecánica de fluidos universitario se va a elaborar con tubo plástico flexible; el fluido va a ser agua. Suponga que el diámetro del tubo es $D = 0.125 \pm 0.010$ pulg y la longitud es 50 pies. Evalúe el flujo volumétrico máximo al cual se esperaría flujo laminar y la caída de presión correspondiente. Estime la incertidumbre experimental en la viscosidad medida empleando este aparato. ¿Cómo se podría mejorar este dispositivo?

8.39 Una aguja hipodérmica, con diámetro interno $d = 0.1$ mm y longitud $L = 25$ mm, se emplea para inyectar una solución salina con viscosidad cinco veces la del agua. El diámetro del émbolo es $D = 10$ mm; la fuerza máxima que puede ejercerse por un pulgar sobre el émbolo es $F = 45$ N. Estime el flujo volumétrico de la solución salina que puede producirse.

8.40 En un viscosimétrico comercial, el flujo volumétrico se mide cronometrando el flujo de un volumen conocido a través de un capilar vertical bajo la influencia de la gravedad. Para reducir la incertidumbre en la medición del tiempo a un porcentaje despreciable, se elige el tamaño para producir un tiempo de flujo de aproximadamente 200 segundos. Cierto viscosimétrico tiene un diámetro capilar de 0.31 mm y una longitud del tubo de 73 mm. Estime la cantidad máxima que puede variar el diámetro para permitir mediciones de viscosidad con incertidumbre menor que 1 por ciento. (Advierta que la precisión requerida es del orden de $\pm$ 1 *micró*metro; de manera que la mayor parte de los viscosimétricos requieren la calibración con un líquido de viscosidad conocida.)

8.41 La resistencia al flujo de un fluido puede definirse por analogía con la ley de Ohm para la corriente eléctrica. Así, la resistencia al flujo está dada por la razón entre la caída de presión (potencial de accionamiento) y el flujo volumétrico (corriente). Demuestre que la resistencia al flujo laminar está dada por

$$\text{resistencia} = \frac{128\mu L}{\pi D^4}$$

que es independiente del flujo. Encuentre la caída de presión máxima para la cual esta relación es válida para un tubo de 50 mm de longitud y 0.25 mm de diámetro interior, tanto para queroseno como para aceite de ricino a 40 C.

8.42 Aceite de corte fluye verticalmente hacia abajo por gravedad en un largo tubo circular. El tubo es largo comparado con su diámetro y por ello los efectos de los extremos son despreciables. El aceite es SAE 10W a 100 F. La presión es la atmosférica en todas partes. Determine el flujo volumétrico de aceite que puede entregarse si el diámetro del tubo es 0.5 pulg. Compruebe que el flujo es laminar.

8.43 Debido a la gravedad un líquido viscoso cae dentro de un tubo circular vertical con flujo laminar completamente desarrollado. Suponga que la presión es la atmosférica tanto en la salida como en la entrada del tubo. Demuestre que la relación entre el diámetro del tubo y el número de Reynolds puede expresarse como

$$D = \left(\frac{32\,Re\,\nu^2}{g}\right)^{1/3}$$

Evalúe el diámetro máximo del tubo para el flujo laminar de *a*) agua y *b*) aceite SAE 30 a 20 C.

8.44 Un tubo de 17.6 pulg de largo, con diámetro interior de 0.030 pulg, se emplea como un viscosímetro capilar. Las pruebas de calibración se llevan a cabo empleando agua a 60 F, y se mide un flujo de 1 cm^3/s para una caída de presión aplicada de 10 psi. (Suponga que la caída de presión en la longitud de entrada es el doble que la correspondiente a la misma longitud de flujo completamente desarrollado.) Determine el error porcentual en la viscosidad que resultaría si se empleara la ecuación 8.13c directamente para calcularla, sin considerar la longitud de entrada.

8.45 Considere un flujo laminar completamente desarrollado en una tubería circular. Emplee un volumen de control cilíndrico como el que se muestra. Indique las fuerzas que actúan sobre el volumen de control. Empleando la ecuación del momento, desarrolle una expresión para la distribución de velocidad.

8.46 Con
La t
V_0.
para
una
C_1 y

‡**8.47** Cor
cili
pre
vel

Ob
el

‡**8.48** Pa

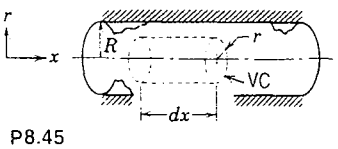
Er
cc

‡**8.49** Se
m
re
el
d
la
c

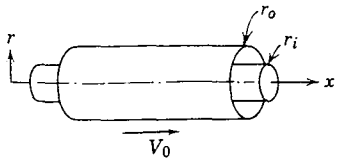
8.50 C
2
c

8.51 I

‡ Es pos
marcado



P8.45



P8.46

8.46 Considere el flujo laminar completamente desarrollado en el anillo entre dos tuberías concéntricas. La tubería interior está estacionaria y la tubería exterior se mueve en la dirección x con velocidad V_0. Suponga que el gradiente de presión axial es cero ($\partial p/\partial x = 0$). Obtenga una expresión general para el esfuerzo de corte, τ, como una función del radio, r, en términos de la constante C_1. Obtenga una expresión general para el perfil de velocidad, $V(r)$, en términos de dos constantes, C_1 y C_2. Evalúe C_1 y C_2.

‡**8.47** Considere el flujo laminar completamente desarrollado en el espacio anular formado por los dos cilindros concéntricos que se muestran en el diagrama del problema 8.46, pero con gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, y el cilindro exterior estacionario. Sea $r_0 = R$ y $r_i = kR$. Demuestre que el perfil de velocidad está dado por

$$u = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{1-k^2}{\ln(1/k)}\right)\ln\frac{r}{R}\right]$$

Obtenga una expresión para la posición de la velocidad máxima como una función de k. Compare el caso límite, $k \to 0$, con la correspondiente expresión para el flujo en una tubería circular.

‡**8.48** Para el flujo del problema 8.47 muestre que el flujo volumétrico está dado por

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left[(1-k^4)-\frac{(1-k^2)^2}{\ln(1/k)}\right]$$

Encuentre una expresión para la velocidad promedio. Compare el caso límite, $k \to 0$, con la expresión correspondiente para el flujo en una tubería circular.

‡**8.49** Se ha sugerido en el diseño de un irrigador agrícola que un miembro estructural se mantenga fijo mediante un alambre colocado a lo largo de la línea central de una tubería; se presume que un alambre relativamente pequeño tendría poco efecto sobre la caída de presión para un flujo dado. Empleando el resultado del problema 8.48, deduzca una expresión que brinde el cambio porcentual en la caída de presión como una función de la razón entre el diámetro del alambre y el de la tubería para flujo laminar. (Usted puede simplificar los resultados para alambres de diámetro pequeño.) Calcule el cambio porcentual en la caída de presión para razones de diámetros, d/D, de 0.01, 0.001 y 0.0001.

8.50 Considere el simple modelo de la ley exponencial para un fluido no newtoniano dado por la ecuación 2.11. Extienda el análisis del problema 8.45 para mostrar que el perfil de velocidad para flujo laminar completamente desarrollado de un fluido de la ley exponencial en un tubo circular, puede escribirse

$$u = \left(\frac{R}{2k}\frac{\Delta p}{L}\right)^{1/n}\frac{nR}{n+1}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

8.51 Evalúe el flujo volumétrico para el flujo laminar completamente desarrollado de un fluido de la ley exponencial en un tubo circular (problema 8.50). Muestre que el perfil de velocidad puede escribirse

$$\frac{u}{\bar{V}} = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

como se sugiere en el problema 2.73.

‡ Es posible que usted desee usar programas de computadora sencillos para ayudarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.

8.52 Una tubería horizontal conduce fluido en un flujo turbulento completamente desarrollado. La diferencia de presión estática medida entre dos secciones es de 3 psi. La distancia entre las secciones es de 25 pies y el diámetro de la tubería es igual a 6 pulg. Calcule el esfuerzo de corte, τ_w, que actúa sobre las paredes.

8.53 La caída de presión entre dos tomas separadas 3 m en la dirección del tubo de corriente en un flujo horizontal completamente desarrollado de agua en un canal es 1.78 kPa. La sección transversal del canal es un rectángulo de 30 × 240 mm. Calcule el esfuerzo de corte promedio de la pared.

8.54 Queroseno a 70 F fluye en un tubo liso con 1 pulg de diámetro interior. El número de flujo de Reynolds es 4000. Para flujo laminar, se encuentra que el gradiente de presión es $\partial p/\partial x = -0.2$ lbf/pie^2/pie, en tanto que para flujo turbulento, $\partial p/\partial x = -0.5$ lbf/pie^2/pie. Grafique la variación del esfuerzo de corte, τ/τ_w, como una función del radio adimensional, r/R, en ambas condiciones de flujo.

8.55 Una medicina líquida, con la viscosidad y densidad del agua, se va a administrar por medio de una aguja hipodérmica. El diámetro interior de la aguja es 0.25 mm y su longitud es 50 mm. Determine *a*) el flujo volumétrico máximo para la cual el flujo será laminar, *b*) la caída de presión requerida para entregar el flujo máximo, y *c*) el esfuerzo de corte de pared correspondiente.

8.56 Laufer [3] midió los siguientes datos para la velocidad media en un flujo turbulento completamente desarrollado en una tubería a $Re_U = 50\,000$:

$\bar{u}/U$	0.996	0.981	0.963	0.937	0.907	0.866	0.831
y/r	0.898	0.794	0.691	0.588	0.486	0.383	0.280
$\bar{u}/U$	0.792	0.742	0.700	0.650	0.619	0.551	
y/R	0.216	0.154	0.093	0.062	0.041	0.024	

Grafique los datos en papel gráfico log-log. Evalúe gráficamente el exponente del perfil de velocidad de la ley exponencial. Compare con un valor calculado por medio del método de los mínimos cuadrados empleando el resultado del problema 8.62.

8.57 Laufer [3] midió los siguientes datos para la velocidad media en un flujo turbulento completamente desarrollado en una tubería a $Re_U = 500\,000$:

$\bar{u}/U$	0.997	0.988	0.975	0.959	0.934	0.908
y/R	0.898	0.794	0.691	0.588	0.486	0.383
$\bar{u}/U$	0.874	0.847	0.818	0.771	0.736	0.690
y/R	0.280	0.216	0.154	0.093	0.062	0.037

Grafique los datos en papel gráfico log-log. Evalúe gráficamente el exponente del perfil de velocidad de la ley exponencial. Compare con un valor calculado mediante el método de mínimos cuadrados utilizando el resultado del problema 8.62.

8.58 Considere el perfil de velocidad para flujo laminar completamente desarrollado en una tubería, ecuación 8.14, y el perfil empírico de la "ley exponencial" para flujo turbulento en una tubería, ecuación 8.22. Suponga que $n = 7$ para el perfil turbulento. Determine r/R para cada perfil en el cual u es igual a la velocidad promedio, $\bar{V}$.

8.59 El perfil de velocidad para flujo turbulento a través de tuberías lisas se representa a menudo por medio de la relación empírica de la ecuación 8.22. Muestre que la razón entre las velocidades

‡ Es posible que usted desee usar programas de computadora sencillos para ayudarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.

promedio y de la línea central está dada por la ecuación 8.23. Empleando n de la figura 8.11, grafique $\bar{V}/U$ como una función del número de Reynolds.

8.60 La figura 8.11 es una gráfica del exponente del perfil de velocidad de la ley exponencial, n, contra el número de Reynolds de la línea central, Re_U, para flujo turbulento y completamente desarrollado en una tubería. La ecuación 8.23 relaciona la velocidad media, $\bar{V}$, con la velocidad de la línea central, U, para diversos valores de n. Elabore gráficas de $\bar{V}/U$ contra log Re_U y log $Re_{\bar{V}}$.

8.61 El coeficiente de flujo de momento, β, se define como

$$\int_A u\rho u\, dA = \beta \int_A \bar{V}\rho u\, dA = \beta \dot{m}\bar{V}$$

Evalúe β para el perfil de velocidad laminar, ecuación 8.14, y para el perfil de velocidad turbulento de la "ley exponencial", ecuación 8.22 (elija $n = 7$).

8.62 Considere el perfil de velocidad empírico de la ley exponencial para flujo turbulento completamente desarrollado en una tubería, ecuación 8.22. Empleando el método de mínimos cuadrados, muestre que un buen ajuste de n puede calcularse a partir de los datos medidos como

$$\frac{1}{n} = \frac{\sum \ln(\bar{u}/U)\ln(y/R)}{\sum[\ln(y/R)]^2}$$

Sugerencia: Exprese el perfil como $\ln(\bar{u}/U) = (1/n)\ln(y/R)$.

8.63 Considere el flujo laminar completamente desarrollado de agua entre placas paralelas infinitas. La velocidad máxima de flujo, el espaciamiento y ancho de las placas son 6 m/s, 0.2 mm y 30 mm, respectivamente. Encuentre el flujo de energía cinética en una sección transversal.

8.64 Evalúe el coeficiente de flujo de energía cinética, α, para el flujo del problema 8.63.

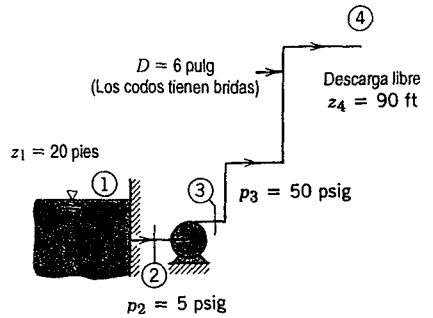
8.65 Considere el flujo laminar completamente desarrollado en un tubo circular. Evalúe el coeficiente de flujo de energía cinética para este flujo.

8.66 Muestre que el coeficiente de flujo de energía cinética, α, para el perfil de velocidad turbulento de la "ley exponencial" de la ecuación 8.22 está dado por la ecuación 8.26. Evalúe α para $n = 7$.

8.67 Agua fluye por un ducto de área constante; el diámetro de la tubería es 50 mm y la velocidad de flujo promedio es 1.5 m/s. En la entrada de la tubería, la presión manométrica es 590 kPa. La salida de la tubería es 25 m más alta que la entrada; la presión de salida es la atmosférica. Determine la pérdida de carga entre la entrada y la salida de la tubería.

8.68 La tubería del problema 8.67 se coloca sobre una superficie horizontal. El flujo y la presión a la salida permanecen iguales. Calcule la presión de entrada para esta nueva condición.

8.69 Se bombea agua a un flujo de 2 pies^3/s desde un depósito 20 pies por arriba de la bomba hasta una descarga libre 90 pies por encima de la bomba. La presión en el lado de admisión de la bomba es 5 psig y la presión en el lado de la descarga es 50 psig. Todas las tuberías son de acero comercial de 6 pulg de diámetro. Determine *a*) la carga suministrada por la bomba y *b*) la pérdida de carga total entre la bomba y el punto de descarga libre.



P8.69

8.70 Laufer [3] midió los siguientes datos para la velocidad media cerca de la pared en un flujo turbulento completamente desarrollado en una tubería a $Re_U = 50\,000$ en aire:

$\frac{\bar{u}}{U}$	0.343	0.318	0.300	0.264	0.228	0.221	0.179	0.152	0.140
$\frac{y}{R}$	0.0082	0.0075	0.0071	0.0061	0.0055	0.0051	0.0041	0.0034	0.0030

Grafique los datos sobre papel milimétrico. Evalúe un valor ajustado para $d\bar{u}/dy$ ($U = 9.8$ pies · s y $R = 5.9$ pulg). Compare el esfuerzo de corte de la pared evaluado desde $\tau_w = \mu\, d\bar{u}/dy$ con el calculado a partir del factor de fricción tomado del diagrama de Moody.

8.71 Una tubería lisa de 3 pulg de diámetro conduce agua (150 F) horizontalmente a un flujo másico de 0.006 slug/s. Se observa que la caída de presión será 0.065 lbf/pie^2 por 100 pies de tubería. Del diagrama de Moody, el factor de fricción podría elegirse como 0.021 o 0.042. ¿Cuál es correcto?

‡**8.72** Las curvas que se grafican sobre el diagrama de Moody se deducen a partir de la correlación empírica dada por la ecuación 8.37a. Como se indicó en la sección 8-7.1, una suposición inicial para f_0, calculada de la ecuación 8.37b, produce resultados precisos hasta 1 por ciento con una sola iteración [8]. Escriba una subrutina para calculadora o computadora y valide la exactitud de esta exigencia para $Re = 10^4$ y 10^7 para $e/D = 0$ y 0.010.

8.73 Una correlación empírica para el factor de fricción en flujo turbulento en tuberías lisas fue desarrollada por H. Blasius en 1911. Para $Re \leq 10^5$, él encontró que la ecuación 8.35 correlacionaba bien los datos. Muestre que, en flujo turbulento, la caída de presión predicha es proporcional a $(\bar{V})^{7/4}$ cuando se emplea la correlación de Blasius. ¿Cómo depende la caída de presión del diámetro del tubo a un flujo determinado?

8.74 El diagrama de Moody brinda el factor de fricción de Darcy, f, en términos del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. El *factor de fricción de Fanning* para flujo en tubería se define como

$$f_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho \bar{V}^2}$$

donde τ_w es el esfuerzo de corte de la pared en la tubería. Obtenga una relación entre los factores de fricción de Darcy y Fanning para flujo completamente desarrollado en una tubería. Muestre que $f = 4f_F$.

8.75 Queroseno fluye en una tubería lisa de 12 pulg de diámetro a un flujo de 4.5 pies^3/s. Estime la velocidad media y el esfuerzo de corte en una posición radial a 1 pulg desde la pared de la tubería.

8.76 Agua circula por un tubo de 1 pulg de diámetro que repentinamente lo aumenta a 2 pulg. El flujo a través del aumento es de 20 gpm. Calcule el incremento de presión a través del aumento del diámetro.

8.77 Aire en condiciones estándar fluye a través de una expansión súbita en un ducto circular. Los diámetros del ducto aguas arriba y aguas abajo son de 3 y 9 pulg, respectivamente. La presión aguas abajo es 0.25 pulg de agua *más alta* que la de aguas arriba. Determine la velocidad promedio del aire que se aproxima a la expansión y el flujo volumétrico.

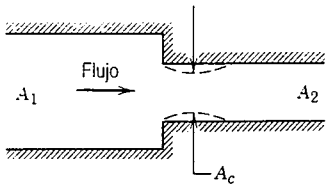
8.78 Agua fluye por un tubo de 50 mm de diámetro que repentinamente se contrae 25 mm. La caída de presión a través de la contracción es 3.4 kPa. Determine el flujo volumétrico.

8.79 Se muestra un flujo a través de una contracción repentina. El área de flujo mínima en la vena contracta está dada en términos de la razón de área por el coeficiente de contracción [27],

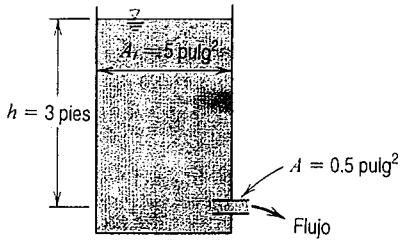
‡ Es posible que usted desee usar programas de computadora sencillos para ayudarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.

$$C_c = \frac{A_c}{A_2} = 0.62 + 0.38\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^3$$

Debido a que el flujo se acelera de A_1 a A_c, las pérdidas son bastante pequeñas. Sin embargo, las pérdidas no son despreciables para la expansión "repentina" de A_c a A_2. Recurra a estas suposiciones para evaluar *a*) el coeficiente de contracción y *b*) el coeficiente de pérdidas menores, para una contracción repentina con $AR = A_2/A_1 = 0.5$. Compare con los datos de la figura 8.17.



P8.79



P8.80

8.80 Agua fluye desde el tanque que se muestra a través de una tubería muy corta. Suponga que el flujo es cuasi-estable. Estime el flujo en el instante mostrado. ¿Cómo podría usted mejorar el sistema de flujo si se deseara un flujo más alto?

8.81 Aire fluye hacia afuera de una cámara de prueba de sala limpia a través de un ducto de 150 mm de diámetro y de longitud L. El ducto original tiene una entrada de borde cuadrado, pero éste se ha sustituido por uno bien redondeado. La presión en la cámara es 2.5 mm de agua por arriba de la ambiente. Las pérdidas debidas a la fricción son despreciables comparadas con las pérdidas de la entrada y la salida. Estime el aumento en el flujo volumétrico que resulta del cambio en el contorno de la entrada.

8.82 Se ha encontrado espacio para un difusor cónico de 0.45 m de largo en el sistema de ventilación de una sala limpia descrito en el problema 8.81. Se empleará el mejor difusor de este tamaño. Suponga que es posible emplear los datos de la figura 8.18. Determine el ángulo del difusor apropiado y la razón de área para esta instalación y estime el flujo volumétrico que será entregado después de que se instale.

8.83 Agua a 20 C fluye a través de una tubería de drenaje de concreto de 0.1 m (diámetro interno) a un flujo de 15 kg/s. Determine la caída de presión por 100 m de tubería horizontal.

8.84 Por un ducto liso y recto de 0.3 m de diámetro y 50 m de largo, fluye aire a 15 C. El flujo es 0.6 m^3/s y la presión es la misma en ambos extremos del ducto. Determine el cambio en la elevación entre la entrada y la salida.

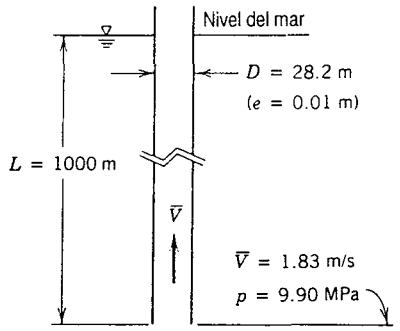
8.85 Agua a 78 F fluye en una tubería cuyo diámetro interior es 1.2 pulg. El flujo es 0.04 pies^3/s. Determine la pendiente que la tubería debe tener para mantener constante la presión a lo largo de su longitud. Si la temperatura permanece constante, determine la transferencia de calor por 100 pies de tubería.

8.86 En cierta instalación de aire acondicionado, se requiere un flujo de 35 m^3/min de aire en condiciones estándar. Se va a utilizar un ducto liso de hoja metálica de 0.3 m cuadrados. Determine la caída de presión para un tramo horizontal del ducto de 30 m.

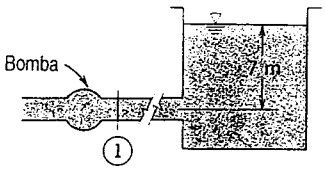
8.87 Una tubería lisa, con diámetro interior $D = 175$ mm, entrega $Q = 28$ m^3/min de aire a 20 C en la caída de un pozo de mina. El pozo tiene 700 m de profundidad y caída recta. Estime la diferencia de presión entre la parte superior y la inferior del tubo.

8.88 Una planta de conversión de energía térmica oceánica (OTEC, por sus siglas en inglés) toma agua de mar fría (a $T = 4$ C) en una tubería de agua fría bastante abajo de la superficie, como se muestra. La entrada de la tubería se localiza a 1000 m debajo del nivel del mar. La presión hidrostática a esa profundidad es $p_1 = 9.9$ MPa (manométrica). La temperatura del agua fría permanece casi constante.

La velocidad media en la tubería de agua fría es $\bar{V} = 1.83$ m/s y el diámetro de la tubería es $D = 28.2$ m. Su altura de rugosidad efectiva es $e = 0.01$ m. Estime la presión estática al nivel del mar en la tubería de agua fría.



P8.88



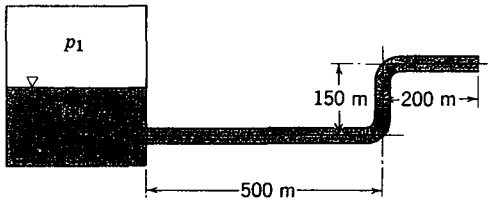
P8.89

8.89 El agua de una bomba fluye por una tubería de 0.25 m de diámetro para una distancia de 5 km, desde la descarga de la bomba hasta un depósito abierto a la atmósfera. El nivel del agua en el depósito es de 7 m sobre la descarga de la bomba y la velocidad promedio del agua en la tubería es 3 m/s. Calcule la presión en la descarga de la bomba.

8.90 Va a fluir agua por gravedad desde un depósito hasta otro más abajo a través de una tubería recta inclinada. El flujo requerido es 0.007 m^3/s, el diámetro de la tubería es 50 mm y la longitud total es de 250 m. Cada depósito está abierto a la atmósfera. Calcule la diferencia en el nivel requerida para mantener este flujo. Estime la fracción de ΔH que se debe a las pérdidas menores.

8.91 Considere el flujo de aire estándar a 35 m^3/min. Compare la caída de presión por longitud unitaria de un ducto redondo con la de ductos rectangulares de proporción dimensional 1, 2 y 3. Suponga que todos los ductos son lisos, con áreas de sección transversal de 0.1 m^2.

8.92 Agua fluye desde un gran depósito como se muestra. La tubería es de hierro fundido, con diámetro interior de 0.2 m. El flujo es 0.14 m^3/s y la descarga es a la presión atmosférica. La temperatura media para el flujo es 10 C; el sistema completo se encuentra aislado. Determine la presión manométrica, p_1, requerida para producir el flujo. Calcule el aumento de temperatura entre la superficie del líquido y la salida.



P8.92

8.93 Dos depósitos se conectan mediante tres tuberías limpias de hierro fundido en serie, $L_1 = 600$ m, $D_1 = 0.3$ m, $L_2 = 900$ m, $D_2 = 0.4$ m, $L_3 = 1500$ m y $D_3 = 0.45$ m. Cuando la descarga sea 0.11 m^3/s de agua a 15 C, determine la diferencia de altura entre los depósitos.

8.94 Se entrega agua, a un flujo de $Q = 300$ gpm, mediante una manguera contra incendio y un arreglo de tobera. La manguera ($L = 200$ pies de longitud total, $D = 3$ pulg y $e/D = 0.004$) está integrada por cuatro secciones de 50 pies unidas por acopladores. La entrada es de borde cuadrado; el coeficiente de pérdidas menores para cada acoplamiento es $K_e = 0.5$, con base en la velocidad media a través de la manguera. El coeficiente de pérdida de la tobera es $K_n = 0.02$, con base en la velocidad en el chorro de salida, de $D_2 = 1.0$ pulg de diámetro. Estime la presión de alimentación requerida a este flujo.

8.95 Un ducto de 2.5 pulg (nominales) que conduce agua consta de 290 pies de tubería recta galvanizada,

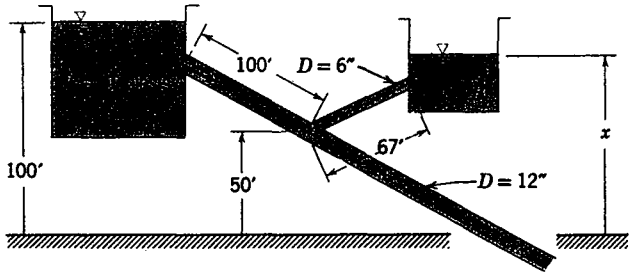
de 2 válvulas de compuerta totalmente abiertas, 1 válvula de ángulo totalmente abierta, 7 codos de 90°, 1 entrada de borde cuadrado de un depósito, y 1 descarga libre. Las condiciones en la entrada y en la salida son:

Posición	Elevación	Presión
Entrada	50.0 pies	20 psig
Descarga	94.0 pies	0 psig

Se instala una bomba centrífuga en el ducto para mover el agua. ¿Qué aumento de presión debe entregar la bomba de modo que el flujo volumétrico sea $Q = 0.439$ pies^3/s?

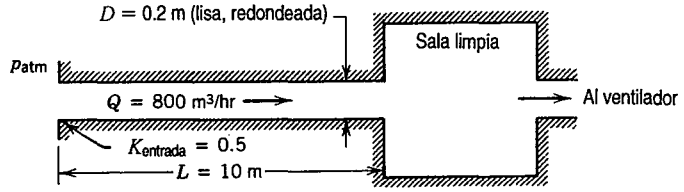
8.96 Se obtuvieron datos de mediciones en una sección vertical de una vieja tubería corroída de hierro galvanizado de 1 pulg de diámetro interior. En una sección la presión fue $p_1 = 100$ psig; en una segunda sección, 20 pies más abajo, la presión fue $p_2 = 75.5$ psig. El flujo volumétrico de agua fue 0.110 pies^3/s. Estime la rugosidad relativa de la tubería. ¿Qué porcentaje de ahorro en la energía de bombeo se produciría si la tubería se reparara y se alcanzara su nueva y limpia rugosidad relativa?

8.97 En el sistema de flujo de agua que se muestra, el depósito B tiene altura variable x. Determine el nivel de agua en el depósito B de modo que no fluya agua hacia o desde el depósito. La velocidad en la tubería de 12 pulg de diámetro es de 10 pies/s.



P8.97

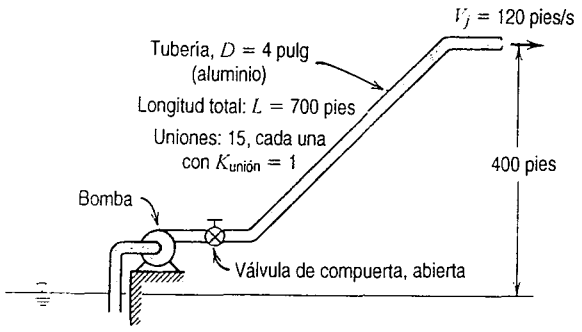
8.98 A una sala limpia se le deben suministrar 800 m^3/hr de aire en condiciones estándar. Se muestra la geometría del ducto de alimentación. Evalúe la presión manométrica en la sala limpia. Dibuje la distribución de presión a lo largo del ducto de alimentación. ¿Qué mejoras para el sistema del ducto podría usted recomendar? ¿Tales mejoras cuánto reducirían las pérdidas?



P8.98

8.99 Se bombea petróleo crudo ligero (DR = 0.855 con viscosidad similar al aceite SAE 30) horizontalmente a través de un tramo de 1 milla de 12 pulg de diámetro. El tamaño de la rugosidad relativa promedio es 0.01 pulg. El flujo es de 4500 gpm. Calcule los caballos de potencia requeridos para accionar la bomba, si es 75 por ciento eficiente.

8.100 Se bombea agua de enfriamiento desde un depósito hasta las barrenadoras de roca en una obra de construcción, empleando el sistema de tubería que se muestra. El flujo debe ser 600 gpm y el agua debe abandonar la tobera de rociado a 120 pies/s. Calcule la presión de alimentación mínima necesaria en la salida de la bomba. Estime la entrada de potencia requerida si la eficiencia de la bomba es del 70 por ciento.



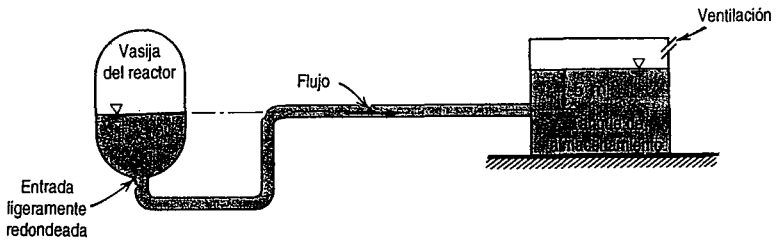
P8.100

8.101 El acondicionamiento de aire en el campus de la Universidad de Purdue se proporciona mediante agua refrigerada bombeada a través de una tubería de alimentación principal. La tubería forma un anillo de 3 millas de largo. El diámetro de la tubería es de 2 pies y el material es acero. El flujo volumétrico de diseño máximo es 11 200 gpm. La bomba de circulación es accionada por un motor eléctrico. Las eficiencias de la bomba y el motor son $\eta_p = 0.80$ y $\eta_m = 0.90$, respectivamente. El costo de la electricidad es \$0.067 dólares/kW · hr. Determine *a*) la caída de presión, *b*) la potencia de bombeo mínima que se requiere y *c*) el costo anual de la energía eléctrica para bombeo.

8.102 El oleoducto de Alaska corre desde la Bahía de Prudhoe hasta Valdez, una distancia total de 798 mi. Ambos puntos terminales están al nivel del mar. La tubería es de acero comercial de 48 pulg de d. i. La capacidad del ducto es de 2 millones de barriles de petróleo crudo por día (1 barril de petróleo = 42 galones). La densidad relativa del petróleo es 0.93 y su viscosidad a la temperatura de bombeo de 140 F es $\mu = 3.5 \times 10^{-4}$ lbf · s/pie^2. Determine la potencia de bombeo total requerida si la eficiencia de la bomba es del 85 por ciento. Exprese este resultado como una fracción de la energía química transportada por la corriente de petróleo. (Suponga que el petróleo crudo tiene un valor calorífico de 18 000 Btu/lbm.)

8.103 Una barrenadora de aire comprimido requiere 0.25 kg/s de aire a 650 kPa (manométrica) en la misma. La manguera desde el compresor del aire hasta la barrenadora tiene 40 mm de diámetro interior. La presión manométrica de descarga máxima del compresor es 690 KPa; el aire sale del compresor a 40 C. Desprecie los cambios en la densidad y cualesquiera efectos debidos a la curvatura de la manguera. Calcule la extensión de la manguera más larga que pueda utilizarse.

8.104 Queroseno fluye a 60 C a través de un sistema de tubería en una refinería, a un flujo de 2.3 m^3/min. La tubería es de acero comercial, con diámetro interior de 0.15 m. La presión manométrica en la vasija del reactor es 90 kPa. Determine la longitud total, L, de la tubería recta en el sistema.



P8.104

8.105 Se bombea petróleo crudo pesado (DR = 0.925 y $\nu = 1.1 \times 10^{-3}$ pies^2/s) por un oleoducto colocado sobre suelo plano. La línea está formada por tubería de acero con 24 pulg de d. i. y tiene un espesor de pared de $\frac{1}{2}$ pulg. El esfuerzo de tensión permisible en la pared de la tubería está limitado a 40 000 psi por consideraciones de corrosión. Es importante mantener el petróleo bajo presión para asegurar que los gases permanezcan en solución. La presión mínima recomendada es 75 psia. El oleoducto conduce un flujo de 400 000 barriles (en la industria petrolera, un "barril" equivale a 42 gal) diarios.

Deter
al petr

8.106 Gasol
de bo
estaci
come
del hi
través

8.107 Agua
tiene
volun

8.108 Fluye
La ca
arriba

8.109 Una t
alime
es 0.
atmo

8.110 Agu
100
secc

8.111 Un i
Un
trav
75 r
se u
coe
de s
cho

8.112 El s
a 6

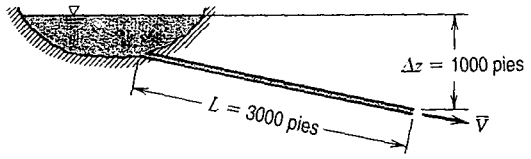
Determine el máximo espaciamiento entre las estaciones de bombeo. Calcule la potencia agregada al petróleo en cada estación de bombeo.

8.106 Gasolina fluye en un largo ducto subterráneo a una temperatura constante de 15 C. Dos estaciones de bombeo a la misma elevación se localizan a 13 km de separación. La caída de presión entre las estaciones es 1.4 MPa. La tubería del ducto es de 0.6 m de diámetro. A pesar de estar hecha de acero comercial, el tiempo y la corrosión han aumentado la rugosidad de la tubería a aproximadamente la del hierro galvanizado. La densidad relativa de la gasolina es 0.72. Calcule el flujo volumétrico a través de la tubería.

8.107 Agua fluye establemente en una tubería horizontal de hierro fundido de 5 pulg de diámetro. La tubería tiene 500 pies de largo y la caída de presión entre las secciones (1) y (2) es 23 psi. Encuentre el flujo volumétrico a través de la tubería.

8.108 Fluye agua establemente en una tubería de hierro fundido de 5 pulg de diámetro y 500 pies de largo. La caída de presión entre las secciones (1) y (2) es 23 psi. La sección (2) se localiza 30 pies por arriba de la sección (1). Encuentre el flujo volumétrico.

8.109 Una turbina hidráulica se va a alimentar con agua de una corriente montañosa a través de un tubo de alimentación, como se muestra. El diámetro del tubo es 1 pie y la altura de la rugosidad promedio es 0.05 pulg. Las pérdidas menores pueden despreciarse. El flujo sale de la tubería a la presión atmosférica. Calcule la velocidad de descarga.

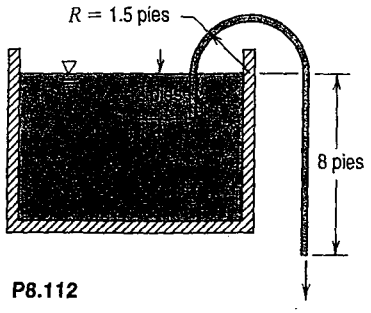


P8.109

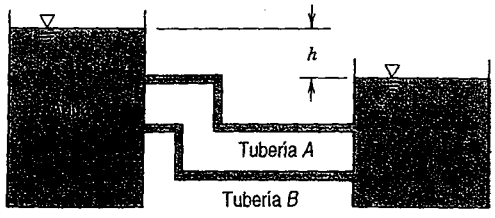
8.110 Agua fluye establemente en una tubería inclinada de hierro fundido de 3 pulg de diámetro interior y 100 pies de largo. La presión en la sección (1) es 6.0 psig. En la sección (2), 16 pies arriba de la sección (1), la presión es 0.5 psig. Determine *a*) la dirección del flujo y *b*) el flujo volumétrico.

8.111 Un ingeniero de minas planea realizar minería hidráulica con un chorro de agua de alta velocidad. Un lago se localiza a una altura $H = 300$ m por arriba del sitio de la mina. El agua se entregará a través de un manguera contra incendios de $L = 900$ m; la manguera tiene un diámetro interior $D = 75$ mm y rugosidad relativa $e/D = 0.01$. Los acoplamientos, con longitud equivalente, $L_e = 20$ D, se ubican cada 10 m a lo largo de la manguera. El diámetro de la tobera de salida es $d = 25$ mm. Su coeficiente de pérdidas menores es $K = 0.02$ basado en la *velocidad de salida*. Estime la velocidad de salida máxima, V_o, que este sistema podría entregar. Determine la máxima fuerza ejercida por este chorro de agua sobre la cara de una roca.

8.112 El sifón que se muestra se fabrica con tubo estirado de aluminio de 2 pulg de d. i. El líquido es agua a 60 F. Calcule el flujo volumétrico a través del sifón. Estime la presión mínima dentro del tubo.



P8.112



P8.113

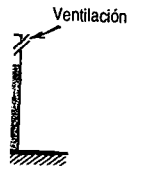
P8.100

...roporciona mediante
. La tubería forma un
...ial es acero. El flujo
...cionada por un motor
..., respectivamente. El
...resión, *b*) la potencia
...ara bombeo.

...ancia total de 798 mi.
...ial de 48 pulg de d. i.
... barril de petróleo =
...peratura de bombeo
... total requerida si la
...racción de la energía
...crudo tiene un valor

...nétrica) en la misma.
...diámetro interior. La
...sale del compresor a
... a la curvatura de la

... flujo de 2.3 m³/min.
...n manométrica en la
...n el sistema.



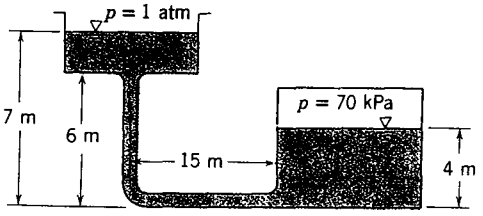
P8.104

...oleoducto colocado
...i. y tiene un espesor
...tá limitado a 40 000
...resión para asegurar
...5 psia. El oleoducto
...ale a 42 gal) diarios.

8.113 Dos depósitos de agua están conectados por medio de tuberías de hierro galvanizado, como se muestra arriba. Suponga que $D_A = 75$ mm, $D_B = 50$ mm y $h = 10.5$ m. La longitud de ambas tuberías es 100 m. Compare las pérdidas de carga en las tuberías A y B. Calcule el flujo volumétrico en cada tubería.

‡8.114 Una pequeña turbina hidráulica es alimentada por un vaso montañoso que tiene su superficie localizada a una altura H arriba de la entrada de la turbina. La tubería de alimentación de hierro galvanizado es de diámetro constante, D, y longitud, L. Suponga que la potencia de salida de la turbina es proporcional al producto del flujo volumétrico, Q, y la caída de presión a través de la turbina, Δp. Obtenga una expresión algebraica para la velocidad media, V, a la cual la potencia de salida de la turbina es máxima. Grafique la potencia máxima que teóricamente podría desarrollar la turbina, como una función del diámetro de la tubería, para $75 < D < 300$ mm. Suponga que hay flujo en la zona completamente rugosa; emplee $H = 100$, 500 y 1000 m y $L = 2H$.

8.115 Una tobera contra incendio se alimenta mediante una manguera con forro elástico de 1.5 pulg de diámetro y 300 pies de largo. Se alimenta agua de un hidrante a una bomba de refuerzo a 50 psig sobre la plataforma de un camión de bombeo. En las condiciones de diseño, la presión en la entrada de la tobera es 100 psig y la caída de presión a lo largo de la manguera es de 33 psi por 100 pies de longitud. Determine *a*) el flujo de diseño, *b*) la velocidad de salida de la tobera, suponiendo que no hay pérdidas en ésta y *c*) la potencia que se requiere para accionar la bomba de refuerzo, si su eficiencia es del 70 por ciento.



P8.116

8.116 Dos depósitos que contienen agua se conectan mediante una tubería de hierro galvanizado que tiene un codo en ángulo recto. La presión superficial en el depósito superior es la atmosférica, en tanto que la presión manométrica en la superficie del depósito inferior es 70 kPa. El diámetro de la tubería es 75 mm. Determine la magnitud y dirección del flujo volumétrico.

8.117 Considere el suministro de agua romano analizado en el problema ejemplo 8.10. Suponga que se han instalado los 50 pies de tubería horizontal de diámetro constante requeridos por la ley. La rugosidad relativa de la tubería es 0.01. Estime el flujo del agua entregada por la tubería bajo las condiciones de entrada del ejemplo. ¿Cuál sería el efecto de agregar el mismo difusor en el extremo de la tubería de 50 pies?

8.118 Usted está regando su césped con una manguera *vieja*. Debido a que se han incrustado depósitos de cal con el paso de los años, la manguera de 0.75 pulg de diámetro interior ahora tiene una altura de rugosidad promedio de 0.022 pulg. Un tramo de 50 pies de la manguera, unido a su grifo, entrega 20 gpm de agua (60 F). Calcule la presión en el grifo, en psi. Estime la entrega si se conectan dos tramos de 50 pies de la manguera. Suponga que la presión en el grifo varía con el flujo y que la presión del agua permanece constante a 70 psig.

‡8.119 Un tanque circular de 1.5 m de diámetro se llena a 5 m de profundidad con agua a 15 C. Un tubo liso de 7 m de largo se une al fondo del tanque. El tubo de 50 mm de diámetro descarga a la atmósfera 5 m abajo del fondo del tanque. Estime el tiempo requerido para que el nivel del tanque descienda a 1.5 m. (La correlación de Blasius para el factor de fricción en flujo turbulento, ecuación 8.35, podría ser útil.)

‡ Es posible que usted desee usar programas de computadora sencillos para ayudarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.

8.120

8.121

8.122

8.123

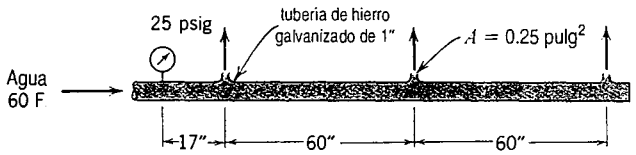
8.124

8.125

8.126

8.120 La curva de carga contra capacidad para cierto ventilador puede aproximarse mediante la ecuación $h = 30 - 10^{-7}Q^2$, donde h es la carga estática de salida en pulgadas de agua y Q es el flujo de aire en pies^3/min. Las dimensiones de salida del ventilador son 8 × 16 pulg. Determine el flujo de aire entregado por el ventilador dentro de un tramo recto de 200 pies de un ducto rectangular de 8 × 16 pulg.

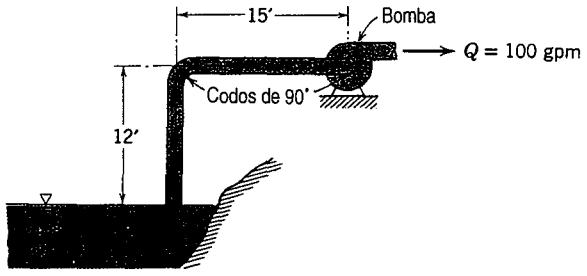
8.121 Se muestra un sistema de rociado para una planta de tratamiento de aguas negras. Se bombea agua a 60 F a través de un brazo de rociado. El área efectiva del flujo de cada tobera es 0.25 pulg^2. El diámetro interior de la tubería es 1 pulg y el material es hierro galvanizado. Determine el flujo del agua a través del brazo de rociado.



P8.121

8.122 Una prensa hidráulica es accionada por una bomba de alta presión. La presión manométrica en la salida de la bomba es 20 MPa, mientras que la presión requerida para la prensa es 19 MPa (manométrica), a un flujo de 0.032 m^3/min. La prensa y la bomba se van a conectar mediante un tubo liso de acero estirado de 50 m. El fluido es aceite SAE 10W a 40 C. Determine el diámetro mínimo del tubo que podría utilizarse.

8.123 Una bomba se localiza 15 pies al lado y 12 pies encima de un depósito. La bomba se diseña para un flujo de 100 gpm. Para una operación satisfactoria, la carga de succión en la entrada de la bomba no debe estar más abajo de −20 pies del indicador de nivel del agua. Determine la tubería de acero comercial estándar más pequeña que brindaría el funcionamiento requerido.

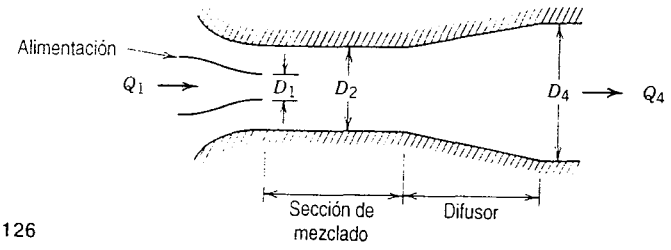


P8.123

8.124 Determine el tamaño mínimo de un ducto rectangular liso con una proporción dimensional de 2 por el que pasarán 80 m^3/min de aire estándar, con una pérdida de carga de 30 mm de agua por 30 m de ducto.

8.125 Una nueva planta industrial requiere un flujo de agua de 5.7 m^3/min. La presión manométrica en el ducto principal de agua, localizado en la calle a 50 m de la planta, es 800 kPa. La línea de alimentación requerirá la instalación de 4 codos en una longitud total de 65 m. La presión manométrica requerida en la planta es 500 kPa. ¿De qué tamaño debe ser la línea de hierro galvanizado que se instalará?

8.126 Se muestra una bomba de chorro. El diámetro del chorro primario es D_1 = 10 mm; el diámetro de la sección de mezcla es D_2 = 30 mm. Un difusor cónico conecta la sección de mezcla con una tubería horizontal con D_4 = 50 mm y L = 30 m. La tubería entrega un flujo volumétrico Q_4 = 407 litros por minuto a la presión atmosférica. El flujo para el chorro primario es Q_1 = 136 litros por minuto. La corriente secundaria (sección ③) es alimentada desde un depósito. Dibuje la distribución de presión de las secciones ① a la ④. Determine la presión necesaria para alimentar el chorro primario. Estime la altura mínima del estanque necesaria para alimentar el flujo de la corriente secundaria.



P8.126

**8.127 Ha estado fluyendo petróleo desde un gran tanque en una colina hasta un buque cisterna en el muelle. El compartimiento en el buque está casi lleno y un operador está por interrumpir el flujo. Se cierra una válvula en el muelle tal que se mantiene en la línea una presión de 150 psig inmediatamente aguas arriba de la válvula. Suponga:

Longitud de la línea del tanque a la válvula	10 000 pies
Diámetro interior de la línea	8.0 pulg
Elevación de la superficie de petróleo en el tanque	200 pies
Elevación de la válvula en el muelle	20 pies
Flujo instantáneo	1.5 pies^3/s
Pérdida de carga en la línea (exclusiva de la válvula que se está cerrando) a este flujo	75 pies de petróleo
Densidad relativa del petróleo	0.88

Calcule la relación de cambio instantánea inicial del flujo volumétrico.

‡8.128 Sale un líquido incompresible por la pared de una sección horizontal de tubería perforada de longitud L, sin componente de velocidad en la dirección axial. El gradiente de presión a lo largo de la longitud de la tubería perforada puede ser positivo o negativo, dependiendo del diámetro de la tubería, D, el flujo volumétrico inicial, Q_0, las propiedades del fluido y la distribución de los chorros de líquido a lo largo de la tubería. Suponga que el flujo sale de la superficie de la tubería a un flujo volumétrico por longitud unitaria, q, que es una fracción constante, k, del flujo volumétrico en la entrada de la tubería, tal que $q = k\,Q_0/L$. Suponga también que el factor de fricción, f, es constante. Muestre que el gradiente de presión axial es

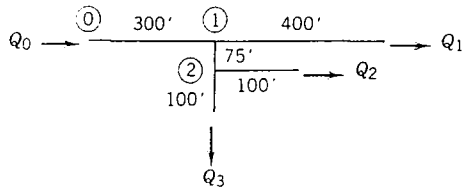
$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho Q_0^2}{2A^2L}\left[2k(1-k\lambda) - f\frac{L}{D}(1-k\lambda)^2\right]$$

donde $\lambda = x/L$. Grafique los resultados como una función de λ para valores representativos de k.

8.129 Los resultados del problema ejemplo 8.11 indican que las tuberías empleadas fueron demasiado pequeñas para producir la misma presión de entrada en cada tobera. Vuelva a trabajar el problema empleando la misma geometría pero con tuberías lisas de $3\frac{1}{2}$ pulg.

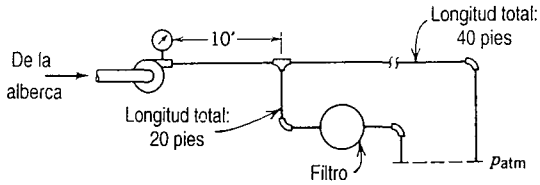
8.130 El sistema de tuberías que se muestra se ha construido con tubería de hierro galvanizado de 3 pulg. Todos los flujos son lo suficientemente altos como para que el flujo pueda considerarse en la zona completamente rugosa. Las pérdidas menores pueden ignorarse. Determine la presión en la sección ②, en términos de Q_2. Encuentre los flujos desconocidos como fracciones del flujo de entrada, Q_0. El fluido es agua.

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.
‡ Es posible que usted desee usar programas de computadora sencillos para ayudarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.



P8.130

8.131 Una alberca tiene un sistema de filtrado de flujo parcial. Agua a 75 F se bombea desde la alberca a través del sistema mostrado. La bomba entrega 30 gpm. La tubería es de PVC de 3/4 de pulg nominal (d. i. = 0.824 pulg). La pérdida de presión a través del filtro es aproximadamente $\Delta p = 0.6Q^2$, donde Δp está en psi y Q en gpm. Determine la presión de la bomba y el flujo a través de cada rama del sistema.



P8.131

8.132 Se emplea un "ergómetro" para medir el consumo de aire que un individuo consume al correr sobre una banda móvil. La temperatura y presión atmosféricas son 23 C y 752 mm de mercurio, respectivamente. Una campana invertida, que se emplea para medir el flujo de aire, tiene 0.45 m de diámetro. Durante un recorrido de prueba de 30 s, la campana asciende 43 mm. Determine el consumo de oxígeno del sujeto.

8.133 Agua a 150 F fluye a través de un orificio de 3 pulg de diámetro instalado en una tubería de 6 pulg de d. i. El flujo es de 300 gpm. Determine la diferencia de presión entre las tomas piezométricas.

8.134 Un orificio de borde cuadrado con tomas piezométricas y un manómetro de agua se emplean para medir aire comprimido. Se proporcionan los siguientes datos:

Diámetro interior de la línea de aire	6 pulg
Diámetro del orificio de la placa	4 pulg
Presión aguas arriba	90.0 psig
Temperatura del aire	80 F
Separación del manómetro	30 pulg H_2O

Calcule el flujo volumétrico en la línea, expresada en SCFM.

8.135 Un medidor venturi con una garganta de 75 mm de diámetro se coloca en un ducto de 150 mm de diámetro que conduce agua a 25 C. La caída de presión entre la toma aguas arriba y la garganta del venturi es 300 mm de mercurio. Calcule el flujo.

8.136 Fluye gasolina (DR = 0.73) a través de un medidor venturi de 2 × 1 pulg. La presión diferencial es 380 mm de mercurio. Encuentre el flujo volumétrico.

8.137 Considere un venturi horizontal de 2 × 1 pulg con flujo de agua. Para una presión diferencial de 20 psi, calcule el flujo volumétrico.

8.138 Se va a medir el flujo de aire en una prueba de un motor de combustión interna, empleando una tobera de flujo instalada en una cámara de distribución. El desplazamiento de la máquina es 1.6 litros y su velocidad de operación máxima es 6000 rpm. Para evitar cargar el motor, la máxima caída de presión a través de la tobera no debe exceder de 0.25 m de agua. El manómetro puede leer hasta

‡ Es posible que usted desee usar programas de computadora sencillos para ayudarse en la solución de los problemas marcados con obeliscos.

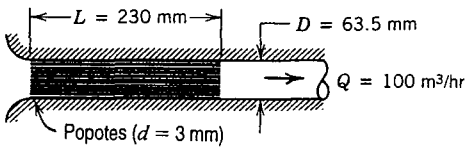
± 0.5 mm de agua. Determine el diámetro de la tobera de flujo que debe especificarse. Encuentre el flujo mínimo de aire que puede medirse hasta ± 2 por ciento empleando este arreglo.

8.139 Aire fluye por el medidor venturi descrito en el problema 8.135. Suponga que la presión aguas arriba es 400 kPa y que la temperatura en todos lados se mantiene constante en 20 C. Determine el máximo flujo posible de masa de aire para la cual es válida la suposición de flujo incompresible como una aproximación ingenieril. Calcule la lectura de la presión diferencial correspondiente en un manómetro de mercurio.

8.140 Queroseno a 40 C fluye por un conducto de 0.3 m de diámetro en una refinería. Se espera que el flujo no exceda de 120 kg/s. Se dispone un manómetro con un intervalo de 1 m de agua para emplearse con un medidor de orificio. Especifique el diámetro del orificio recomendado para emplearse con este sistema. ¿Qué flujo mínimo podría medirse dentro del 10 por ciento de precisión, si el menor valor del manómetro es 1 mm de agua?

8.141 Por un venturi fluye agua establemente a 70 F. La presión aguas arriba desde la garganta es 5 psig. El área de la garganta es 0.025 pies^2; el área aguas arriba es de 0.1 pie^2. Estime el flujo máximo que este dispositivo puede manejar sin cavitación.

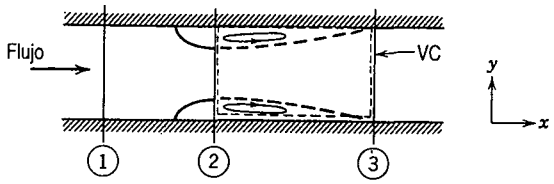
8.142 Se van a emplear popotes para mejorar el flujo de aire en un experimento de flujo en tubería. Al rellenar una sección de la tubería de aire con popotes, se forma un "elemento de flujo laminar" que podría permitir la medición directa del flujo de aire, y simultáneamente actuaría como un uniformizador del flujo. Para valorar esta idea, determine *a*) el número de Reynolds para el flujo en cada popote, *b*) el factor de fricción para el flujo en cada popote y *c*) la presión manométrica en la salida de los popotes. (Para flujo laminar en un tubo, el coeficiente de pérdidas de entrada es $K_{ent} \approx 1.4$ y $\alpha = 2.0$.) Comente sobre la utilidad de esta idea.



P8.142

8.143 Considere la instalación de una tobera de flujo en una tubería. Aplique las ecuaciones básicas al volumen de control indicado para mostrar que la pérdida de carga permanente a través del medidor puede expresarse, en forma adimensional, como el coeficiente de pérdida de carga,

$$C_l = \frac{p_1 - p_3}{p_1 - p_2} = \frac{1 - A_2/A_1}{1 + A_2/A_1}$$



P8.143

Capítulo 9

Flujo externo incompresible viscoso

Los flujos externos son aquellos flujos sobre cuerpos sumergidos en un fluido sin fronteras. El flujo sobre una placa plana semiinfinita (figura 2.11) y el flujo sobre un cilindro (figura 2.12*a*) son ejemplos de flujos externos. Éstos se estudiaron cualitativamente en el capítulo 2. Nuestro objetivo en este capítulo es cuantificar el comportamiento de fluidos incompresibles viscosos en flujo externo.

Varios fenómenos que ocurren en el flujo externo sobre un cuerpo se ilustran en el dibujo del flujo viscoso de alto número de Reynolds sobre un perfil aerodinámico (figura 9.1). El flujo de corriente libre se divide en el punto de estancamiento y fluye alrededor del cuerpo. El fluido en la superficie adquiere la velocidad del cuerpo como resultado de la condición de no deslizamiento. Se forman capas límite tanto en la superficie superior como en la inferior del cuerpo. (El espesor de la capa límite sobre ambas superficies en la figura 9.1 se exagera considerablemente para mayor claridad.) El flujo en las capas límite inicialmente es laminar. La transición a flujo turbulento ocurre a cierta distancia del punto de estancamiento, dependiendo de las condiciones de la corriente libre, la rugosidad de la superficie y el gradiente de presión. Los puntos de transición están indicados mediante la letra "T" en la figura. La capa límite turbulenta que sigue a la transición crece con

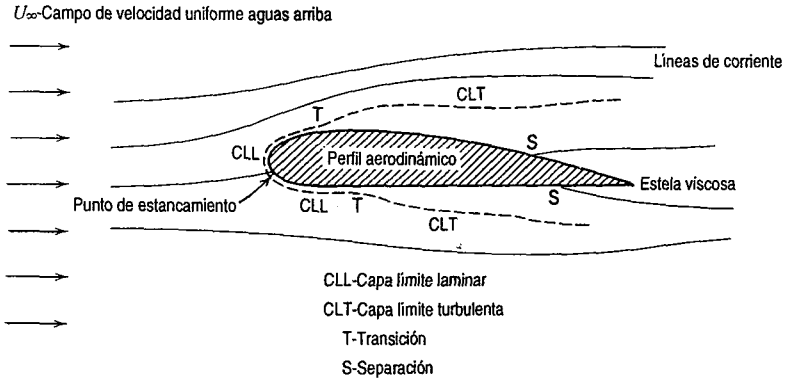


Fig. 9.1 Detalles del flujo viscoso alrededor de un perfil aerodinámico.

mayor rapidez que la capa laminar. El espesor de las capas límite en la superficie provoca un ligero desplazamiento de las líneas de corriente del flujo externo. En una región de presión creciente (un *gradiente de presión adversa*) es posible que ocurra la separación del flujo. Los puntos de separación se indican mediante la letra "S" en la figura. El fluido que estaba en las capas límite sobre el cuerpo forma una *estela* viscosa detrás de los puntos de separación.

La parte A de este capítulo se dedica a flujos de capa límite. Después de un análisis del concepto de capa límite, se presenta la solución exacta para el flujo laminar de capa límite sobre una placa plana (gradiente de presión cero). Como no existen soluciones exactas para capas límite turbulentas, deben emplearse soluciones aproximadas. La ecuación integral de momento para gradiente de presión diferente de cero se deduce a partir de principios primarios como la base para las soluciones aproximadas; éstas se consideran tanto para flujo laminar como para turbulento sobre placas planas. Aunque las soluciones aproximadas para flujos de capa límite con gradientes de presión están fuera del alcance de este libro, se estudiará el efecto de los gradientes de presión sobre los flujos de capa límite.

El perfil aerodinámico de la figura 9.1 experimenta una fuerza neta como resultado de las fuerzas de corte y de presión que actúan sobre sus superficies. La componente de la fuerza neta paralela al flujo uniforme aguas arriba, U_∞, se denomina fuerza de arrastre; la componente de la fuerza neta perpendicular a U_∞ se llama sustentación. La presencia de la separación de flujo antecede la determinación analítica de la sustentación y el arrastre. En la parte B de este capítulo se presentan análisis y correlaciones aproximados de datos experimentales para el arrastre y la sustentación sobre varios cuerpos de interés.

PARTE A CAPAS LÍMITE

9-1 CONCEPTO DE LA CAPA LÍMITE

Ludwig Prandtl [1], un aerodinamicista alemán, fue el primero que introdujo el concepto de capa límite en 1904.

Antes del importante descubrimiento histórico de Prandtl, la ciencia de la mecánica de fluidos se había desarrollado en dos direcciones bastante diferentes. La hidrodinámica teórica evolucionó a partir de la ecuación de movimiento de Euler (ecuación 6.2, publicada por Leonhard Euler en 1755) para un fluido no viscoso. Puesto que los resultados de la hidrodinámica contradecían muchas observaciones experimentales, los ingenieros prácticos desarrollaron su propio arte empírico de la hidráulica. Esto se basó en datos experimentales y difería significativamente del enfoque puramente matemático de la hidrodinámica teórica.

A pesar de que las ecuaciones completas que describen el movimiento de un fluido viscoso (las ecuaciones de Navier-Stokes, ecuaciones 5.26, desarrolladas por Navier, 1827, e independientemente por Stokes, 1845) se conocían antes de Prandtl, las dificultades matemáticas para la solución de dichas ecuaciones (excepto en unos cuantos casos simples) prohibían el tratamiento teórico de flujos viscosos. Prandtl demostró [1] que muchos flujos viscosos pueden analizarse dividiendo el flujo en dos regiones, una cercana a las fronteras sólidas y la otra cubriendo el resto del flujo. Sólo en la delgada región adyacente a una frontera sólida (la capa límite) es importante el efecto de la viscosidad. En la región exterior a la capa límite, el efecto de la viscosidad es despreciable y el fluido puede tratarse como no viscoso.

El concepto de la capa límite brindó el enlace que había estado faltando entre la teoría y la práctica. Además, el concepto de la capa límite permitió la solución de problemas de flujo viscoso, lo que habría sido imposible mediante la aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes al campo de flujo completo.[1] De tal modo, la introducción del concepto de la capa límite marcó el principio de la era moderna de la mecánica de fluidos.

El desarrollo de una capa límite sobre una superficie sólida se estudio en la sección 2-5.1. El desarrollo de una capa límite laminar sobre una placa plana se ilustró en la figura 2.11. En la capa límite, tanto las fuerzas viscosas como las de inercia son importantes. En consecuencia, no sorprende que el número de Reynolds (el cual representa la proporción entre las fuerzas de inercia y viscosa) sea significativo en la caracterización de los flujos de capa límite. La longitud característica empleada en el número de Reynolds puede ser la longitud en la dirección del flujo en la cual se ha desarrollado la capa límite o bien, alguna medida del espesor de la capa límite.

Como en el caso de flujo en un ducto, el flujo en una capa límite puede ser laminar o turbulento. No hay un único valor del número de Reynolds al cual ocurra la transición de flujo laminar a turbulento en una capa límite. Entre los factores que afectan la transición de la capa límite están el gradiente de presión, la rugosidad de la superficie, la transferencia de calor, fuerzas másicas y las perturbaciones de la corriente libre. La consideración detallada de estos efectos está fuera del alcance de este libro.

En muchas situaciones de flujo real, se desarrolla una capa límite sobre una superficie larga y esencialmente plana. Los ejemplos incluyen flujo sobre cascos de barcos y submarinos, alas de aviones y movimientos atmosféricos sobre terreno plano. Como los rasgos básicos de todos estos flujos se ilustran en el caso más simple del flujo sobre una capa plana, vamos a considerar éste primero.

Una imagen cualitativa del crecimiento de la capa límite sobre una capa plana se muestra en la figura 9.2. La capa límite es laminar a una corta distancia aguas abajo desde el borde delantero; la transición ocurre sobre una región de la placa más que en un sola línea a través de la misma. La región de transición se extiende aguas abajo hasta la posición donde el flujo de capa límite se vuelve completamente turbulento.

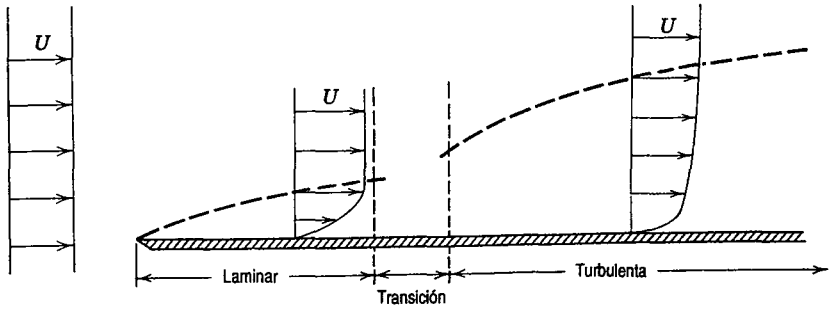


Fig. 9.2 Capa límite sobre una placa plana (el espesor vertical se ha exagerado considerablemente).

[1] Hoy en día, son comunes las soluciones por computadora de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para flujo incompresible sobre una placa plana lisa (gradiente de presión cero), en la ausencia de transferencia de calor, la transición de flujo laminar a turbulento en la capa límite puede retrasarse hasta un número de Reynolds, $Re_x = \rho Ux/\mu$, mayor que un millón si se minimizan las perturbaciones externas. Con fines de cálculo, bajo condiciones de flujo típicas, suele considerarse que la transición ocurre a un número de Reynolds de longitud de 500,000. En condiciones de aire estándar, con velocidad de corriente libre $U = 30$ m/s, esto corresponde a la longitud, x, a lo largo de la placa de $x \approx 0.24$ m. En la imagen cualitativa de la figura 9.2, hemos mostrado el crecimiento de la capa límite turbulenta a una proporción más rápida que la de la capa laminar. En secciones posteriores de este capítulo mostraremos que esto es desde luego cierto.

9-2 ESPESOR DE LA CAPA LÍMITE

La capa límite está en la región adyacente a una superficie sólida en la cual son importantes las fuerzas viscosas. El *espesor de perturbación* de la capa límite, δ, suele definirse como la distancia de la superficie al punto donde la velocidad está dentro de 1 por ciento de la velocidad de corriente libre. Puesto que el perfil de velocidad surge continua y asintóticamente en la corriente libre, el espesor de la capa límite, δ, es difícil de medir.

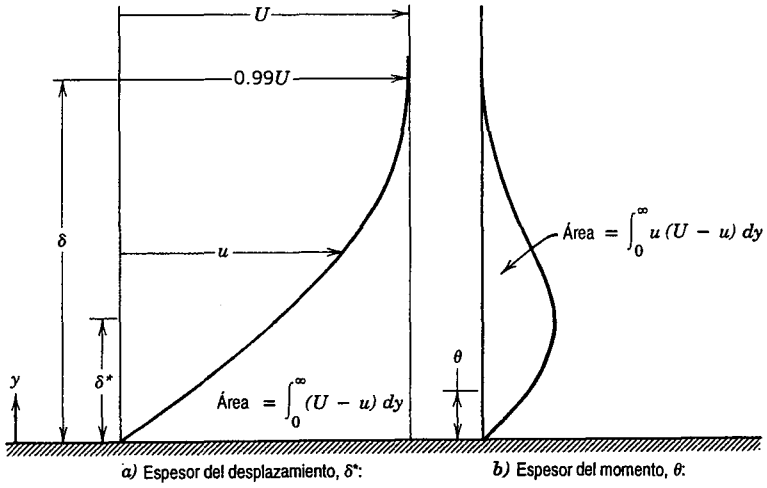


Fig. 9.3 Definiciones del espesor de la capa límite.

El efecto de las fuerzas viscosas en la capa límite es retardar el flujo. La relación de flujo de masa adyacente a una superficie sólida es menor que la relación de flujo másico que pasaría por la misma región en ausencia de una capa límite. La disminución en la relación de flujo másico debida a la influencia de fuerzas viscosas es $\int_0^\infty \rho(U - u)w\,dy$, donde w es el ancho de la superficie en la dirección perpendicular al flujo. Si no hubiera fuerzas viscosas, la velocidad en la sección sería U. El *espesor de desplazamiento*, δ^*, es la distancia que la frontera sólida tendría que desplazarse en un flujo sin fricción para producir el mismo déficit de la relación de flujo másico

que existe en la capa límite. El desplazamiento de la frontera en una distancia δ^* resultaría en una deficiencia de flujo másico de $\rho U\delta^* w$. De tal modo, como se ilustró en la figura 9.3*a*,

$$\rho U \delta^* w = \int_0^\infty \rho(U - u) w \, dy$$

Para flujo incompresible, ρ = constante, y

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{9.1}$$

Como $u = U$ en $y = \delta$, el integrando es esencialmente cero para $y \geq \delta$. La aplicación del concepto de espesor de desplazamiento se ilustra en el problema ejemplo 9.1.

El retardo del flujo dentro de la capa límite origina también una reducción en el flujo de momento en una sección comparada con el flujo no viscoso. La deficiencia de momento de la relación de flujo másico real, $\int_0^\infty \rho u w \, dy$, a través de la capa límite es $\int_0^\infty \rho u(U - u) w \, dy$. Si no hubiera fuerzas viscosas, sería necesario mover la frontera sólida hacia fuera para obtener una deficiencia de momento; al denotar esta distancia (el espesor de momento) como θ, la deficiencia de momento sería $\rho U^2 \theta w$. El *espesor de momento*, θ, se define como el espesor de una capa de fluido, de velocidad U, para la cual el flujo de momento es igual al déficit de flujo de momento a través de la capa límite. En consecuencia, como se ilustró en la figura 9.3*b*,

$$\rho U^2 \theta = \int_0^\infty \rho u(U - u) \, dy$$

Para flujo incompresible, ρ = constante, y

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{9.2}$$

De nuevo en este caso el integrando es esencialmente cero para $y \geq \delta$.

Los espesores de desplazamiento y de momento, δ^* y θ, son espesores *integrales*, debido a que sus definiciones, ecuaciones 9.1 y 9.2, están en términos de integrales a través de la capa límite. Como se definen en términos de integrales para las cuales el integrando se hace cero en la corriente libre, se evalúan con precisión a partir de datos experimentales de manera mucho más fácil que el espesor de perturbación de la capa límite, δ. Este hecho, junto con su significado físico, explica su uso común al especificar el espesor de la capa límite.

PROBLEMA EJEMPLO 9.1 Capa límite en flujo de canal

El túnel de viento de un laboratorio tiene una sección de prueba de 305 mm cuadrados. Los perfiles de velocidad de la capa límite se miden en dos secciones transversales y los espesores de desplazamiento se evalúan a partir de los perfiles medidos. En la sección ①, donde la velocidad de corriente libre es $U_1 = 26$ m/s, el espesor de desplazamiento es $\delta_1^* = 1.5$ mm. En la sección ②, localizada aguas abajo de la sección ①, $\delta_2^* = 2.1$ mm. Calcule el cambio en la presión estática entre las secciones ① y ②. Exprese el resultado como una fracción de la presión dinámica de corriente libre en la sección ①. Suponga condiciones de atmósfera estándar.

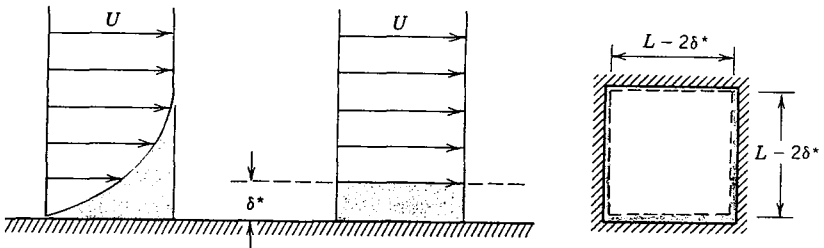
PROBLEMA EJEMPLO 9.1

DATOS: El flujo de aire estándar en un túnel de viento de laboratorio. La sección de prueba es $L =$ 305 mm cuadrados. Los espesores de desplazamiento son $\delta_1^* = 1.5$ mm y $\delta_2^* = 2.1$ mm. La velocidad de la corriente libre es $U_1 = 26$ m/s.

ENCUENTRE: El cambio en la presión estática entre las secciones ① y ②. (Expréselo como una fracción de la presión dinámica de la corriente libre en la sección ①.)

SOLUCIÓN:

Emplee el concepto del espesor de desplazamiento para encontrar el área de flujo efectiva para el flujo de la corriente libre fuera de las delgadas capas límite de la pared. Sustituya los perfiles de velocidad de la capa límite reales por perfiles de velocidad uniformes como los que se dibujan en las siguientes figuras.



a) Perfil de velocidad real *b)* Perfil de velocidad hipotético *c)* Sección transversal del túnel de viento

Aplique las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli a flujo de corriente libre fuera de los espesores de desplazamiento de la capa límite, donde los esfuerzos viscosos son despreciables.

$= 0(1)$

Ecuaciones básicas: $$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en cada sección fuera de δ^*
4) Flujo a lo largo de una línea de corriente de las secciones ① a la ②
5) Sin efectos friccionantes en la corriente libre
6) Desprecie los cambios de elevación

De la ecuación de Bernoulli, obtenemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}\rho(U_2^2 - U_1^2) = \frac{1}{2}\rho U_1^2\left[\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 - 1\right]$$

o

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 - 1$$

De la continuidad, $U_1A_1 = U_1A_1 = U_2A_2 = U_2A_2$, por lo que $\frac{U_2}{U_1} = \frac{A_1}{A_2}$, donde $A = (L - 2\delta^*)^2$ es el área efectiva del flujo. La sustitución produce

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1 = \left[\frac{(L - 2\delta_1^*)^2}{(L - 2\delta_2^*)^2}\right]^2 - 1$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = \left[\frac{305 - 2(1.51)}{305 - 2(2.1)}\right]^4 - 1 = 0.0161 \quad \text{o} \quad 1.61 \text{ por ciento}$$

$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2}$

Este problema ilustra la aplicación del concepto del espesor del desplazamiento. El flujo viscoso real de la capa límite se modela como un flujo no viscoso uniforme desplazado desde la frontera a lo largo de una distancia δ^*.

**9-3 CAPA LÍMITE LAMINAR DE PLACA PLANA: SOLUCIÓN EXACTA

La solución para la capa límite laminar sobre una placa plana horizontal fue obtenida por H. Blasius [2], uno de los estudiantes de Prandtl, en 1908. Para flujo bidimensional, estable e incompresible con gradiente de presión cero, las ecuaciones que gobiernan el movimiento se reducen a [3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{9.3}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{9.4}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} &\text{en} \quad y = 0, \qquad u = 0 \\ &\text{en} \quad y = \infty, \qquad u = U, \qquad \frac{du}{dy} = 0 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Blasius pensó que el perfil de velocidad, u/U, debía ser similar para todos los valores de x cuando se graficara contra una distancia adimensional desde la pared; el espesor de la capa límite, δ, era una elección natural para adimensionalizar la distancia desde la pared. De tal manera, la solución es de la forma

$$\frac{u}{U} = g(\eta) \qquad \text{donde} \quad \eta \propto \frac{y}{\delta} \tag{9.6}$$

Con base en la solución de Stokes [4], Blasius razonó que $\delta \propto \sqrt{\nu x/U}$ y estableció

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \tag{9.7}$$

La introducción de la función de corriente, ψ, donde

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.4}$$

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

satisface la ecuación de continuidad (ecuación 9.3) idénticamente; al remplazar u y v en la ecuación 9.4, ésta se reduce a una en la cual ψ es la única variable dependiente. Definiendo una función de corriente adimensional como

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U}} \tag{9.8}$$

hace a $f(\eta)$ la variable dependiente y a η la variable independiente en la ecuación 9.4. Con ψ definida por medio de la ecuación 9.8 y η definida mediante la ecuación 9.7, podemos evaluar cada uno de los términos en la ecuación 9.4.

Las componentes de la velocidad están dadas por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U}\frac{df}{d\eta}\sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U\frac{df}{d\eta} \tag{9.9}$$

y

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left[\sqrt{\nu x U}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}f\right]$$

$$= -\left[\sqrt{\nu x U}\frac{df}{d\eta}\left(-\frac{1}{2}\eta\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}f\right]$$

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\left[\eta\frac{df}{d\eta} - f\right] \tag{9.10}$$

Al diferenciar las componentes de la velocidad, puede mostrarse también que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U}{2x}\eta\frac{d^2f}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U\sqrt{U/\nu x}\frac{d^2f}{d\eta^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x}\frac{d^3f}{d\eta^3}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 9.4, obtenemos

$$2\frac{d^3f}{d\eta^3} + f\frac{d^2f}{d\eta^2} = 0 \tag{9.11}$$

con las condiciones de frontera:

$$\text{en} \quad \eta = 0, \qquad f = \frac{df}{d\eta} = 0$$

$$\text{en} \quad \eta \to \infty, \qquad \frac{df}{d\eta} = 1 \tag{9.12}$$

Las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que gobiernan el crecimiento de la capa límite laminar sobre una placa plana (ecuaciones 9.3 y 9.4) se han transformado en una ecuación

ι y v en la ecuación
do una función de

(9.8)

ıación 9.4. Con ψ
podemos evaluar

(9.9)

(9.10)

Tabla 9.1 La función $f(\eta)$ para la capa límite laminar a lo largo de una placa plana a incidencia cero

$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''
0	0	0	0.3321
0.5	0.0415	0.1659	0.3309
1.0	0.1656	0.3298	0.3230
1.5	0.3701	0.4868	0.3026
2.0	0.6500	0.6298	0.2668
2.5	0.9963	0.7513	0.2174
3.0	1.3968	0.8460	0.1614
3.5	1.8377	0.9130	0.1078
4.0	2.3057	0.9555	0.0642
4.5	2.7901	0.9795	0.0340
5.0	3.2833	0.9915	0.0159
5.5	3.7806	0.9969	0.0066
6.0	4.2796	0.9990	0.0024
6.5	4.7793	0.9997	0.0008
7.0	5.2792	0.9999	0.0002
7.5	5.7792	1.0000	0.0001
8.0	6.2792	1.0000	0.0000

diferencial ordinaria no lineal de tercer orden (ecuación 9.11) con condiciones de frontera dadas por la ecuación 9.12. No es posible resolver la ecuación 9.11 en forma cerrada; Blasius la resolvió empleando una expansión de la serie de potencias en torno a $\eta = 0$ acoplada a una expansión asintótica para $\eta \to \infty$. La misma ecuación fue resuelta posteriormente con mayor precisión —empleando también métodos numéricos— por Howarth [5], quien reportó los resultados con hasta cinco lugares decimales. Los valores numéricos de f, $df/d\eta$ y $d^2f/d\eta^2$ en la tabla 9.1, se calcularon con una computadora personal empleando integración numérica de Runge-Kutta de cuarto orden.

El perfil de velocidad se obtiene de forma adimensional graficando u/U contra η, empleando los valores de la tabla 9.1. El perfil resultante se grafica en la figura 9.3*a*. Los perfiles de velocidad medidos experimentalmente están en excelente concordancia con la solución analítica. Los perfiles de todas las posiciones sobre una placa plana son *similares*; ellos se colapsan en un sólo perfil cuando se grafican en coordenadas adimensionales.

(9.11)

De la tabla 9.1, vemos que en $\eta = 5.0$, $u/U = 0.992$. Al definir el espesor de la capa límite, δ, como el valor de y para el cual $u/U = 0.99$, entonces de la ecuación 9.7,

$$\delta \approx \frac{5.0}{\sqrt{U/\nu x}} = \frac{5.0x}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.13}$$

El espesor de la capa límite, δ, se indica sobre la gráfica del perfil de velocidad de la figura 9.3*a*.

(9.12)

Los esfuerzos de corte de pared pueden expresarse como

miento de la capa
o en una ecuación

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg]_{y=0} = \mu U \sqrt{U/\nu x} \frac{d^2 f}{d\eta^2}\bigg]_{\eta=0}$$

Entonces

$$\tau_w = 0.332U\sqrt{\rho\mu U/x} = \frac{0.332\rho U^2}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.14}$$

y el coeficiente de esfuerzo de corte de pared, C_f, está dado por

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.15}$$

Cada uno de los resultados para el espesor de la capa límite, δ, el esfuerzo de corte de pared, τ_w, y el coeficiente de fricción superficial, C_f, ecuaciones de la 9.13 a la 9.15, dependen del número de Reynolds de longitud, Re_x, hasta la potencia un medio. El espesor de la capa límite aumenta como $x^{1/2}$, y el esfuerzo de corte de la pared y el coeficiente de fricción superficial varían como $1/x^{1/2}$. Estos resultados caracterizan el comportamiento de la capa límite laminar sobre una placa plana.

EJEMPLO 9.2 Capa límite laminar sobre una placa plana: solución exacta

Emplee los resultados numéricos presentados en la tabla 9.1 para evaluar las siguientes cantidades para el flujo de capa límite laminar sobre una placa plana:

a) δ^*/δ (evalúe para $\eta = 5$ y cuando $\eta \to \infty$).
b) v/U en el borde de la capa límite.
c) Compare la pendiente de una línea de corriente en el borde de la capa límite con la pendiente de δ contra x.

PROBLEMA EJEMPLO 9.2

DATOS: La solución numérica para la capa límite laminar de placa plana, tabla 9.1.

ENCUENTRE:
a) δ^*/δ (evalúe para $\eta = 5$ y cuando $\eta \to \infty$).
b) v/U en el borde de la capa límite.
c) Compare la pendiente de una línea de corriente en el borde de la capa límite con la pendiente de δ contra x.

SOLUCIÓN:
El espesor de desplazamiento se define mediante la ecuación 9.1 como

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

De la ecuación 9.7, $\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$, por lo que $y = \eta\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ y $dy = d\eta\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$

Por consiguiente,

$$\delta^* = \int_0^{\eta_{máx}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\, d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^{\eta_{máx}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \tag{9.14}$$

Observe: Correspondiendo al límite superior en y en la ecuación 9.1, $\eta_{máx} = \infty$ o $\eta_{máx} \approx 5$. De la ecuación 9.13,

$$\delta \approx \frac{5}{\sqrt{U/\nu x}}, \qquad \text{por lo que} \qquad \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{\delta}{5} \tag{9.15}$$

Por tanto,

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5} \int_0^{\eta_{máx}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

Sustituyendo de la ecuación 9.9, obtenemos

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5} \int_0^{\eta_{máx}} \left(1 - \frac{df}{d\eta}\right) d\eta$$

La integración produce

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5} \Big[\eta - f(\eta)\Big]_0^{\eta_{máx}}$$

Al evaluar en $\eta_{máx} = 5$, obtenemos

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5}(5.0 - 3.2833) = 0.343 \qquad \frac{\delta^*}{\delta}(\eta = 5)$$

La cantidad $\eta - f(\eta)$ se vuelve constante para $\eta > 8$. Al evaluar en $\eta_{máx} = 8$, resulta

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5}(8.0 - 6.2792) = 0.344 \qquad \frac{\delta^*}{\delta}(\eta \to \infty)$$

De tal modo, $\delta^*_{\eta \to \infty}$ es 0.29 por ciento mayor que $\delta^*_{\eta = 5}$.

De la ecuación 9.10,

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f\right), \quad \text{por lo que} \quad \frac{v}{U} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f\right) = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f\right)$$

Evaluando en el borde la capa límite ($\eta = 5$), obtenemos

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}}[5(0.9915) - 3.2833] = \frac{0.837}{\sqrt{Re_x}} \approx \frac{0.84}{\sqrt{Re_x}} \qquad \frac{v}{U}(\eta = 5)$$

En consecuencia, v es sólo 0.84 por ciento de U en $Re_x = 10^4$, y sólo aproximadamente 0.12 por ciento de U en $Re_x = 5 \times 10^5$.

La pendiente de una línea de corriente en el borde de la capa límite es

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{línea de corriente}} = \frac{v}{u} = \frac{v}{U} \approx \frac{0.84}{\sqrt{Re_x}}$$

La pendiente del borde de la capa límite puede obtenerse de la ecuación 9.13.

$$\delta \approx \frac{5}{\sqrt{U/\nu x}} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \text{por lo que} \quad \frac{d\delta}{dx} = 5\sqrt{\frac{\nu}{U}}\frac{1}{2}x^{-1/2} = 2.5\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{2.5}{\sqrt{Re_x}}$$

Por tanto $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{línea de corriente}} = \frac{0.84\, d\delta}{2.5\, dx} = 0.336\, \frac{d\delta}{dx}$ ←

Este resultado muestra que las líneas de corriente penetran el borde de la capa límite, como se muestra en el dibujo:

Este problema ilustra la aplicación de resultados de la solución numérica de la capa límite laminar sobre una placa plana.

9-4 ECUACIÓN INTEGRAL DE MOMENTO

La solución exacta de Blasius proporcionó una expresión para el espesor de la capa límite, $\delta(x)$, y el esfuerzo de corte de pared, $\tau_w(x)$. Se encontró que los perfiles de velocidad son similares cuando se grafican adimensionalmente como u/U contra y/δ. Una solución de forma cerrada para el perfil de velocidad no fue posible; resultó necesaria una solución numérica.

Es posible emplear métodos aproximados para obtener soluciones de forma cerrada para el flujo laminar de capa límite sobre una placa plana. Los mismos métodos aproximados pueden utilizarse para encontrar la solución relativa a las características del desarrollo de una capa límite turbulenta. Puesto que no existen las soluciones exactas para las capas límites turbulentas, en este caso son necesarias técnicas de solución aproximada. En esta sección desarrollaremos un análisis que nos permitirá aproximar con gran precisión el espesor de una capa límite laminar o turbulenta como una función de la distancia a lo largo de un cuerpo. Aplicaremos de nuevo las ecuaciones integrales a un volumen de control diferencial. Nuestro objetivo es desarrollar una ecuación que nos permita predecir (al menos aproximadamente) la manera en la cual la capa límite crece como función de la distancia a lo largo de un cuerpo. Deduciremos una relación que pueda aplicarse tanto a flujo laminar como a turbulento; la relación no se restringirá a flujos de gradiente de presión cero.

Considere el flujo bidimensional, estable e incompresible sobre una superficie sólida. El espesor de la capa límite, δ, crece de alguna manera con el aumento de la distancia, x. Para nuestro análisis elegimos un volumen de control diferencial, de longitud dx, ancho w, y altura $\delta(x)$, como se muestra en la figura 9.4.

Deseamos determinar el espesor de la capa límite, δ, como una función de x. Habrá flujo másico a través de las superficies *ab* y *cd* del volumen de control diferencial *abcd*. ¿Qué sucede con la superficie *bc*? ¿Habrá flujo másico a través de esta superficie? En nuestro análisis anterior de capas límite (capítulo 2) y en el problema ejemplo 9.2, encontramos que el borde de la capa límite no es una línea de corriente. Por ello habrá flujo másico a través de la superficie *bc*. Como la superficie de control *ad* es adyacente a una frontera sólida, no habrá flujo a través de *ad*. Antes de considerar las fuerzas que actúan sobre el volumen de control y los flujos de momento a través de la superficie de control, aplicaremos la ecuación de continuidad para determinar el flujo másico a través de cada porción de la superficie de control.

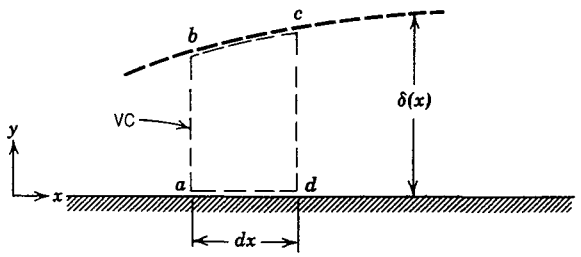


Fig. 9.4 Volumen de control diferencial en una capa límite.

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0(1)} \int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo bidimensional

Por tanto,

$$0 = \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc} + \dot{m}_{cd}$$

o

$$\dot{m}_{bc} = -\dot{m}_{ab} - \dot{m}_{cd}$$

Ahora vamos a evaluar estos términos para el volumen de control diferencial de ancho w:

Superficie — *Flujo másico*

ab — La superficie *ab* se localiza en x. Como el flujo es bidimensional (no hay variación con z), el flujo másico a través de *ab* es

$$\dot{m}_{ab} = -\left\{ \int_0^{\delta} \rho u \, dy \right\} w$$

cd — La superficie *cd* se localiza en $x + dx$. Desarrollando $\dot{m}$ en una serie de Taylor alrededor de la posición x, obtenemos

$$\dot{m}_{x+dx} = \dot{m}_x + \left. \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} \right]_x dx$$

y en consecuencia,

$$\dot{m}_{cd} = \left\{ \int_0^{\delta} \rho u \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u \, dy \right] dx \right\} w$$

bc Por consiguiente, para la superficie *bc* obtenemos

$$\dot{m}_{bc} = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u \, dy \right] dx \right\} w$$

Después de esto vamos a considerar los flujos de momento y las fuerzas asociadas con el volumen de control *abcd*. Éstos se relacionan mediante la ecuación de momento.

b. Ecuación de momento

Se aplica la componente x de la ecuación de momento al volumen de control *abcd*:

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(3)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC}}^{=0(1)} u\rho \, d\forall + \int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Suposición: 3) $F_{B_x} = 0$

Por tanto,

$$F_{S_x} = \text{fm}_{ab} + \text{fm}_{bc} + \text{fm}_{cd}$$

donde fm representa la componente x del flujo de momento.

Para aplicar esta ecuación al volumen de control diferencial *abcd*, debemos obtener expresiones para el flujo de momento x a través de la superficie de control, así como para las fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control en la dirección x. Consideremos primero el flujo de momento y de nuevo cada segmento de la superficie de control.

Superficie *Flujo de momento (fm)*

ab La superficie *ab* se localiza en x. Como el flujo es bidimensional, el flujo de momento x a través de *ab* es

$$\text{fm}_{ab} = -\left\{ \int_0^\delta u\rho u \, dy \right\} w$$

cd La superficie *cd* se localiza en $x + dx$. Al desarrollar el flujo de momento (fm) x en una serie de Taylor alrededor de la posición x, obtenemos

$$\text{fm}_{x+dx} = \text{fm}_x + \left. \frac{\partial \text{fm}}{\partial x} \right]_x dx$$

o

$$\text{fm}_{cd} = \left\{ \int_0^\delta u\rho u \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta u\rho u \, dy \right] dx \right\} w$$

bc Puesto que la masa que atraviesa la superficie *bc* tiene componente U de velocidad en la dirección x, el flujo de momento x a través de *bc* está dado por

$$\text{fm}_{bc} = U\dot{m}_{bc}$$

$$\text{fm}_{bc} = -U\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{\delta} \rho u\, dy\right] dx\right\} w$$

A partir de lo anterior podemos evaluar el flujo de momento x neto a través de la superficie de control como

$$\int_{sc} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\left\{\int_0^{\delta} u\rho u\, dy\right\} w + \left\{\int_0^{\delta} u\rho u\, dy\right\} w + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{\delta} u\rho u\, dy\right] dx\right\} w - U\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{\delta} \rho u\, dy\right] dx\right\} w$$

Reagrupando términos, encontramos que

$$\int_{sc} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{\delta} u\rho u\, dy\right] dx - U\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{\delta} \rho u\, dy\right] dx\right\} w$$

Luego de que tenemos una expresión adecuada para el flujo de momento x a través de la superficie de control, vamos a considerar las fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control en la dirección x. (Por conveniencia, el volumen de control diferencial se ha vuelto a dibujar en la figura 9.5.) Reconocemos que las fuerzas normales actúan sobre las tres superficies de la superficie de control. Además, una fuerza de corte actúa sobre la superficie *ad*. Como el gradiente de velocidad se vuelve cero en el borde de la capa límite, ninguna fuerza cortante actúa a lo largo de la superficie *bc*.

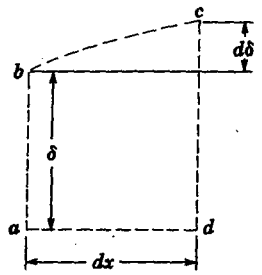


Fig. 9.5 Volumen de control diferencial.

Superficie *Fuerza*

ab Si la presión en x es p, entonces la fuerza que actúa sobre la superficie *ab* está dada por

$$F_{ab} = pw\delta$$

(La capa límite es muy delgada; su espesor se ha exagerado considerablemente en todos los dibujos que se han efectuado. Como es delgada, es posible despreciar las variaciones de presión en la dirección y, y suponemos que dentro de la capa límite, $p = p(x)$.)

cd Al desarrollar en una serie de Taylor, la presión en $x + dx$ está dada por

$$p_{x+dx} = p + \left.\frac{dp}{dx}\right]_x dx$$

La fuerza sobre la superficie *cd* está determinada entonces por

$$F_{cd} = -\left(p + \left.\frac{dp}{dx}\right]_x dx\right) w(\delta + d\delta)$$

bc La presión promedio que actúa sobre la superficie *bc* es

$$p + \frac{1}{2}\left.\frac{dp}{dx}\right]_x dx$$

Entonces la componente x de la fuerza normal que actúa sobre *bc* está dada por

$$F_{bc} = \left(p + \frac{1}{2}\left.\frac{dp}{dx}\right]_x dx\right) w\, d\delta$$

ad La fuerza de corte que actúa sobre *ad* está dada por

$$F_{ad} = -\tau_w w\, dx$$

Al sumar la componente x de cada fuerza que actúa sobre el volumen de control, obtenemos

$$F_{S_x} = \left\{-\frac{dp}{dx}\delta\, dx - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}dx\cancel{d\delta}^{\simeq 0} - \tau_w\, dx\right\} w$$

donde observamos que $dx\, d\delta \ll \delta dx$, por lo que omitimos el segundo término.

Sustituyendo la expresión para $\int_{SC} u\rho\vec{V} \cdot dA$ y F_{S_x} en la ecuación de momento x, obtenemos

$$\left\{-\frac{dp}{dx}\delta\, dx - \tau_w\, dx\right\} w = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta u\rho u\, dy\right] dx - U\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u\, dy\right] dx\right\} w$$

La división de esta ecuación entre $w\, dx$ produce

$$-\delta\frac{dp}{dx} - \tau_w = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\rho u\, dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\, dy \tag{9.16}$$

La ecuación 9.16 es una ecuación "integral de momento" que proporciona una relación entre las componentes x de las fuerzas que actúan en una capa límite y el flujo de momento x.

El gradiente de presión, dp/dx, puede determinarse aplicando la ecuación de Bernoulli al flujo no viscoso fuera de la capa límite; $dp/dx = -\rho U\, dU/dx$. Si reconocemos que $\delta = \int_0^\delta dy$, entonces la ecuación 9.16 puede escribirse como

$$\tau_w = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\rho u\, dy + U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\, dy + \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho U\, dy$$

Puesto que

$$U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u U\,dy - \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho u\,dy$$

entonces

$$\tau_w = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u(U-u)\,dy + \frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho(U-u)\,dy$$

y

$$\tau_w = \frac{\partial}{\partial x}U^2\int_0^\delta \rho\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy + U\frac{dU}{dx}\int_0^\delta \rho\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

Empleando las definiciones del espesor de desplazamiento, δ^* (la ecuación 9.1), y el espesor del momento, θ (ecuación 9.2), entonces

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}(U^2\theta) + \delta^* U\frac{dU}{dx} \tag{9.17}$$

La ecuación 9.17 es la ecuación integral de momento; esta ecuación producirá una ecuación diferencial ordinaria para el espesor de la capa límite, siempre que se suponga una forma adecuada para el perfil de velocidad y que el esfuerzo de corte de la pared pueda relacionarse con otras variables. Una vez que se determina el espesor de la capa límite, es posible calcular el espesor del momento, el espesor de desplazamiento y el esfuerzo de corte de pared.

La ecuación 9.17 se obtuvo aplicando las ecuaciones básicas (continuidad y momento x) a un volumen de control diferencial. Al revisar las suposiciones que hicimos en la deducción, vemos que la ecuación se restringe a flujo estable, incompresible y bidimensional sin fuerzas de cuerpo.

No hemos hecho ninguna suposición específica que relacione el esfuerzo de corte de pared, τ_w, con el campo de velocidad. De tal modo, la ecuación 9.17 es válida ya sea para flujo de capa límite laminar o turbulenta. Con el propósito de emplear esta ecuación para estimar el espesor de la capa límite como una función de x, debemos:

1. Obtener una primera aproximación para la distribución de velocidad, $U(x)$. Ésta se determina a partir de la teoría de flujo no viscoso (la velocidad que existiría en ausencia de una capa límite). La presión en la capa límite se relaciona con la velocidad de corriente libre, U, empleando la ecuación de Bernoulli.
2. Suponer una forma razonable del perfil de velocidad dentro de la capa límite.
3. Relacionar el esfuerzo de corte de pared con el campo de velocidad.

Para ilustrar la aplicación de la ecuación 9.17 a flujos de capa límite, consideramos primero el caso de gradiente de presión cero del flujo sobre una placa plana (sección 9-5). Los efectos de los gradientes de presión en el flujo de la capa límite se analizarán en la sección 9-6.

9-5 EMPLEO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DEL MOMENTO PARA EL FLUJO DE GRADIENTE DE PRESIÓN CERO

Para el caso especial de flujo sobre una placa plana, U = constante. De la ecuación de Bernoulli, vemos que en este caso, p = constante, y en consecuencia $dp/dx = 0$.

La ecuación integral del momento se reduce entonces a

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{9.18}$$

La distribución de velocidad, u/U, en la capa límite se especifica normalmente como una función de y/δ. (Advierta que u/U es adimensional y δ es sólo función de x.) En consecuencia, es conveniente cambiar la variable de integración de y a y/δ. Definiendo

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

entonces

$$dy = \delta\, d\eta$$

y la ecuación integral del momento para el gradiente de presión cero se escribe

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \tag{9.19}$$

Deseamos resolver esta ecuación para el espesor de la capa límite como una función de x. Para hacer esto, debemos:

1. Suponer una distribución de velocidad en la capa límite-una relación funcional de la forma

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

a) La distribución de velocidad supuesta debe satisfacer ciertas condiciones físicas de frontera:

$$\text{en} \quad y = 0, \qquad u = 0$$
$$\text{en} \quad y = \delta, \qquad u = U$$
$$\text{en} \quad y = \delta, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

b) Advierta que una vez que se ha supuesto la distribución de velocidad, el valor numérico de la integral en la ecuación 9.19 es simplemente

$$\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \frac{\theta}{\delta} = \text{constante} = \beta$$

y la ecuación integral del momento se transforma en

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\beta$$

2. Obtener una expresión para τ_w en términos de δ. Esto nos permitirá entonces resolver para $\delta(x)$, como se ilustra adelante.

9-5.1 Flujo laminar

Para flujc
un polino

Las cond

Al evalu

El esfue

La sust

o

Despu

Sustit

o

Integ

o

9-5.1 Flujo laminar

Para flujo laminar sobre una placa plana, una suposición razonable para el perfil de velocidad es un polinomio en y:

$$u = a + by + cy^2$$

Las condiciones físicas de la frontera son:

$$\text{en} \quad y = 0, \qquad u = 0$$
$$\text{en} \quad y = \delta, \qquad u = U$$
$$\text{en} \quad y = \delta, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Al evaluar las constantes a, b y c, se obtiene

$$\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2 \tag{9.20}$$

El esfuerzo de corte de pared está dado por

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg)_{y=0}$$

La sustitución del perfil de velocidad supuesto, ecuación 9.20, en esta expresión para τ_w, produce

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = \mu \left.\frac{U\partial(u/U)}{\delta\partial(y/\delta)}\right]_{y/\delta=0} = \left.\frac{\mu U}{\delta}\frac{d(u/U)}{d\eta}\right]_{\eta=0}$$

o

$$\tau_w = \left.\frac{\mu U}{\delta}\frac{d}{d\eta}(2\eta - \eta^2)\right]_{\eta=0} = \left.\frac{\mu U}{\delta}(2 - 2\eta)\right]_{\eta=0} = \frac{2\mu U}{\delta}$$

Después de esto podemos aplicar la ecuación integral del momento

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \tag{9.19}$$

Sustituyendo τ_w y u/U, obtenemos

$$\frac{2\mu U}{\delta} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2)\, d\eta$$

o

$$\frac{2\mu U}{\delta\rho U^2} = \frac{d\delta}{dx}\int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4)\, d\eta$$

Integrando y sustituyendo los límites obtenemos

$$\frac{2\mu}{\delta\rho U} = \frac{2}{15}\frac{d\delta}{dx}$$

o

$$\delta\, d\delta = \frac{15\mu}{\rho U} dx$$

que es una ecuación diferencial para δ. Al integrar otra vez encontramos

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{15\mu}{\rho U}x + c$$

Si suponemos que $\delta = 0$ en $x = 0$, entonces $c = 0$ y en consecuencia,

$$\delta = \sqrt{\frac{30\mu x}{\rho U}}$$

o

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\mu}{\rho U x}} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.21}$$

La ecuación 9.21 muestra que la relación entre el espesor de la capa límite laminar y la distancia a lo largo de una placa plana varía inversamente con la raíz cuadrada del número de Reynolds de longitud. Tiene la misma forma que la solución exacta deducida, a partir de las ecuaciones diferenciales completas del movimiento, por H. Blasius en 1908. Notablemente, la ecuación 9.21 presenta solamente un error (la constante es demasiado grande) de aproximadamente 10 por ciento en comparación con la solución exacta (sección 9-3). La tabla 9.2 resume los resultados correspondientes calculados empleando perfiles de velocidad aproximados y enlista los resultados obtenidos a partir de la solución exacta. Las formas de los perfiles aproximados pueden compararse fácilmente graficando u/U contra y/δ (véase el problema 9.9).

Una vez que conocemos el espesor de la capa límite, todos los detalles del flujo pueden determinarse. EL coeficiente del esfuerzo de corte en la pared, o de "fricción superficial", se define como

$$C_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{9.22}$$

Sustituyendo a partir del perfil de velocidad y la ecuación 9.21, se obtiene

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2\mu(U/\delta)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{4\mu}{\rho U\delta} = 4\frac{\mu}{\rho U x}\frac{x}{\delta} = 4\frac{1}{Re_x}\frac{\sqrt{Re_x}}{5.48}$$

Por último,

$$C_f = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.23}$$

Una vez que se conoce la variación de τ_w, el arrastre viscoso sobre la superficie puede evaluarse por integración sobre el área de la placa plana, como se ilustra en el problema ejemplo 9.3.

La ecuación 9.21 puede emplearse para calcular el espesor de la capa límite laminar en la transición. En $Re_x = 5 \times 10^5$, con $U = 30$ m/s, $x = 0.24$ m para aire en condiciones estándar. Por consiguiente,

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5.48}{\sqrt{5\times 10^5}} = 0.00775$$

y el espesor de la capa límite es

$$\delta = 0.00775x = 0.00775(0.24\text{ m}) = 1.86\text{ mm}$$

Tabla 9.2 Resultados del cálculo del flujo de capa límite laminar sobre una placa plana a incidencia cero basados en perfiles de velocidad aproximados

Distribución de velocidad $\frac{u}{U}=f\left(\frac{y}{\delta}\right)=f(\eta)$	$\frac{\theta}{\delta}$	$\frac{\delta^*}{\delta}$	$H=\frac{\delta^*}{\theta}$	$a=\frac{\delta}{x}\sqrt{Re_x}$	$b=C_f\sqrt{Re_x}$
$f(\eta)=\eta$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	3.00	3.46	0.577
$f(\eta)=2\eta-\eta^2$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	2.50	5.48	0.730
$f(\eta)=\frac{3}{2}\eta-\frac{1}{2}\eta^3$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	2.69	4.64	0.647
$f(\eta)=2\eta-2\eta^3+\eta^4$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2.55	5.84	0.685
$f(\eta)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	2.66	4.80	0.654
Exacta	—	—	2.59	5.0	0.664

El espesor de la capa límite en la transición es menor que 1 por ciento de la longitud de desarrollo, x. Estos cálculos confirman que los efectos viscosos se confinan a una capa muy delgada cerca de la superficie de un cuerpo.

Los resultados en la tabla 9.2 indican que es posible obtener resultados razonables con una variedad de perfiles de velocidad aproximados.

EJEMPLO 9.3 Capa límite laminar sobre una placa plana: solución aproximada empleando un perfil de velocidad senoidal

Considere flujo de capa límite laminar bidimensional a lo largo de una placa plana. Suponga que el perfil de velocidad en la capa límite es senoidal,

$$\frac{u}{U}=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

Encuentre expresiones para:

a) la relación de crecimiento de δ como una función de x.

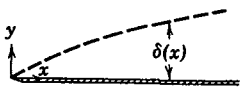
b) el espesor de desplazamiento, δ^*, como una función de x.

c) la fuerza de fricción total sobre una placa de longitud L y ancho b.

PROBLEMA EJEMPLO 9.3

DATOS: Un flujo de capa límite laminar y bidimensional a lo largo de una placa plana. El perfil de velocidad de la capa límite es

$$\frac{u}{U}=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{para } 0\le y\le\delta$$



y

$$\frac{u}{U} = 1 \qquad \text{para } y > \delta$$

ENCUENTRE: *a*) $\delta(x)$.
b) $\delta^*(x)$.
c) La fuerza de fricción sobre una placa de longitud L y ancho b.

SOLUCIÓN:
Para flujo de placa plana, U = constante, $dp/dx = 0$ y

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \tag{9.19}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo incompresible

Sustituyendo $\frac{u}{U} = \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\eta$ en la ecuación 9.19, obtenemos

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\eta\left(1 - \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta$$

$$= \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left(\sin\frac{\pi}{2}\eta - \text{sen}^2\,\frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta$$

$$= \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \frac{2}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi}{2}\eta - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\eta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,\pi\eta\right]_0^1$$

$$= \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \frac{2}{\pi}\left[0 + 1 - \frac{\pi}{4} + 0 + 0 - 0\right]$$

$$\tau_w = 0.137\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = \beta\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}; \quad \beta = 0.137$$

Después de esto

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg]_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)}\bigg]_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2}\eta\bigg]_{\eta=0} = \frac{\pi\mu U}{2\delta}$$

Por tanto,

$$\tau_w = \frac{\pi\mu U}{2\delta} = 0.137\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

La separación de variables da

$$\delta\, d\delta = 11.5 \frac{\mu}{\rho U} dx$$

Al integrar, obtenemos

$$\frac{\delta^2}{2} = 11.5 \frac{\mu}{\rho U} x + c$$

Pero $c = 0$, puesto que $\delta = 0$ en $x = 0$, por lo que

$$\delta = \sqrt{23.0\frac{x\mu}{\rho U}}$$

o

$$\frac{\delta}{x} = 4.80\sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} = \frac{4.80}{\sqrt{Re_x}} \qquad \delta(x)$$

El espesor de desplazamiento, δ^*, está dado por

(9.19)

$$\delta^* = \delta\int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

(9.19)

$$= \delta\int_0^1 \left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta = \delta\left[\eta + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\eta\right]_0^1$$

$$\delta^* = \delta\left[1 - 0 + 0 - \frac{2}{\pi}\right] = \delta\left[1 - \frac{2}{\pi}\right]$$

Puesto que, de la parte *a*),

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.80}{\sqrt{Re_x}}$$

entonces

$$\frac{\delta^*}{x} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{4.80}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1.74}{\sqrt{Re_x}} \qquad \delta^*(x)$$

La fuerza de fricción total sobre un lado de la placa plana está dada por

$$F = \int_{A_p} \tau_w \, dA$$

Como $dA = b\,dx$ y $0 \le x \le L$, entonces

$$F = \int_0^L \tau_w b\,dx = \int_0^L \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} b\,dx = \rho U^2 b\int_0^{\theta_L} d\theta = \rho U^2 b\theta_L$$

$$\theta_L = \int_0^{\delta_L} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta_L\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \beta\delta_L$$

De la parte *a*), $\beta = 0.137$ y $\delta_L = \dfrac{4.80L}{\sqrt{Re_L}}$, por lo que

$$F = \frac{0.658\rho U^2 bL}{\sqrt{Re_L}} \qquad F$$

Este problema ilustra la aplicación de la ecuación integral del momento a un flujo de capa límite laminar en una placa plana.

c) El esfuerzo de corte en la pared, τ_w.

d) Compare con los resultados correspondientes a flujo laminar desde el borde delantero.

SOLUCIÓN: Aplique los resultados de la ecuación integral del momento.

Ecuaciones de cálculo:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.382}{Re_x^{1/5}} \tag{9.26}$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{9.1}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.0594}{Re_x^{1/5}} \tag{9.27}$$

En $x = L$, con $\nu = 1.00 \times 10^{-6}$ m^2/s para el agua,

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{1 \text{ m}}{\text{s}} \times 1 \text{ m} \times \frac{\text{s}}{10^{-6} \text{ m}^2} = 10^6$$

De la ecuación 9.26,

$$\delta_L = \frac{0.382}{Re_L^{1/5}} L = \frac{0.382}{(10^6)^{1/5}} 1 \text{ m} = 0.0241 \text{ m} \quad \text{o} \quad \delta_L = 24.1 \text{ mm} \longleftarrow \delta_L$$

Al emplear la ecuación 9.1, con $u/U = (y/\delta)^{1/7} = \eta^{1/7}$, obtenemos

$$\delta_L^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta_L \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta_L \int_0^1 (1 - \eta^{1/7})\, d\eta = \delta_L \left[\eta - \frac{7}{8}\eta^{8/7}\right]_0^1$$

$$\delta_L^* = \frac{\delta_L}{8} = \frac{24.1 \text{ mm}}{8} = 3.01 \text{ mm} \longleftarrow \delta_L^*$$

De la ecuación 9.27,

$$C_f = \frac{0.00594}{(10^6)^{1/5}} = 0.00375$$

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \rho U^2 = 0.00375 \times \frac{1}{2} \times 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (1)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$\tau_w = 1.87 \text{ N/m}^2 \longleftarrow \tau_w\,(L)$$

Para flujo laminar, emplee los valores de la solución de Blasius. De la ecuación 9.13,

$$\delta_L = \frac{5.0}{\sqrt{Re_L}} L = \frac{5.0}{(10^6)^{1/2}} \times 1 \text{ m} = 0.005 \text{ m} \quad \text{o} \quad 5.00 \text{ mm}$$

Del ejemplo 9.2, $\delta^*/\delta = 0.344$, por lo que

$$\delta^* = 0.344\, \delta = 0.344 \times 5.0 \text{ mm} = 1.72 \text{ mm}$$

De la ecuación 9.15, $C_f = \dfrac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$, de modo que

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \rho U^2 = \frac{0.664}{\sqrt{10^6}} \times \frac{1}{2} \times 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (1)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 0.332 \text{ N/m}^2$$

Al comparar valores, obtenemos

$$\text{Espesor de la perturbación, } \frac{\delta_{\text{turbulento}}}{\delta_{\text{laminar}}} = \frac{24.1 \text{ mm}}{5.00 \text{ mm}} = 4.82$$

$$\text{Espesor del desplazamiento, } \frac{\delta^*_{\text{turbulento}}}{\delta^*_{\text{laminar}}} = \frac{3.01 \text{ mm}}{1.72 \text{ mm}} = 1.75$$

$$\text{Esfuerzo de corte de la pared, } \frac{\tau_{w,\text{ turbulento}}}{\tau_{w,\text{ laminar}}} = \frac{1.88 \text{ N/m}^2}{0.332 \text{ N/m}^2} = 5.66$$

Este problema ejemplifica el uso de la ecuación integral del momento para capas límite turbulentas. Los resultados, cuando se comparan con los de flujo laminar, indican un crecimiento mucho más rápido debido a los esfuerzos de corte más altos para la capa límite turbulenta.

9-6 GRADIENTES DE PRESIÓN EN FLUJO DE CAPA LÍMITE

Hemos restringido nuestro análisis de los flujos de capa límite a flujo sobre una placa plana para la cual el gradiente de presión es cero. La ecuación integral del momento para este caso fue dada como

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{9.18}$$

Recuerde que al deducir esta ecuación, no se hizo ninguna suposición en cuanto al régimen de flujo de la capa límite; la ecuación es válida tanto para capas límite laminares como turbulentas. La ecuación 9.18 indica que el esfuerzo de corte de la pared se equilibra por medio de una reducción en el momento del fluido. De tal modo los perfiles de velocidad cambian cuando nos movemos a lo largo de la placa. El espesor de la capa límite continúa aumentando y el fluido cercano a la pared se retarda continuamente (pierde momento). Una pregunta de interés es: "¿El fluido cercano a la pared será llevado al reposo en algún momento?" Planteando de otro modo la pregunta, "¿Para el caso de $dp/dx = 0$, es posible que $\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$?"[2]

Al considerar las distribuciones del esfuerzo de corte en la pared para placas planas, encontramos que en flujo laminar

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{\text{constante}}{\sqrt{Re_x}}$$

y para flujo turbulento

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{\text{constante}}{Re_x^{1/5}}$$

Recordando que $\tau_w = \mu\, \partial u/\partial y)_{y=0}$, podemos ver entonces que para cualquier placa de longitud finita, $\partial u/\partial y)_{y=0}$ nunca será cero. El punto sobre una frontera sólida en la cual $\partial u/\partial y = 0$ se define

[2] Observe que si $\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$, entonces la capa de fluido cerca de la pared tendrá velocidad cero, puesto que

$$u_{0+dy} = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg)_{y=0} dy$$

y $u_0 = 0$ a partir de la condición de no deslizamiento.

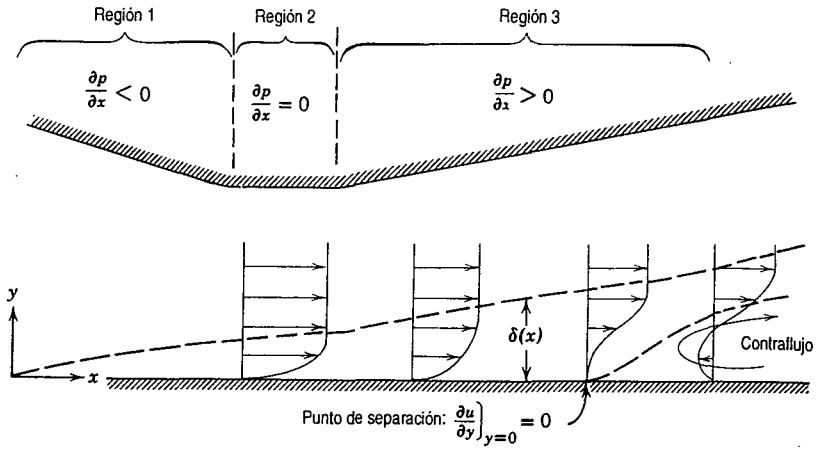


Fig. 9.6 Flujo de capa límite con gradiente de presión (el espesor de la capa límite se ha exagerado para mayor claridad).

como el punto de *separación*. En consecuencia, concluimos que para $dp/dx = 0$, el flujo no se separará; la capa de fluido en la vecindad de una superficie sólida no puede llevarse a velocidad cero.

Se dice que el gradiente de presión será adverso si la presión aumenta en la dirección del flujo (si $\partial p/\partial x > 0$). Cuando $\partial p/\partial x < 0$ (el caso en el que la presión disminuye en la dirección del flujo), se dice que el gradiente de presión será favorable.

Considere el flujo a través del canal de sección transversal variable mostrado en la figura 9.6. Para simplificar el análisis, considere el flujo a lo largo de la pared recta.

Si consideramos las fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido cercana a la frontera sólida, vemos que hay una fuerza de corte retardadora neta sobre la partícula sin que importe cuál es el signo del gradiente de presión. Para $\partial p/\partial x = 0$, el resultado es una disminución del momento, pero como ya hemos mostrado, no es suficiente para llevar a la partícula al reposo. Puesto que $\partial p/\partial x < 0$ en la región 1, la presión detrás de la partícula (la que se suma a su movimiento) es mayor que la que se opone al movimiento; la partícula está "descendiendo por una colina de presión", sin riesgo de frenarla hasta velocidad cero. Sin embargo, al intentar fluir por la región 3, la partícula encuentra un gradiente de presión adverso, $\partial p/\partial x > 0$, y la partícula debe "ascender por una colina de presión". La partícula de fluido debe llevarse al reposo, provocando por ello que el fluido vecino se desvíe alejándose de la frontera; cuando esto ocurre, se afirma que el flujo se separa de la superficie. Justo aguas abajo del punto de separación, la dirección de flujo en la región separada es opuesta a la dirección principal del flujo. El fluido de baja energía en la región separada es forzado de regreso aguas arriba por el aumento de presión aguas abajo.

En esta forma vemos que un gradiente de presión adverso, $\partial p/\partial x > 0$, es una condición necesaria para la separación. ¿Esto significa que si $\partial p/\partial x > 0$, habrá separación? No es así. No hemos demostrado que $\partial p/\partial x > 0$ conducirá siempre a la separación, sino que más bien hemos razonado que la separación no puede ocurrir a menos que $\partial p/\partial x > 0$. Esta conclusión puede demostrarse rigurosamente empleando las ecuaciones diferenciales completas de movimiento para flujo de capa límite ([3], p. 132).

Los perfiles de velocidad adimensionales para flujo de capa límite laminar y turbulenta sobre una placa plana se muestran en la figura 9.7*a*. El perfil turbulento es mucho más ancho (más obtuso) que el perfil laminar. A la misma velocidad de corriente libre, el flujo de momento dentro de la

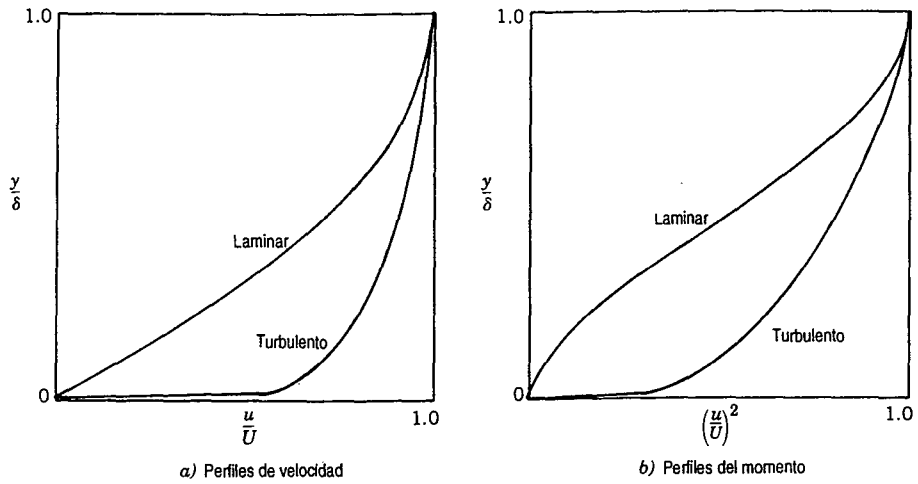


Fig. 9.7 Perfiles adimensionales para el flujo de capa límite de placa plana.

capa límite turbulenta es mayor que dentro de la capa laminar (figura 9.7*b*). La separación ocurre cuando el momento de las capas de fluido cercanas a la superficie se reduce a cero mediante la acción combinada de fuerzas de presión y viscosas. Como se muestra en la figura 9.7*b*, el momento del fluido cerca de la superficie es significativamente más grande para el perfil turbulento. En consecuencia, la capa turbulenta tiene mayor capacidad para resistir la separación en un gradiente de presión adverso. Analizaremos algunas consecuencias de este comportamiento en la sección 9-7.3.

Los gradientes de presión adversos pueden ocasionar cambios importantes en los perfiles de velocidad tanto para flujos de capa límite laminar como turbulenta. Las soluciones aproximadas para flujo de gradiente de presión diferente de cero pueden obtenerse a partir de la ecuación integral del momento

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}(U^2\theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} \tag{9.17}$$

Expandiendo el primer término, podemos escribir

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U^2 \frac{d\theta}{dx} + (\delta^* + 2\theta) U \frac{dU}{dx}$$

o

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H+2)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx} \tag{9.28}$$

donde $H = \delta^*/\theta$ es un "factor de forma" del perfil de velocidad. El factor de forma aumenta en un gradiente de presión adverso. Para flujo de capa límite turbulento, H aumenta desde 1.3 para un gradiente de presión cero hasta aproximadamente 2.5 en la separación. En flujo laminar con gradiente de presión cero, $H = 2.6$; en la separación $H = 3.5$.

La distribución de velocidad de corriente libre, $U(x)$, debe conocerse antes de que la ecuación 9.28 pueda aplicarse. Puesto que $dp/dx = -rU\,dU/dx$, la especificación de $U(x)$ es equivalente a

la del gradiente de presión. Podemos obtener una primera aproximación para $U(x)$ a partir de la teoría de flujo ideal para un flujo no viscoso bajo las mismas condiciones. Como se señaló en el capítulo 6, para flujo irrotacional sin fricción (flujo potencial), la función de corriente, ψ, y el potencial de velocidad, ϕ, satisfacen la ecuación de Laplace. Éstas pueden emplearse para determinar $U(x)$ sobre la superficie del cuerpo.

Muchos esfuerzos se han dedicado al cálculo de las distribuciones de velocidad sobre cuerpos de forma conocida (el problema "directo") y a la determinación de formas de cuerpo para producir una distribución de presión deseada (el problema "inverso"). Smith y colaboradores [6] han desarrollado métodos de cálculo que emplean singularidades distribuidas sobre la superficie del cuerpo para resolver el problema directo para formas de cuerpo bidimensionales o axisimétricas. Un tipo de método de elemento finito que emplea singularidades definidas sobre secciones de superficie discreta (el método de las "secciones" [7]) ha ganado en los últimos tiempos una gran popularidad en la aplicación a flujos tridimensionales.

Una vez que se conoce la distribución de velocidad, $U(x)$, la ecuación 9.28 puede integrarse para determinar $\theta(x)$ si H y C_f pueden correlacionarse con θ. El estudio detallado de los diversos métodos de cálculo para flujos de gradiente de presión diferentes de cero se encuentra más allá del alcance de este libro. En [8] se presentan varias soluciones para flujos laminares. En [9] se repasan métodos de cálculo para flujo de capa límite turbulento basados en la ecuación integral del momento.

En virtud de la importancia de las capas límite turbulentas en situaciones de flujo de ingeniería, el estado de avance de los esquemas de cálculo está progresando rápidamente. Se han propuesto numerosos esquemas [10, 11]; la mayor parte de tales esquemas para flujo turbulento emplea modelos para predecir el esfuerzo de corte turbulento y resolver después numéricamente las ecuaciones de la capa límite [12, 13]. Las continuas mejoras en la capacidad y velocidad de las computadoras digitales está empezando a hacer posible la solución de las ecuaciones completas de Navier-Stokes empleando métodos numéricos.

PARTE B FLUJO DE FLUIDO ALREDEDOR DE CUERPOS SUMERGIDOS

Siempre que hay movimiento relativo entre un cuerpo sólido y el fluido en el que está sumergido, el cuerpo experimenta una fuerza neta, $\vec{F}$, debida a la acción del fluido. En general, la fuerza infinitesimal, $d\vec{F}$, que actúa sobre un elemento del área de la superficie, no será ni normal ni paralela al elemento. Esto puede verse claramente cuando se considera la naturaleza de las fuerzas superficiales que contribuyen a la fuerza neta, $\vec{F}$. Si el cuerpo se está moviendo a través de un fluido viscoso, entonces actúan sobre el mismo tanto fuerzas de corte como de presión,

$$\vec{F} = \int_{\text{superficie del cuerpo}} d\vec{F} = \int_{\text{superficie del cuerpo}} d\vec{F}_{\text{corte}} + \int_{\text{superficie del cuerpo}} d\vec{F}_{\text{presión}}$$

La fuerza resultante, $\vec{F}$, puede descomponerse en las componentes paralela y perpendicular a la dirección del movimiento. La componente de la fuerza paralela a la dirección de movimiento es la fuerza de arrastre, F_A, y la componente de fuerza perpendicular a la dirección del movimiento es la fuerza de sustentación, F_S.

Reconociendo que

$$d\vec{F}_{\text{corte}} = \vec{\tau}_w \, dA$$

y

$$d\vec{F}_{\text{presión}} = -p\, d\vec{A}$$

podríamos inclinarnos a pensar que el arrastre y la sustentación podrían evaluarse analíticamente. Se confirma que no ocurre lo anterior; hay pocos casos en los que el arrastre y la sustentación pueden determinarse sin recurrir a resultados experimentales. Como hemos visto, la presencia de un gradiente de presión adverso conduce a menudo a la separación; la separación del flujo prohíbe la determinación analítica de la fuerza que actúa sobre un cuerpo. Por tanto, para la mayor parte de las formas de interés, debemos apelar al empleo de coeficientes medidos experimentalmente para calcular la sustentación y el arrastre.

9-7 ARRASTRE

El arrastre es la componente de fuerza sobre un cuerpo que actúa paralela a la dirección de movimiento. Al estudiar la necesidad de resultados experimentales en mecánica de fluidos (capítulo 7), consideramos el problema de la determinación de la fuerza de arrastre, F_A, sobre una esfera lisa de diámetro d, moviéndose en un fluido incompresible viscoso con velocidad V; la densidad y la viscosidad del fluido fueron ρ y μ, respectivamente. La fuerza de arrastre, F_A, se escribió en forma funcional

$$F_A = f_1(d, V, \mu, \rho)$$

La aplicación del teorema Pi de Buckingham originó dos parámetros π adimensionales que se escribieron en forma funcional como

$$\frac{F_A}{\rho V^2 d^2} = f_2\left(\frac{\rho V d}{\mu}\right)$$

Advierta que d^2 es proporcional al área de la sección transversal ($A = \pi d^2/4$) y, en consecuencia, podríamos escribir

$$\frac{F_A}{\rho V^2 A} = f_3\left(\frac{\rho V d}{\mu}\right) = f_3(Re) \tag{9.29}$$

Si bien la ecuación 9.29 se obtuvo para una esfera, la forma de la ecuación es válida para flujo incompresible sobre cualquier cuerpo; la longitud característica empleada en el número de Reynolds depende de la forma del cuerpo.

El *coeficiente de arrastre*, C_A, se define como

$$C_A \equiv \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{9.30}$$

El número $\frac{1}{2}$ se ha insertado (como se hizo en la ecuación de definición para el factor de fricción) para formar la presión dinámica familiar. Entonces la ecuación 9.29 puede escribirse como

$$C_A = f(Re) \tag{9.31}$$

No hemos considerado efectos de compresibilidad o de superficie libre en este análisis de la fuerza de arrastre. Al haberlos incluido, habríamos obtenido la forma funcional

$$C_A = f(Re, Fr, M)$$

En este punto consideraremos la fuerza de arrastre sobre varios cuerpos para los cuales es válida la ecuación 9.31. La fuerza de arrastre total es la suma del arrastre de fricción y del arrastre de la presión. Sin embargo, el coeficiente de arrastre es una función sólo del número de Reynolds.

9-7.1 Flujo sobre una placa plana paralela al flujo: arrastre de fricción

Esta situación de flujo se ha considerado en detalle en la sección 9-5. Como el gradiente de presión es cero, el arrastre total es igual al arrastre de fricción. De tal modo,

$$F_A = \int_{\text{superficie de la placa}} \tau_w \, dA$$

y

$$C_A = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \frac{\int_{PS} \tau_w \, dA}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{9.32}$$

donde A es el área total de la superficie en contacto con el fluido (esto es, el *área mojada*). El coeficiente de arrastre para una placa plana paralela al flujo depende de la distribución del esfuerzo de corte a lo largo de la placa.

Para flujo laminar sobre una placa plana, el coeficiente del esfuerzo de corte fue dado por

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \tag{9.15}$$

El coeficiente de arrastre para flujo con velocidad de corriente libre V, sobre una placa plana de longitud L y ancho b, se obtiene sustituyendo τ_w de la ecuación 9.15 en la ecuación 9.32. De tal modo,

$$C_A = \frac{1}{A}\int_A 0.664\, Re_x^{-0.5}\, dA = \frac{1}{bL}\int_0^L 0.664\left(\frac{V}{\nu}\right)^{-0.5} x^{-0.5} b\, dx$$

$$= \frac{0.664}{L}\left(\frac{\nu}{V}\right)^{0.5}\left[\frac{x^{0.5}}{0.5}\right]_0^L = 1.328\left(\frac{\nu}{VL}\right)^{0.5}$$

$$C_A = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} \tag{9.33}$$

Suponiendo que la capa límite es turbulenta desde el borde delantero, el coeficiente del esfuerzo de corte, basado en el análisis aproximado de la sección 9-5.2, está dado por

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.0594}{Re_x^{1/5}} \tag{9.27}$$

Al sustituir τ_w de la ecuación 9.27 en la 9.32, obtenemos

$$C_A = \frac{1}{A}\int_A 0.0594\ Re_x^{-0.2}\, dA = \frac{1}{bL}\int_0^L 0.0594\left(\frac{V}{\nu}\right)^{-0.2} x^{-0.2} b\, dx$$

$$= \frac{0.0594}{L}\left(\frac{\nu}{V}\right)^{0.2}\left[\frac{x^{0.8}}{0.8}\right]_0^L = 0.074\left(\frac{\nu}{VL}\right)^{0.2}$$

$$C_A = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} \tag{9.34}$$

La ecuación 9.34 es válida para $5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$.

Para $Re_L < 10^9$ la ecuación empírica dada por Schlichting [3]

$$C_A = \frac{0.455}{(\log Re_L)^{2.58}} \tag{9.35}$$

ajusta muy bien los datos experimentales.

En el caso de una capa límite que es inicialmente laminar y experimenta transición en alguna posición sobre la placa, el coeficiente de arrastre turbulento debe ajustarse para dar cuenta del flujo laminar sobre la longitud inicial. El ajuste se realiza restando la cantidad B/Re_L de C_A determinado para flujo completamente turbulento. El valor de B depende del número de Reynolds en la transición; B está dado por

$$B = Re_{tr}\,(C_{A_{turbulento}} - C_{A_{laminar}}) \tag{9.36}$$

Para un número de Reynolds de transición de 5×10^5, el coeficiente de arrastre puede calcularse haciendo el ajuste a la ecuación 9.34, en cuyo caso

$$C_A = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1740}{Re_L} \qquad (5\times 10^5 < Re_L < 10^7) \tag{9.37a}$$

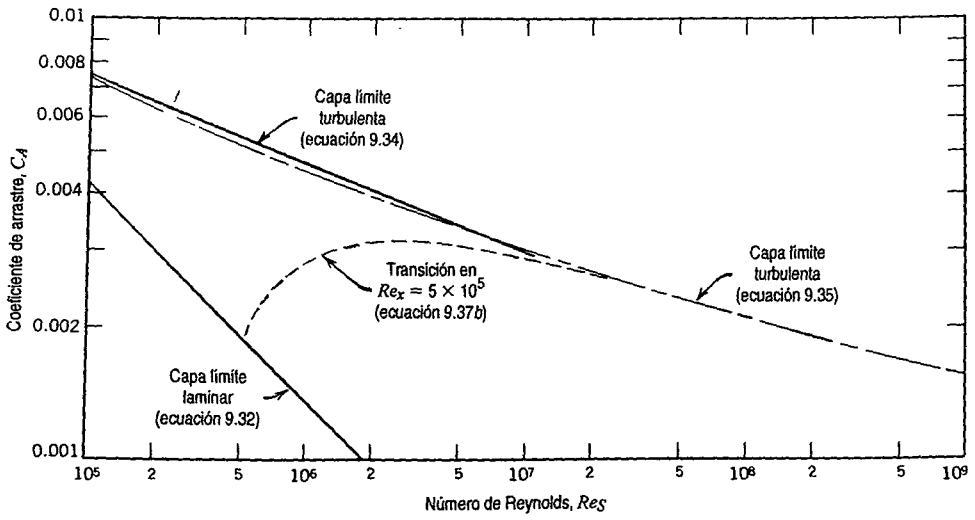


Fig. 9.8 Variación del coeficiente de arrastre con el número de Reynolds para una placa plana lisa paralela al flujo.

o a la ecuación 9.35, en cuyo caso

$$C_A = \frac{0.455}{(\log Re_L)^{2.58}} - \frac{1610}{Re_L} \qquad (5\times 10^5 < Re_L < 10^9) \qquad (9.37b)$$

La variación en el coeficiente de arrastre para una placa paralela al flujo se muestra en la figura 9.8.

En la gráfica de la figura 9.8 puede asumirse que la transición ocurre en $Re_x = 5 \times 10^5$ para flujos en los cuales la capa límite era inicialmente laminar. El número de Reynolds en el cual ocurre la transición depende de una combinación de factores, tales como la rugosidad de la superficie y las perturbaciones de la corriente libre. La transición tiende a ocurrir más temprano (a un número de Reynolds inferior) cuando aumenta la rugosidad de la superficie o la turbulencia de la corriente libre. Para la transición en otro Re, la constante en el segundo término de la ecuación 9.37 se modifica empleando la ecuación 9.36. La figura 9.8 muestra que el coeficiente de arrastre es menor, para una longitud de placa determinada, cuando el flujo laminar se mantiene a lo largo de la mayor distancia posible. Sin embargo, a Re_L grandes ($> 10^7$) la contribución del arrastre laminar es despreciable.

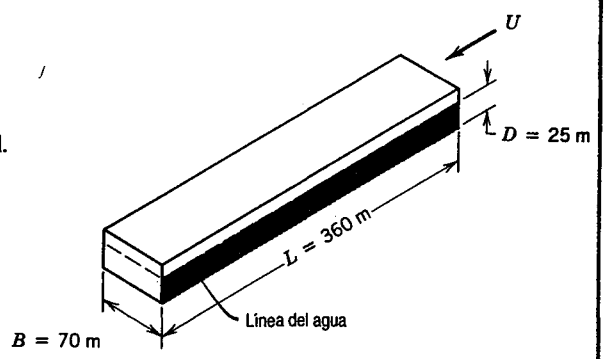
EJEMPLO 9.5 Arrastre de fricción superficial sobre un barco tanque

Un barco tanque de 360 m de largo tiene un ancho máximo de 70 m y un arrastre de 25 m. Estime la fuerza y la potencia requeridas para superar el arrastre de fricción superficial a una velocidad crucero de 13 nudos en agua de mar a 10 C.

PROBLEMA EJEMPLO 9.5

DATOS: Un buque tanque que navega a $U = 13$ nudos.

ENCUENTRE: *a)* La fuerza y
b) La potencia requerida para superar el arrastre de fricción superficial.



SOLUCIÓN:

Modele el casco del buque como una placa plana, de longitud L y ancho $b = B + 2D$, en contacto con agua. Estime el arrastre de fricción superficial a partir del coeficiente de arrastre.

Ecuaciones de cálculo:

$$C_A = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \qquad (9.32)$$

$$C_A = \frac{0.455}{(\log Re_L)^{2.58}} - \frac{1610}{Re_L} \tag{9.37b}$$

La velocidad de la embarcación es 13 nudos (millas náuticas por hora), por lo que

$$U = \frac{13 \text{ nm}}{\text{hr}} \times \frac{6076 \text{ pie}}{\text{nm}} \times \frac{0.3048 \text{ m}}{\text{pie}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \text{ s}} = 6.69 \text{ m/s}$$

Del apéndice A, a 10 C, $\nu \approx 1.4 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ para agua de mar. Entonces

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{6.69 \text{ m}}{\text{s}} \times 360 \text{ m} \times \frac{\text{s}}{1.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1.72 \times 10^9$$

Suponiendo que la ecuación 9.37*b* es válida,

$$C_A = \frac{0.455}{(\log 1.72 \times 10^9)^{2.58}} - \frac{1610}{1.72 \times 10^9} = 0.00147$$

y de la ecuación 9.32,

$$F_A = C_A A \frac{1}{2} \rho U^2$$

$$= 0.00147 \times (360 \text{ m})(70 + 50) \text{ m} \times \frac{1}{2} \times 1020 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (6.69)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$F_A = 1.45 \text{ MN} \longleftarrow F_A$$

La potencia correspondiente es

$$\mathcal{P} = F_A U = 1.45 \times 10^6 \text{ N} \times 6.69 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{N} \cdot \text{m}}$$

$$\mathcal{P} = 9.70 \text{ MW} \longleftarrow \mathcal{P}$$

Este requerimiento de potencia (~ 13 000 hp) es considerable. Aunque el coeficiente de arrastre es muy bajo, el área de la superficie mojada es grande (~ 10.7 acres). En virtud de que el número de Reynolds es grande, es despreciable el efecto del flujo laminar; la transición ocurre en $x \approx 0.1$ m.

9-7.2 Flujo sobre una placa plana normal al flujo: arrastre de presión

En el flujo sobre una placa plana normal al flujo (figura 9.9), el esfuerzo de corte de la pared no contribuye a la fuerza de arrastre. El arrastre está determinado por

$$F_A = \int_{\text{superficie}} p \, dA$$

Para esta geometría, el flujo se separa a partir de los bordes de la placa; hay flujo de regreso en la estela de baja energía de la placa. A pesar de que la presión sobre la superficie posterior de la placa es esencialmente constante, su magnitud no puede determinarse analíticamente. En consecuencia, debemos recurrir a experimentos para determinar la fuerza de arrastre.

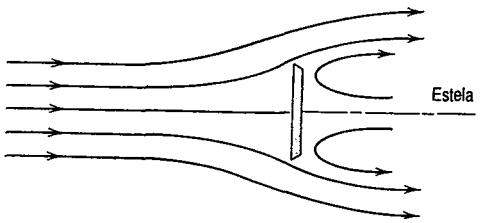
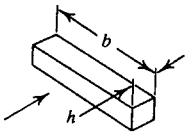
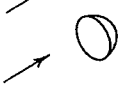
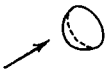
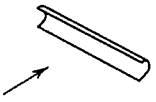
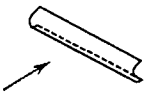


Fig. 9.9 Flujo sobre una placa plana normal al flujo.

El *coeficiente de arrastre* para el flujo sobre un objeto sumergido suele basarse en el *área frontal* (o *área proyectada*) del objeto. (Para perfiles aerodinámicos y alas se emplea el área del ala de avión, véase la sección 9-8.)

El coeficiente de arrastre para una placa finita normal al flujo depende de la razón entre el ancho y la altura de la placa y del número de Reynolds. Para valores de Re (basados en la altura) aproximadamente mayores que 1000, el coeficiente de arrastre es en esencia independiente del número de Reynolds. La variación de C_A con la razón entre el ancho y la altura de la placa (b/h)

Tabla 9.3 Datos del coeficiente de arrastre para objetos seleccionados ($Re \gtrsim 10^3$)[a]

Objeto	Diagrama		C_A ($Re \gtrsim 10^3$)
Cilindro cuadrado		$b/h = \infty$ $b/h = 1$	2.05 1.05
Disco			1.17
Anillo			1.20[b]
Hemisferio (extremo abierto frente al flujo)			1.42
Hemisferio (extremo abierto del lado aguas abajo)			0.38
Sección C (lado abierto frente al flujo)			2.30
Sección C (lado abierto del lado aguas abajo)			1.20

[a] Datos de [14].
[b] Basado en el área del anillo.

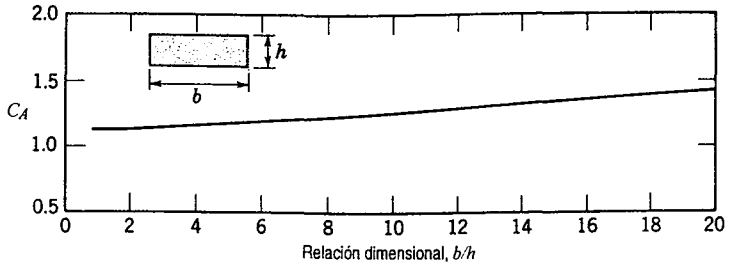


Fig. 9.10 Variación del coeficiente de arrastre con la relación dimensional para una placa plana de ancho finito normal al flujo con $Re_h > 1000$ [14].

se muestra en la figura 9.10. (La razón b/h se define como la *proporción dimensional* de la placa.) Para $b/h = 1.0$, el coeficiente de arrastre es un mínimo en $C_A = 1.18$; éste es ligeramente mayor que el correspondiente a un disco circular ($C_A = 1.17$) a números de Reynolds grandes.

El coeficiente de arrastre para todos los objetos con bordes afilados es en esencia independiente del número de Reynolds (para $Re \gtrsim 1000$) debido a que los puntos de separación están fijados por la geometría del objeto. Los coeficientes de arrastre para unos cuantos objetos seleccionados se presentan en la tabla 9.3.

9-7.3 Flujo sobre una esfera y un cilindro: arrastre de fricción y de presión

Hemos visto dos casos especiales de flujo en los cuales el arrastre de fricción o el de presión eran la única forma de arrastre presente. En el primer caso, el coeficiente de arrastre era una función que dependía en gran medida del número de Reynolds, mientras que en el último caso, C_A resultaba esencialmente independiente del número de Reynolds para $Re \lesssim 1000$.

En el caso del flujo sobre una esfera, tanto el arrastre de fricción como el de presión contribuyen al arrastre total. El coeficiente de arrastre para el flujo sobre una esfera lisa se muestra en la figura 9.11 como una función del número de Reynolds.[3]

A números de Reynolds muy bajos,[4] $Re \leq 1$, no hay separación de flujo a partir de una esfera; la estela es laminar y el arrastre es predominantemente de fricción. Stokes mostró analíticamente, para flujos de número de Reynolds muy pequeño donde las fuerzas de inercia pueden ignorarse, que la fuerza de arrastre sobre una esfera de diámetro d, que se mueve a velocidad V, a través de un fluido de viscosidad μ, está dada por

$$F_A = 3\pi\mu V d$$

El coeficiente de arrastre, C_A, definido por la ecuación 9.30, es entonces

$$C_A = \frac{24}{Re}$$

[3] Un ajuste de curva aproximado con respecto a los datos de la figura 9.11 se presenta en el problema 9.88.

[4] Véase la película de la NCFMF, *The Fluid Dynamics of Drag*, A. H. Shapiro, director, o [15] para un buen análisis del arrastre sobre esferas y otras formas. Otra excelente película (NCFMF) es *Low Reynolds Number Flows*, Sir G. I. Taylor, director. Véase también [16].

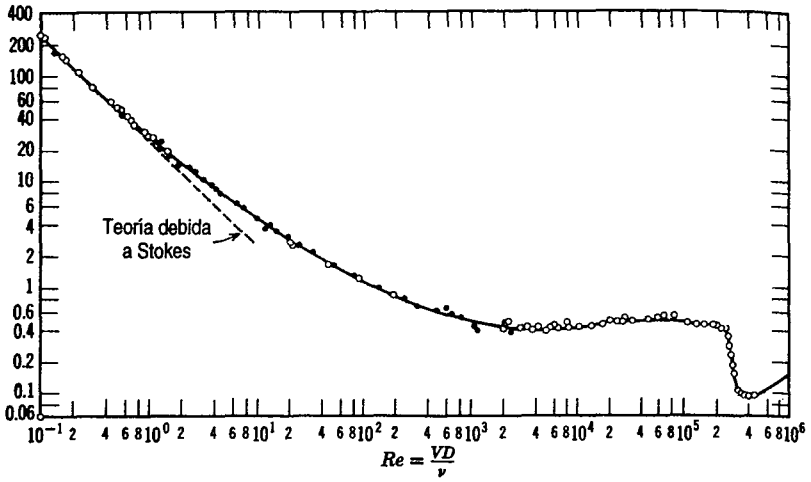


Fig. 9.11 Coeficiente de arrastre de una esfera lisa como una función del número de Reynolds [3].

Como se muestra en la figura 9.11, esta expresión concuerda con los valores experimentales a números de Reynolds bajos pero se empieza a desviar significativamente de los datos experimentales para $Re > 1.0$.

Cuando el número de Reynolds aumenta hasta aproximadamente 1000, el coeficiente de arrastre disminuye de manera continua. Como resultado de la separación de flujo, el arrastre es una combinación del arrastre de fricción y de presión. La contribución relativa del arrastre de fricción disminuye con el aumento del número de Reynolds; a $Re \simeq 1000$, el arrastre de fricción es aproximadamente 5 por ciento del arrastre total.

En el rango de $10^3 < Re < 3 \times 10^5$, la curva del coeficiente de arrastre es relativamente plana. El coeficiente de arrastre se somete a una caída bastante aguda a un número de Reynolds *crítico* cercano a 3×10^5. Los experimentos indican que para $Re < 3 \times 10^5$, la capa límite de la porción delantera de la esfera es laminar. La separación de la capa límite ocurre justo aguas arriba de la sección media de la esfera; una estela turbulenta relativamente ancha se presenta aguas abajo de la esfera. En la región separada detrás de la misma, la presión es en esencia constante y más baja que la presión sobre la parte delantera de la esfera (figura 9.12). Esta diferencia de presión es la principal contribuyente al arrastre.

En el caso de números de Reynolds mayores que aproximadamente 3×10^5, ocurre la transición y la capa límite en la parte delantera de la esfera se vuelve turbulenta. El punto de separación se mueve luego aguas abajo de la sección media de la esfera, y disminuye el tamaño de la estela. La fuerza neta de presión sobre la esfera se reduce (figura 9.12), y el coeficiente de arrastre disminuye en forma abrupta.

Una capa límite turbulenta, puesto que tiene mayor momento que una capa límite laminar, puede resistir mejor un gradiente de presión adverso, como se analizó en la sección 9-6. En consecuencia, el flujo de la capa límite turbulenta es deseable sobre un cuerpo simulado debido a que retarda la separación y por ello reduce el arrastre de presión.

La transición en la capa límite es afectada por la rugosidad de la superficie de la esfera y la turbulencia en la corriente del flujo. Por consiguiente, la reducción en el arrastre asociada con una capa límite turbulenta no ocurre en un valor único del número de Reynolds. Los experimentos con esferas lisas en un flujo con bajo nivel de turbulencia muestran que la transición puede retardarse

le Reynolds [3].

xperimentales a
itos experimen-

coeficiente de
o, el arrastre es
del arrastre de
stre de fricción

vamente plana.
eynolds *crítico*
e de la porción
las arriba de la
iguas abajo de
nte y más baja
e presión es la

10^5, ocurre la
l. El punto de
uye el tamaño
coeficiente de

mite laminar,
ción 9-6. En
lado debido a

la esfera y la
ciada con una
rimentos con
de retardarse

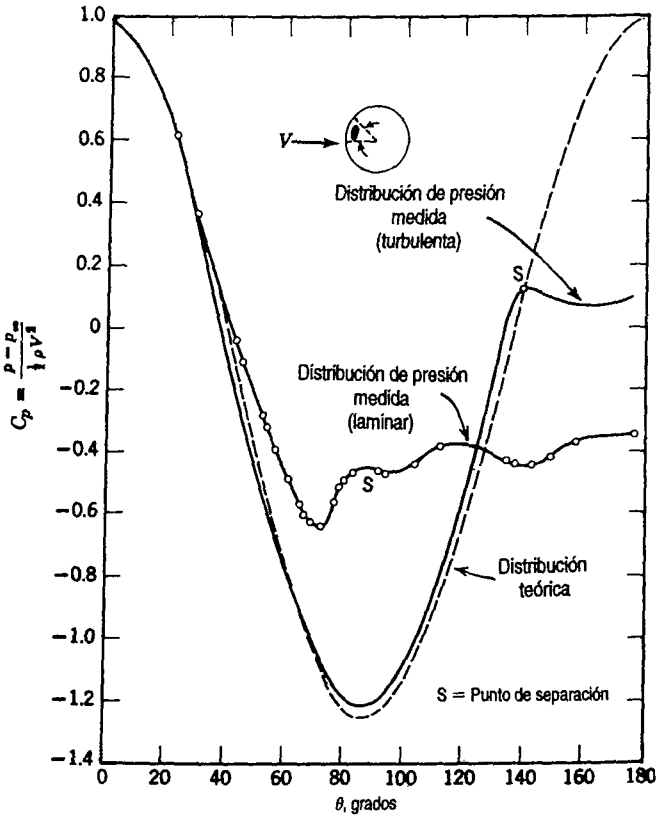


Fig. 9.12 Distribución de presión alrededor de una esfera lisa para flujo de capa límite laminar y turbulenta, comparada con flujo no viscoso [16].

hasta un número de Reynolds crítico, Re_A, de aproximadamente 4×10^5. Para superficies rugosas y/o flujo de corriente libre altamente turbulento, la transición puede ocurrir a un número de Reynolds crítico tan bajo como 50,000.

El coeficiente de arrastre de una esfera con flujo de capa límite turbulenta es casi 5 veces menor que la del flujo laminar cerca del número de Reynolds crítico. La reducción correspondiente en la fuerza de arrastre puede afectar de manera apreciable el rango de una esfera (por ejemplo, una bola de golf). Los "hoyuelos" en la superficie de una bola de golf se diseñan para "disparar" la capa límite y, en consecuencia, garantizar el flujo de la capa límite turbulenta y arrastre mínimo. Para ilustrar este efecto de manera más gráfica, obtuvimos muestras de bolas de golf sin hoyuelos hace algunos años. Uno de nuestros estudiantes se ofreció voluntariamente para dar algunos golpes con las bolas lisas. En 50 intentos con cada tipo de bola, la distancia promedio con las bolas estándar fue de 215 yardas; ¡el promedio con las bolas lisas fue de sólo 125 yardas!

Agregar elementos de rugosidad a una esfera también puede suprimir las oscilaciones locales en posiciones de la transición entre el flujo laminar y el turbulento en la capa límite. Estas oscilaciones pueden llevar a variaciones en el arrastre y a variaciones aleatorias en la sustentación (véase la sección 9-8). En el béisbol, la pichada de la "bola de nudillos" busca tener un comportamiento errático para confundir al bateador. Al lanzar la bola casi sin giro, el lanzador confía en que las costuras provoquen la transición de un modo impredecible conforme la bola se

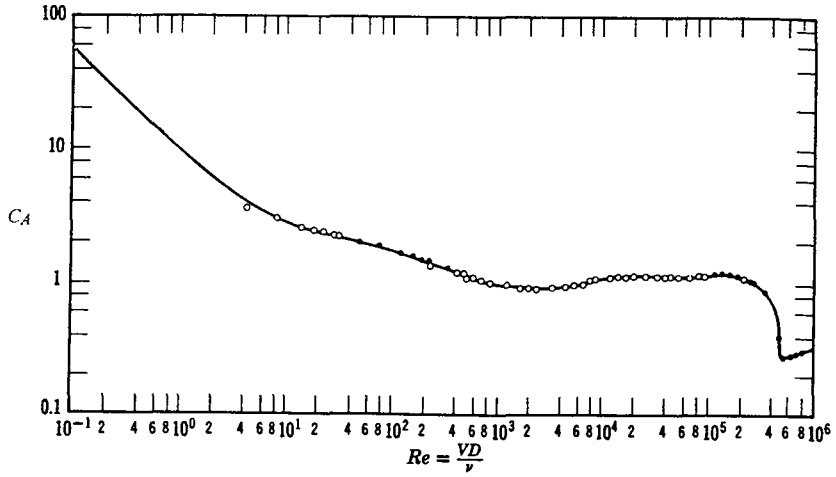


Fig. 9.13 Coeficiente de arrastre para un cilindro circular liso como una función del número de Reynolds [3].

mueve en su trayectoria hacia el bateador. Esto ocasiona la variación deseada en la trayectoria de vuelo de la bola.

La figura 9.13 muestra el coeficiente de arrastre para el flujo sobre un cilindro liso. La variación de C_A con el número de Reynolds muestra las mismas características que las observadas en el flujo sobre una esfera lisa, pero los valores de C_A son aproximadamente dos veces mayores.

El flujo en torno a un cilindro circular puede desarrollar un patrón regular de vórtices alternantes aguas abajo. La *estela del vórtice*[5] produce una fuerza de sustentación oscilatoria sobre el cilindro, perpendicular al movimiento de la corriente. La separación del vórtice excita las oscilaciones que provocan que los alambres telegráficos "zumben" y las cuerdas sobre las astas de bandera "palmeen" molestamente. En ocasiones las oscilaciones estructurales pueden alcanzar magnitudes peligrosas y provocar altos esfuerzos; pueden reducirse o eliminarse aplicando elementos de rugosidad o aletas —ya sea axiales o helicoidales— que destruyan la simetría del cilindro y estabilicen el flujo.

Los datos experimentales muestran que la separación del vórtice regular ocurre con mayor intensidad en el rango del número de Reynolds de aproximadamente 60 a 5000. Para $Re > 1000$ la frecuencia adimensional de la separación del vórtice, expresada como un número de Strouhal, $St = nD/V$, es aproximadamente igual a 0.21 [3].

La rugosidad afecta el arrastre de cilindros y esferas de manera similar; el número crítico de Reynolds se reduce por la superficie rugosa mientras que la transición de flujo laminar a turbulento en las capas límite ocurre antes. El coeficiente de arrastre se reduce en un factor de casi 4 cuando la capa límite sobre el cilindro se vuelve turbulenta.

EJEMPLO 9.6 Arrastre aerodinámico y momento en una chimenea

Una chimenea cilíndrica de 1 m de diámetro y 25 m de altura está expuesta a un viento uniforme de 50 km/hr a condiciones atmosféricas estándar. Los efectos de los extremos y las rachas de viento

[5] El patrón regular de vórtices en la estela de un cilindro algunas veces se denomina una *calle de vórtice de Karman* en honor al prominente estudioso de la mecánica de fluidos, Theodor von Karman, quien fue el primero en predecir el espaciamiento estable de la estela del vórtice sobre bases teóricas, en 1911 [17].

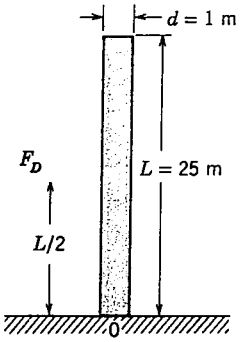
pueden despreciarse. Estime el momento de flexión en la base de la chimenea debido a las fuerzas del viento.

PROBLEMA EJEMPLO 9.6

DATOS: Una chimenea cilíndrica, $D = 1$ m, $L = 25$ m, en flujo uniforme con

$$V = 50 \text{ km/hr} \qquad p = 101 \text{ kPa} \qquad T = 15 \text{ C}$$

Desprecie los efectos de los extremos.



ENCUENTRE: El momento de flexión en la base de la chimenea.

SOLUCIÓN:

El coeficiente de arrastre está dado por $C_A = \dfrac{F_A}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$,

y en consecuencia, $F_A = C_A A \dfrac{1}{2}\rho V^2$.

Como la fuerza por unidad de longitud es uniforme a lo largo de la longitud total, la fuerza resultante, F_A, actuará en el punto medio de la chimenea. Por consiguiente, el momento en torno a la base de la chimenea es

$$M_0 = F_A \frac{L}{2} = C_A A \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{L}{2} = C_A A \frac{L}{4}\rho V^2$$

$$V = \frac{50 \text{ km}}{\text{hr}} \times \frac{10^3 \text{ m}}{\text{km}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \text{ s}} = 13.9 \text{ m/s}$$

Para aire en condiciones estándar, $\rho = 1.23$ kg/m^3, y $\mu = 1.78 \times 10^{-5}$ kg/m · s. De tal modo,

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1.23 \text{ kg}}{\text{m}^3} \times \frac{13.9 \text{ m}}{\text{s}} \times 1 \text{ m} \times \frac{\text{m} \cdot \text{s}}{1.78 \times 10^{-5} \text{ kg}} = 9.61 \times 10^5$$

De la figura 9.13, $C_A \approx 0.35$. Para un cilindro, $A = DL$, por lo que

$$M_0 = C_A A \frac{L}{4}\rho V^2 = C_A D L \frac{L}{4}\rho V^2 = C_A D \frac{L^2}{4}\rho V^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 0.35 \times 1 \text{ m} \times (25)^2 \text{ m}^2 \times \frac{1.23 \text{ kg}}{\text{m}^3} \times (13.9)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$M_0 = 13.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \longleftarrow M_0$$

Este problema ilustra la aplicación de los datos del coeficiente de arrastre para calcular el momento debido a la fuerza del viento sobre una estructura. En realidad, el perfil de velocidad para el viento sobre el suelo no es uniforme. La velocidad del viento en la capa límite atmosférica con frecuencia se modela empleando el perfil de la ley exponencial. Es posible demostrar (véase el problema 9.130) que el momento debido al perfil de la ley exponencial es $n/(n + 1)$ veces el momento para un flujo uniforme. En virtud de ello se introduce poco error al suponer flujo uniforme.

EJEMPLO 9.7 Desaceleración de un automóvil mediante un paracaídas de arrastre

Un dragster que pesa 1600 lb alcanza una velocidad de 270 mph en el cuarto de milla. Inmediatamente después de pasar las luces de control de tiempo, el conductor abre el paracaídas de arrastre, de área $A = 25$ pies^2. La resistencia del aire y de rodado pueden ignorarse. Encuentre el tiempo requerido por la máquina para desacelerar hasta 100 mph en aire estándar.

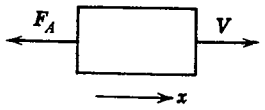
PROBLEMA EJEMPLO 9.7

DATOS: Un dragster que pesa 1600 lb, que se mueve con velocidad $V = 270$ mph y que es frenado por la fuerza de arrastre sobre un paracaídas de área $A = 25$ pies^2. Desprecie la resistencia del aire y de rodado del vehículo. Suponga aire estándar.

ENCUENTRE: El tiempo requerido para que la máquina desacelere hasta 100 mph.

SOLUCIÓN:
Considerando el vehículo como un sistema y escribiendo la segunda ley de Newton en la dirección de movimiento, se obtiene

$$-F_A = ma = m\frac{dV}{dt}$$



$V_0 = 270$ mph
$V_f = 100$ mph
$\rho = 0.00238$ slug/pie^3

Como $C_A = \dfrac{F_A}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$, entonces $F_A = \frac{1}{2} C_A \rho V^2 A$.

La sustitución en la segunda ley de Newton produce

$$-\frac{1}{2}C_A\rho V^2 A = m\frac{dV}{dt}$$

El resultado al separar variables e integrar es

$$-\frac{1}{2}C_A\rho\frac{A}{m}\int_0^t dt = \int_{V_0}^{V_f}\frac{dV}{V^2}$$

$$-\frac{1}{2}C_A\rho\frac{A}{m}t = -\frac{1}{V}\Big]_{V_0}^{V_f} = -\frac{1}{V_f} + \frac{1}{V_0} = -\frac{(V_0 - V_f)}{V_f V_0}$$

Finalmente,

$$t = \frac{(V_0 - V_f)}{V_f V_0}\frac{2m}{C_A\rho A} = \frac{(V_0 - V_f)}{V_f V_0}\frac{2W}{C_A\rho A g}$$

Modele el paracaídas como un hemisferio (con el extremo abierto encarando el flujo). De la tabla 9.3, $C_A = 1.42$ (suponiendo $Re > 10^3$). Después de esto, sustituyendo los valores numéricos,

$$t = (270 - 100)\text{ mph} \times 2 \times 1600\text{ lbf} \times \frac{1}{100\text{ mph}} \times \frac{\text{hr}}{270\text{ mi}} \times \frac{1}{1.42} \times \frac{\text{pie}^3}{0.00238\text{ slug}}$$

9-7.4 Perfil

$$\times \frac{1}{25 \text{ pies}^2} \times \frac{\text{s}^2}{32.2 \text{ pies}} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{pie}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2} \times \frac{\text{mi}}{5280 \text{ pies}} \times 3600 \frac{\text{s}}{\text{hr}}$$

$t = 5.05$ s ⟵ t

Verifique la suposición respecto a Re:

$$Re = \frac{DV}{\nu} = \left[\frac{4A}{\pi}\right]^{1/2} \frac{V}{\nu}$$

$$= \left[\frac{4}{\pi} \times 25 \text{ pies}^2\right]^{1/2} \times 100 \frac{\text{mi}}{\text{hr}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \text{ s}} \times \frac{5280 \text{ pies}}{\text{mi}} \times \frac{\text{s}}{1.56 \times 10^{-4} \text{ pies}^2}$$

$$Re = 5.30 \times 10^6$$

Por consiguiente, la suposición es válida.

Todos los datos experimentales presentados en esta sección son para objetos simples inmersos en una corriente de fluido sin fronteras. El objetivo de las pruebas en el túnel de viento es simular las condiciones de un flujo sin fronteras. Las limitaciones relativas al tamaño del equipo hacen que esta meta sea inalcanzable en la práctica. Con frecuencia, es necesario aplicar correcciones a los datos medidos para obtener resultados aplicables a condiciones de flujo sin fronteras.

En numerosas situaciones de flujo real, las interacciones ocurren con objetos o superficies cercanas. El arrastre puede reducirse de modo significativo cuando interactúan dos o más objetos, que se mueven en tándem. Este fenómeno es bien conocido por los ciclistas y aquéllos interesados en las carreras de automóviles, donde la "reducción del arrastre" es una práctica común. Es posible conseguir reducciones del arrastre de 80 por ciento con espaciamiento óptimo [18]. El arrastre también puede incrementarse considerablemente cuando el espaciamiento no es el óptimo.

El arrastre también puede ser afectado por vecinos adyacentes. Las partículas pequeñas que caen por gravedad viajan más lentamente cuando tienen vecinos que cuando están aisladas. Este fenómeno, que se ilustra en la película de la NCFMF, *Low Reynolds Number Flows*, tiene importantes aplicaciones en los procesos de mezclado y sedimentación.

Los datos experimentales para coeficientes de arrastre sobre objetos deben seleccionarse y aplicarse con cuidado. Deben atenderse directamente las diferencias entre las condiciones reales y las condiciones más controladas bajo las cuales se efectuaron las mediciones.

9-7.4 Perfil aerodinámico

La extensión de la región de flujo separado detrás de muchos de los objetos analizados en la sección anterior puede reducirse o eliminarse dándole perfil aerodinámico, o fuselado, a la forma del cuerpo. El objetivo del perfil aerodinámico es reducir el gradiente de presión adverso que ocurre detrás del punto de máximo espesor sobre el cuerpo. Esto retarda la separación de la capa límite y por ello reduce el arrastre de presión. Sin embargo, la adición de una sección de la cola fuselada aumenta el área de la superficie del cuerpo; esto provoca el incremento del arrastre de fricción superficial. La forma óptima del perfil aerodinámico es consecuentemente aquélla que produce el arrastre total mínimo. Estos efectos se analizan con amplitud en las series de películas de la NCFMF, *The Fluid Dynamics of Drag*.

El gradiente de presión alrededor de una forma de "lágrima" (un cilindro con "perfil aerodinámico") es menos severo que el que se encuentra en torno a un cilindro de sección circular.

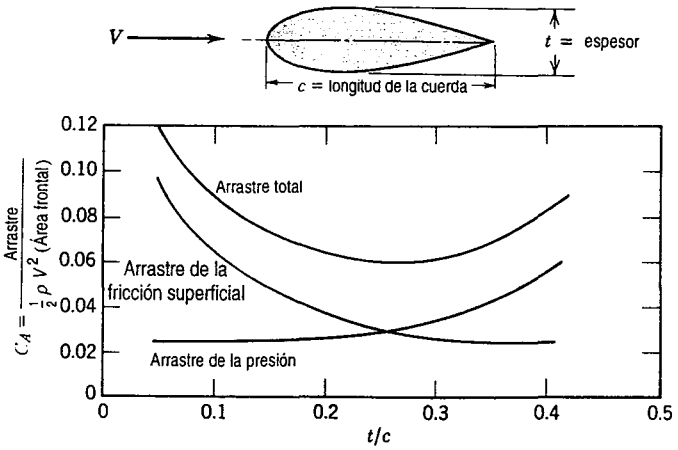


Fig. 9.14 Coeficiente de arrastre sobre un tirante con perfil aerodinámico como una función de la razón de espesores, mostrando las contribuciones de la fricción superficial y de la presión al arrastre total [18].

El intercambio entre el arrastre de fricción y el de presión para este caso se ilustra mediante los resultados presentados en la figura 9.14, para pruebas a $Re_c = 4 \times 10^5$. (Este número de Reynolds es el típico de los encontrados para un tirante en uno de los primeros aviones.) De acuerdo con la figura, el coeficiente de arrastre mínimo es $C_A \simeq 0.06$, que ocurre cuando el espesor para la relación de cuerda es $t/c \simeq 0.25$. ¡Este valor es aproximadamente 20 por ciento del coeficiente de arrastre mínimo para un cilindro circular del mismo espesor! En consecuencia, podría emplearse un tirante con perfil aerodinámico de cerca de 5 veces el espesor de un tirante cilíndrico, sin afectar el arrastre aerodinámico.

El espesor máximo (y por consiguiente la presión mínima) para las formas mostradas en la figura 9.14 se localiza aproximadamente al 25 por ciento de la distancia de la cuerda desde el borde delantero. La mayor parte del arrastre sobre estas formas se debe a la fricción superficial en las capas límite turbulentas en las secciones cónicas posteriores. El interés por los perfiles aerodinámicos de bajo arrastre se incrementó durante la década de los 30. El National Advisory Committee for Aereonautics (NACA) de los Estados Unidos desarrolló varias series de perfiles aerodinámicos de "flujo laminar" para los cuales la transición se ha retrasado hasta 60 o 65 por ciento de la longitud de cuerda a popa desde la punta del perfil.

En la figura 9.15 se presentan la distribución de presión y los datos de arrastre[6] para dos perfiles aerodinámicos simétricos de envergadura infinita y 15 por ciento de espesor a un ángulo de ataque cero. La transición sobre el perfil aerodinámico convencional (NACA 0015) toma lugar donde el gradiente de presión se vuelve adverso, en $x/c = 0.13$, cerca del punto de espesor máximo. Por ello, la mayor parte de la superficie del perfil se cubre con una capa límite turbulenta; el coeficiente de arrastre es $C_A \simeq 0.0061$. El punto de espesor máximo se ha movido a popa sobre el perfil aerodinámico (NACA 66_2-015) diseñado para flujo laminar. La capa límite se mantiene en el régimen laminar mediante el gradiente de presión favorable para $x/c = 0.63$. De tal modo, el grueso del flujo es laminar; $C_A \simeq 0.0035$ para esta sección, con base en el área del ala de avión. El

[6] Observe que los coeficientes de arrastre para perfiles aerodinámicos se basan en el área de ala de avión, esto es, $C_A = F_A/\frac{1}{2}\rho V^2 A_p$, donde A_p es la máxima área proyectada del ala.

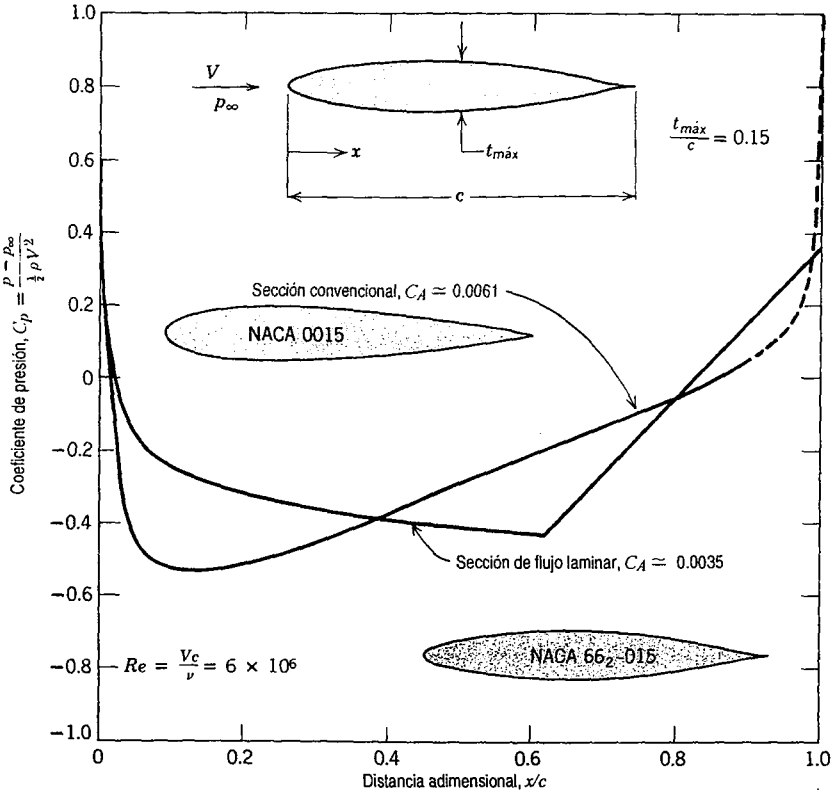


Fig. 9.15 Distribuciones de presión teóricas a ángulo de ataque cero para dos secciones simétricas de perfil aerodinámico con relación de espesores del 15 por ciento. (Datos de [19].)

coeficiente de arrastre basado en el área frontal es $C_A = C_d/0.15 = 0.0233$, o cerca del 40 por ciento del correspondiente a las formas mostradas en la figura 9.14.

Las pruebas en túneles de viento especiales han mostrado que el flujo laminar puede mantenerse hasta números de Reynolds de longitud tan altos como 30 millones por medio de formas apropiadas del perfil. En virtud de que tienen características de arrastre favorables, los perfiles aerodinámicos de flujo laminar se emplean en el diseño de las más modernas aeronaves subsónicas.

Los avances recientes han posibilitado el desarrollo de formas de bajo arrastre incluso mejores que las formas de la serie NACA 60. Los experimentos [20] han conducido al desarrollo de una distribución de presión que previene la separación en tanto se mantiene la capa límite turbulenta en una condición que produce una fricción superficial despreciable. Los métodos mejorados para calcular las formas de cuerpo que producen una distribución de presión deseada [21, 22] llevan al desarrollo de formas casi óptimas para tirantes gruesos con bajo arrastre. La figura 9.16 muestra un ejemplo de los resultados.

La reducción del arrastre aerodinámico también es importante para aplicaciones de vehículos de carretera. El interés en la economía de combustibles ha brindado un importante incentivo al equilibrio del comportamiento aerodinámico eficiente con el diseño atractivo de los automóviles. La reducción del arrastre también se ha vuelto importante para los autobuses y los camiones.

Las consideraciones prácticas limitan la longitud total de vehículos de carretera. Las colas

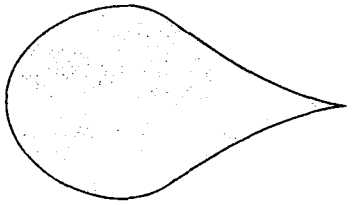


Fig. 9.16 Forma casi óptima para un tirante de arrastre bajo [22].

totalmente aerodinámicas son imprácticas al menos para los autos de registro de velocidad terrestre. En consecuencia, no es posible alcanzar resultados comparables a los de las formas óptimas de perfil aerodinámico. Sin embargo, es posible optimizar tanto los contornos frontales como traseros dentro de las restricciones dadas en la longitud total [23-25].

Se ha puesto mucha atención a los contornos frontales. En estudios de autobuses se ha demostrado que reducciones del arrastre hasta del 30 por ciento son posibles considerando cuidadosamente el contorno frontal [25]. Así, es posible reducir el coeficiente de arrastre de un autobús desde aproximadamente 0.65 hasta menos de 0.5 con diseños prácticos. Las cajas de los trailers que circulan por autopistas tienen coeficientes de arrastre más altos —se han reportado valores de C_A desde 0.90 hasta 1.1. Algunos dispositivos integrados que se encuentran disponibles comercialmente ofrecen mejoras en el arrastre de hasta 15 por ciento, en particular en condiciones de viento donde los ángulos de oscilación no son cero. El ahorro de combustible típico es la mitad del porcentaje mediante el cual se reduce el arrastre aerodinámico.

Los contornos y los detalles frontales son importantes en los automóviles. Una nariz baja y contornos redondeados son los rasgos principales que promueven un arrastre bajo. Han recibido cada vez mayor atención los radios de "una columna en forma de A" y las cabeceras guardaviento, así como la combinación de accesorios para reducir el arrastre parásito y de interferencia. Como resultado, los coeficientes de arrastre se han reducido desde cerca de 0.55 hasta 0.30 o menos en los vehículos de producción reciente. Los últimos avances en los métodos computacionales han conducido al desarrollo de formas óptimas generadas por computadora. Varios diseños se han propuesto, con exigencias de valores de C_A menores que 0.2 para vehículos completos con sistema de transmisión.

9-8 SUSTENTACIÓN

La sustentación es la componente de la fuerza aerodinámica resultante, perpendicular al movimiento del fluido. Un ejemplo común de sustentación dinámica es el flujo sobre un perfil aerodinámico.[7] El *coeficiente de sustentación*, C_S, se define como

$$C_S \equiv \frac{F_S}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_p} \tag{9.38}$$

Los coeficientes de arrastre y de sustentación para un perfil aerodinámico son funciones tanto

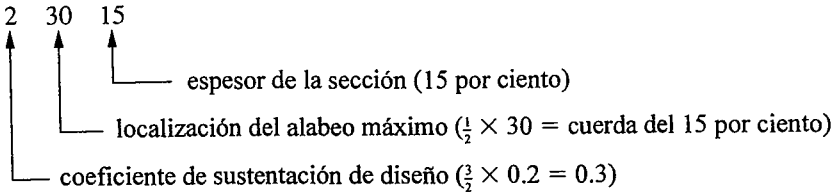
[7] El flujo sobre un perfil aerodinámico se muestra en la película de la NCFMF, *Boundary Layer Control*, D. C. Hazen, director.

del número de Reynolds como del ángulo de ataque, α; éste es el ángulo entre la cuerda del perfil aerodinámico y el vector de velocidad de la corriente libre. La *cuerda* de un perfil aerodinámico es la línea recta que une la línea del espesor medio entre el borde delantero del perfil aerodinámico y el borde posterior. Cuando el perfil aerodinámico tiene una sección simétrica, tanto la *línea media* como la línea de la cuerda son rectas, y coinciden. Se dice que un perfil aerodinámico con línea media curva tendrá *alabeo*.

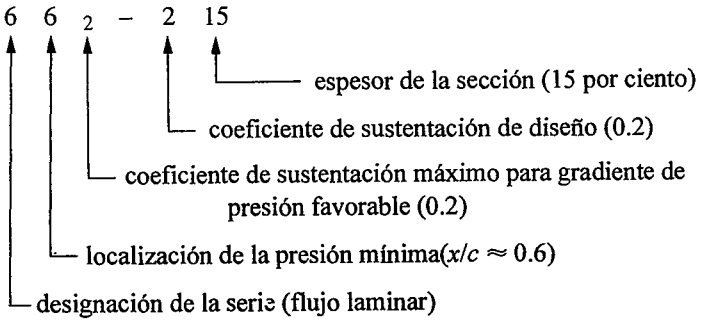
El área en ángulos rectos al flujo cambia con el ángulo de ataque. En consecuencia, el área de ala de avión, A_a (la máxima área proyectada del ala), se emplea para definir los coeficientes de sustentación y arrastre para un perfil aerodinámico.

Los datos de los coeficientes de sustentación y arrastre para perfiles de flujo convencional y laminar se grafican en la figura 9.17, para un número de Reynolds de 9×10^6, con base en la longitud de la cuerda. Las formas de las secciones en la figura 9.17 se designan de la manera siguiente:

Convencional — 23015



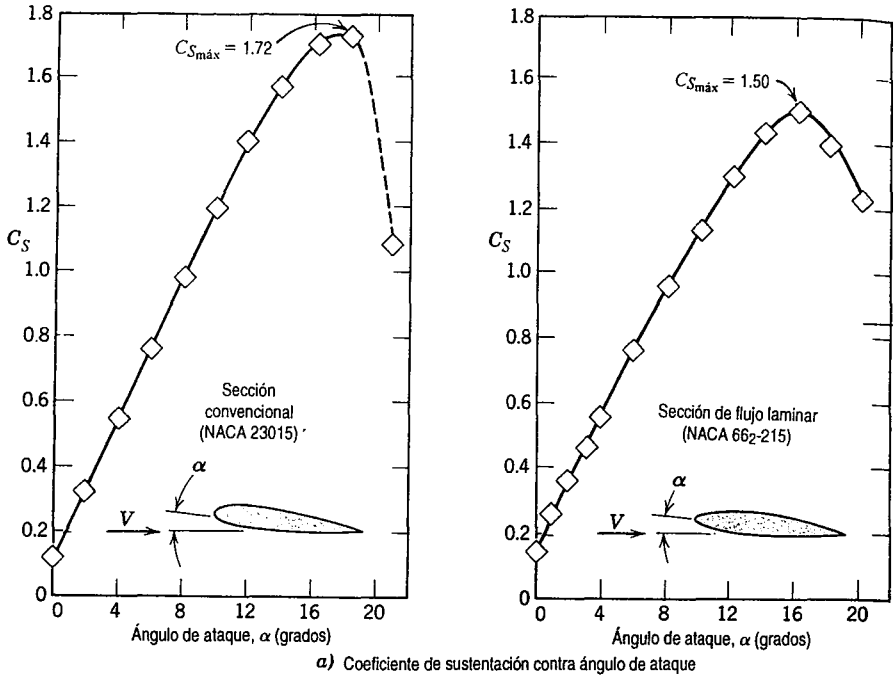
Flujo laminar — $66_2 - 215$



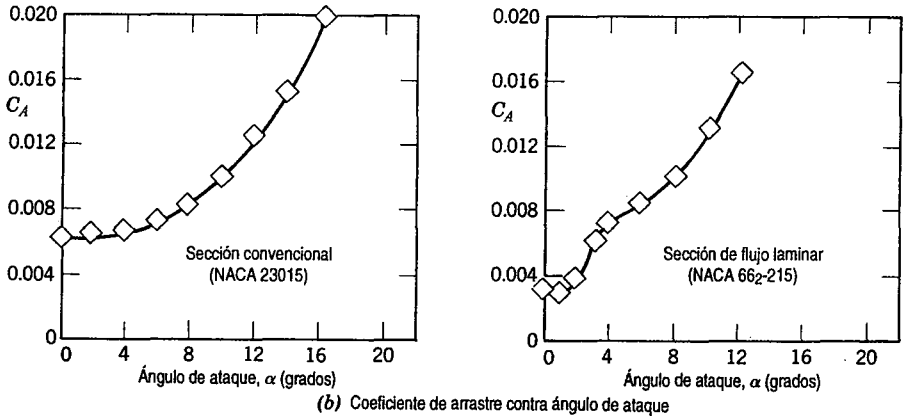
Ambas secciones se alabean para producir sustentación a un ángulo de ataque cero. Cuando se incrementa el ángulo de ataque, los coeficientes de sustentación aumentan continuamente hasta que se alcanza un máximo. Aumentos adicionales en el ángulo de ataque producen una disminución repentina en C_S. Se afirma que el perfil aerodinámico ha *perdido sustentación* cuando C_S se reduce de este modo.

La pérdida de sustentación del perfil aerodinámico se genera cuando la separación de flujo ocurre sobre una mayor porción de la superficie superior del perfil. Cuando aumenta el ángulo de ataque, el punto de estancamiento retrocede a lo largo de la superficie inferior del perfil, como se muestra esquemáticamente en la figura 9.18. El flujo sobre la superficie superior debe acelerarse rápidamente en ese caso para rodear la nariz del perfil aerodinámico.[8] La presión mínima se vuelve

[8] En la película de la NCFMF, *Boundary Layer Control*, D. C. Hazen, director, se muestran patrones de flujo y distribuciones de presión en secciones de perfiles aerodinámicos.



a) Coeficiente de sustentación contra ángulo de ataque

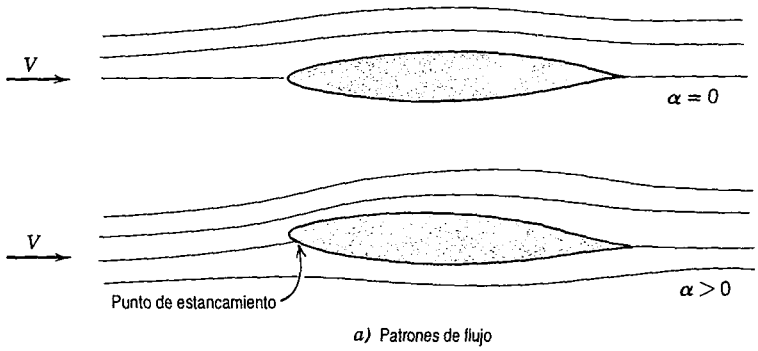


(b) Coeficiente de arrastre contra ángulo de ataque

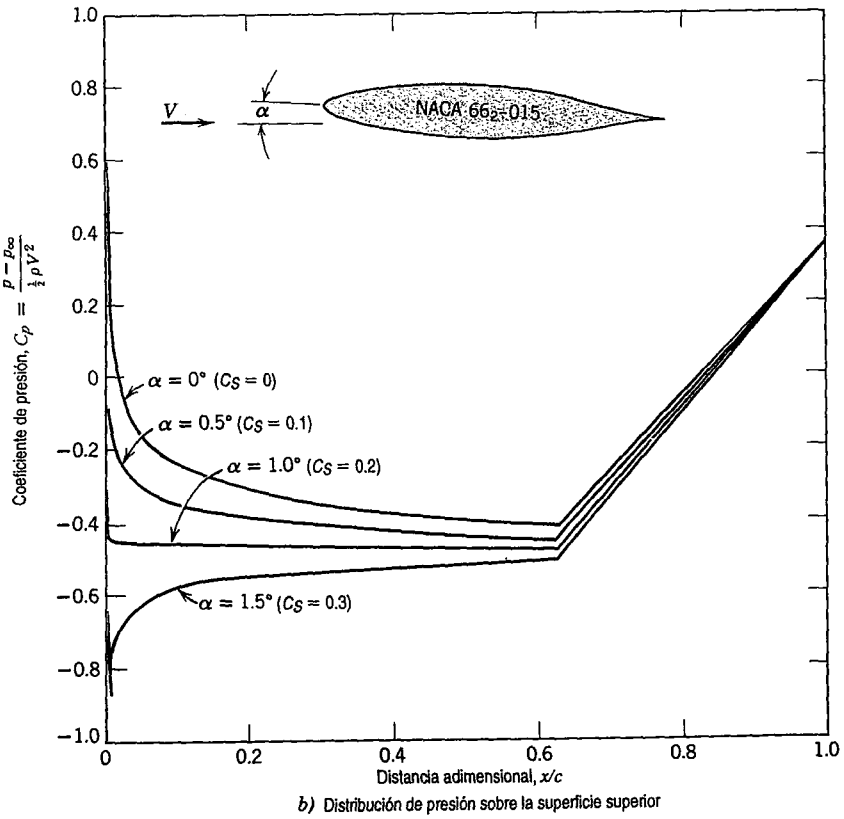
Fig. 9.17 Coeficientes de sustentación y arrastre contra el ángulo de ataque para dos secciones de perfil aerodinámico de 15 por ciento de relación de espesores. (Datos de [19].)

menor, y su ubicación se mueve hacia adelante sobre la superficie superior. Aparece un severo gradiente de presión adverso siguiendo al punto de presión mínima: por último, el gradiente de presión adverso ocasiona que el flujo se separe por completo de la superficie superior y que haya pérdida de sustentación del perfil aerodinámico.

El movimiento del punto de presión mínimo y la acentuación del gradiente de presión adverso son responsables del súbito aumento del C_A en la sección de flujo laminar, el cual es aparente en la figura 9.17. El súbito aumento del C_A se debe a la temprana transición del flujo de capa límite



a) Patrones de flujo



b) Distribución de presión sobre la superficie superior

Fig. 9.18 Efecto del ángulo de ataque sobre el patrón de flujo y la distribución de presión teórica para un perfil aerodinámico de flujo laminar simétrico de 15 por ciento de relación de espesores. (Datos de [19].)

laminar a turbulenta sobre la superficie superior. Los aviones con secciones de flujo laminar se diseñan para volar a la velocidad de crucero en la región de arrastre bajo.

En virtud de que las secciones de flujo laminar tienen bordes delanteros muy afilados, todos

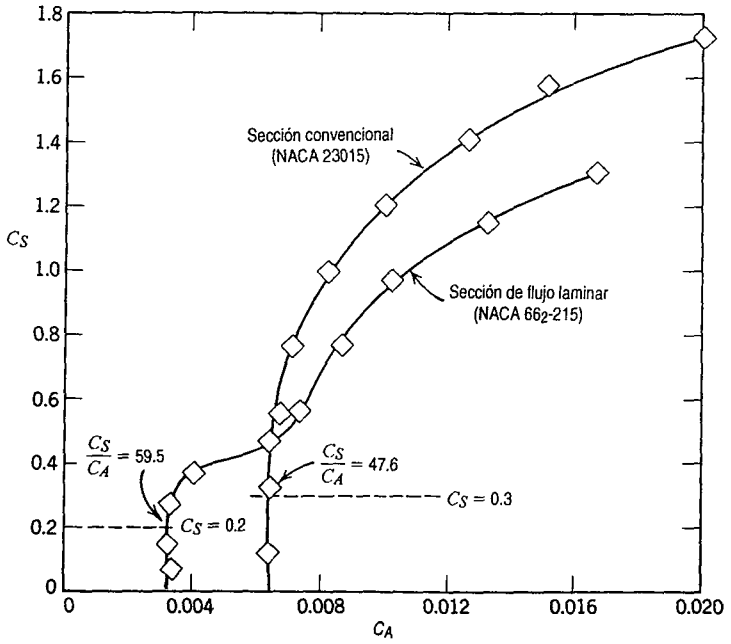


Fig. 9.19 Polares de sustentación-arrastre para dos secciones de perfil aerodinámico de relación de espesores de 15 por ciento. (Datos de [19].)

los efectos que hemos descrito son exagerados, y ellas pierden sustentación a ángulos menores de ataque que las secciones convencionales, como se muestra en la figura 9.17. El coeficiente de sustentación máximo posible, $C_{S_{max}}$, también es menor para secciones de flujo laminar.

Las gráficas de C_S contra C_A (llamadas diagramas polares de sustentación-arrastre) se emplean a menudo para presentar datos de perfiles aerodinámicos. En la figura 9.19 se presenta una gráfica polar para las dos secciones que hemos analizado. La relación sustentación/arrastre, C_S/C_A, se muestra en el coeficiente de sustentación de diseño para ambas secciones. Para un avión de masa determinada a velocidad fija, la potencia requerida para vuelo horizontal es inversamente proporcional a la relación sustentación/arrastre. La ventaja de la sección de flujo laminar es clara.

Las mejoras recientes en la modelación y en las capacidades de cómputo han hecho posible diseñar secciones de perfil aerodinámico que generan un nivel alto de sustentación mientras mantienen uno bajo de arrastre [21, 22]. Los códigos de cálculo de capa límite son utilizados con métodos inversos en el cálculo del flujo potencial para generar las distribuciones de presión y las formas de cuerpo resultantes que retrasan la transición a la posición más posterior posible. La capa límite turbulenta que sigue a la transición se mantiene en un estado de incipiente separación con fricción superficial casi cero mediante la forma apropiada de la distribución de presión.

Estos perfiles aerodinámicos diseñados por computadora se han empleado en carros de carreras para desarrollar una sustentación negativa muy alta (fuerza hacia abajo) y así, mejorar la estabilidad a elevada velocidad y el desempeño en las curvas [21]. Se emplearon secciones aerodinámicas especialmente diseñadas para operar a bajos números de Reynolds en las alas y la hélice del "Gossamer Condor" accionado manualmente y ganador del premio Kremer [26], el cual ahora se exhibe en el Museo Nacional del Aire y el Espacio en Washington, D. C.

Todos los datos presentados hasta ahora han sido para *secciones*, pedazos de perfiles aerodinámicos de envergadura infinita. Los efectos de los extremos sobre *alas* de tramo infinito reducen la sustentación y aumentan el arrastre. De tal modo, las relaciones sustentación/arrastre que pueden conseguirse en la práctica son menores que las obtenidas de pruebas de secciones de perfiles aerodinámicos.

Los efectos de envergadura finita pueden correlacionarse empleando la *proporción dimensional*, definida como

$$ar \equiv \frac{b^2}{A_p} \tag{9.39}$$

donde A_p es el área de ala de avión y b es la envergadura del ala. Para una ala de avión rectangular de envergadura b y cuerda c,

$$ar = \frac{b^2}{A_p} = \frac{b^2}{bc} = \frac{b}{c}$$

La máxima razón sustentación/arrastre ($S/A = C_S/C_A$) para una sección moderna de bajo arrastre puede ser tan alta como 400 para una dimensión proporcional infinita. Un planeador de alto desempeño con $ar = 40$ podría tener aproximadamente $S/A = 40$, y un avión ligero típico ($ar \sim 12$) podría tener $S/A \sim 20$ más o menos. Dos ejemplos de formas bastante pobres son los cuerpos de sustentación empleados para reingresar desde la atmósfera superior, y los esquís de agua, que son perfiles *hidrodinámicos* de baja proporción dimensional. Para ambas de estas formas, S/A por lo general es menor que la unidad.

La madre naturaleza es bastante consciente de los efectos de la proporción dimensional en el desempeño aerodinámico. Los pájaros planeadores, como el albatros o el condor de California, tienen alas delgadas de larga envergadura. Los pájaros que deben maniobrar rápidamente para atrapar su presa, los búhos por ejemplo, tiene alas de envergadura relativamente corta, pero de gran área, lo cual brinda una baja *carga del ala* (relación del peso al área del ala) y por ello alta maniobrabilidad.

Un ala de envergadura finita lleva con ella un sistema de *vórtices de estela*, como se muestra de manera esquemática en la figura 9.20, siempre que genera sustentación. Los vórtices de estela resultan de flujo de fuga alrededor de las puntas del ala, desde la alta presión abajo hasta la baja presión arriba del ala. Estos vórtices pueden ser muy intensos y persistentes, y pueden presentar peligro para los aviones ligeros 5 o 10 millas detrás de un gran avión. Se han medido velocidades del aire mayores que 200 mph en vórtices de estela desde aviones grandes y pesados.[9]

Es posible aumentar la proporción dimensional *efectiva* para un ala de una proporción dimensional geométrica determinada agregando una *placa en el extremo* o *un ala pequeña* en la punta del ala. Una placa en el extremo puede ser una simple placa unida a la punta, perpendicular a la envergadura del ala, como el alerón montado en la parte posterior de un auto de carrera, que se muestra (más adelante) en la figura 9.26. Una placa en el extremo funciona bloqueando el flujo que tiende a migrar de la región de alta presión debajo de la punta del avión a la región de baja presión arriba de la punta cuando el ala está produciendo sustentación. Cuando se añade la placa plana, se reducen la intensidad del vórtice de estela y el arrastre inducido.

[9] Sforza, P. M., "Aircraft Vortices: Benign or Baleful?" *Space/Aeronautics, 53*, 4, Abril 1970, pp. 42-49. Véase también la película de la Universidad de Iowa, *Form Drag, Lift, and Propulsion*, H. Rouse, director.

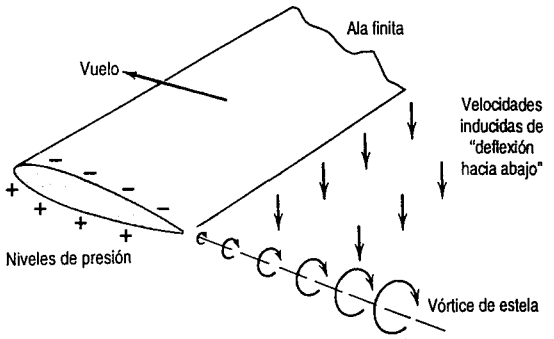


Fig. 9.20 Representación esquemática del sistema del vórtice de estela de un ala finita.

Las alas pequeñas son cortas, con contornos aerodinámicos que se ponen perpendiculares a la punta del avión. Como una placa en el extremo, el ala pequeña reduce la intensidad del sistema del vórtice de estela y el arrastre inducido. El ala pequeña también produce una pequeña componente de fuerza en la dirección de vuelo, que tiene el efecto de reducir aún más el arrastre total del avión. El contorno y el ángulo de ataque del ala pequeña se ajustan para brindar resultados óptimos basados en las pruebas del túnel de viento.

Las velocidades de deflexión hacia abajo inducidas sobre un ala de sustentación reducen el ángulo efectivo de ataque, disminuyendo a su vez la sustentación. (A un ángulo de ataque geométrico fijo, el ala "ve" un flujo aproximadamente en la media de las direcciones de flujo aguas arriba y aguas abajo.) Para mantener la misma fuerza de sustentación, el ángulo geométrico de ataque debe aumentarse. Esto provoca que el arrastre aumente en comparación con el caso de la proporción dimensional infinita. Estos efectos se ilustran esquemáticamente en la figura 9.21.

La teoría y el experimento muestran que las velocidades de deflexión hacia abajo reducen el ángulo efectivo de ataque en proporción al coeficiente de sustentación. Comparado con una sección de perfil aerodinámico de $ar = \infty$, el ángulo geométrico de ataque de un ala debe incrementarse en

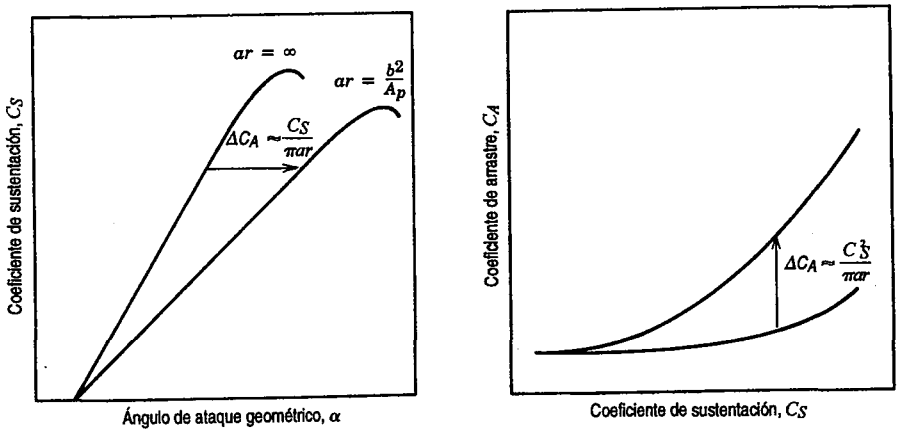


Fig. 9.21 Efecto de la relación dimensional finita sobre los coeficientes de sustentación y arrastre para un ala.

$$\Delta\alpha \approx \frac{C_S}{\pi ar} \tag{9.40}$$

para alcanzar el coeficiente de sustentación de la sección. Esto provoca un aumento en el coeficiente de arrastre para el ala dado por

$$\Delta C_A \approx C_S\,\Delta\alpha \approx \frac{C_S^2}{\pi ar} \tag{9.41}$$

Este aumento en el arrastre debido a la sustentación se denomina *arrastre inducido*.

La proporción dimensional *efectiva* incluye el efecto de la forma de ala de avión. Para la mayor parte de las formas de ala de avión la proporción dimensional efectiva está dentro del 15 por ciento de la proporción dimensional geométrica. Cuando se escribe en términos de la proporción dimensional efectiva, el arrastre de un ala de envergadura finita se convierte en

$$C_A = C_{A,\infty} + C_{A,i} = C_{A,\infty} + \frac{C_S^2}{\pi ar} \tag{9.42}$$

donde $C_{A,\infty}$ es el coeficiente de arrastre de la sección en C_S, $C_{A,i}$ es el coeficiente de arrastre inducido en C_S y ar es la proporción dimensional efectiva del ala de envergadura finita.

El arrastre sobre perfiles aerodinámicos surge de las fuerzas viscosas y de presión. El arrastre viscoso cambia con el número de Reynolds, pero sólo ligeramente con el ángulo de ataque. Estas relaciones y cierta terminología utilizada comúnmente se ilustran en la figura 9.22.

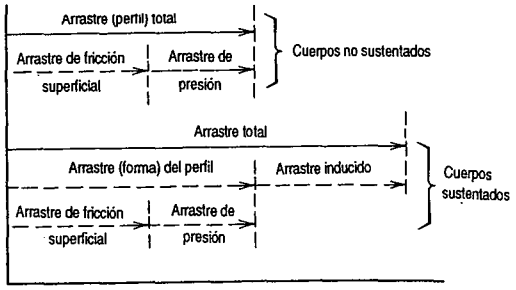


Fig. 9.22 Rompimiento del arrastre en cuerpos no sustentados y sustentados.

Una aproximación útil a la gráfica polar de arrastre para un avión completo puede obtenerse agregando el arrastre inducido al arrastre a sustentación cero. El arrastre en cualquier coeficiente de sustentación se obtiene de

$$C_A = C_{A,0} + C_{A,i} = C_{A,0} + \frac{C_S^2}{\pi ar} \tag{9.43}$$

donde $C_{A,0}$ es el coeficiente de arrastre a sustentación cero y ar es la proporción dimensional efectiva.

Como hemos visto, los aviones pueden equiparse con perfiles aerodinámicos de bajo arrastre para conseguir un funcionamiento excelente en condiciones de crucero. Sin embargo, como el coeficiente de sustentación máximo es bajo para perfiles aerodinámicos delgados, es necesario llevar a cabo un esfuerzo adicional para obtener velocidades de aterrizaje aceptablemente bajas. En condiciones de vuelo de estado estable, la sustentación debe ser igual al peso del avión. Por

tanto, de la ecuación 9.38,

$$W = F_S = C_S \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$

La velocidad de vuelo mínima se obtiene cuando $C_S = C_{S_{máx}}$. Al resolver para V_{min},

$$V_{min} = \sqrt{\frac{2W}{\rho C_{S_{máx}} A}} \tag{9.44}$$

De acuerdo con la ecuación 9.44, la velocidad de aterrizaje mínima puede reducirse aumentando $C_{S_{máx}}$ o el área del ala. Se disponen dos técnicas básicas para controlar estas variables: secciones del ala de geometría variable (esto es, mediante el uso de alerones) o técnicas de control de la capa límite.

Los alerones son partes móviles del borde posterior de un ala que pueden extenderse durante el aterrizaje y el despegue para aumentar el área efectiva del ala. Los efectos en la sustentación y el arrastre de dos configuraciones típicas de alerones se muestran en la figura 9.23, como en el caso de la sección de perfil aerodinámico NACA 23012. El coeficiente de sustentación máximo para esta sección se incrementa de 1.52 en la condición "limpia" a 3.48 con alerones de doble hendidura. De acuerdo con la ecuación 9.44, la reducción correspondiente en la velocidad de aterrizaje sería de 34 por ciento.

La figura 9.23 muestra que el arrastre de la sección aumenta de manera sustancial mediante dispositivos de alta sustentación. A partir de la figura 9.23*b*, el arrastre de sección a $C_{S_{máx}}$ ($C_A \simeq 0.28$) con alerones de doble hendidura es aproximadamente 5 veces mayor que el arrastre de sección a $C_{S_{máx}}$ ($C_A \simeq 0.055$) para el perfil aerodinámico limpio. Debe agregarse el arrastre inducido debido a la sustentación al arrastre de la sección para obtener el arrastre total. Debido a que el arrastre inducido es proporcional a C_S^2, ecuación 9.41, el arrastre total aumenta abruptamente a velocidades bajas del avión. A velocidades cercanas a la pérdida de sustentación, el arrastre puede

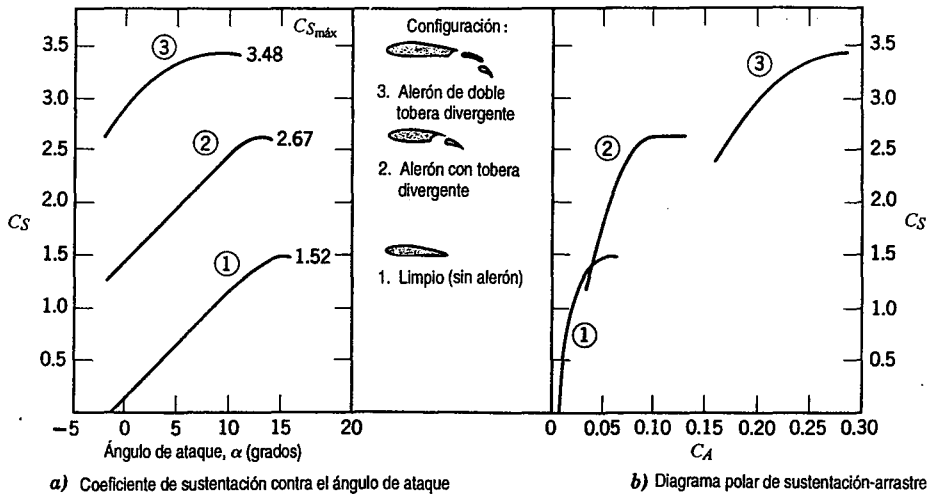


Fig. 9.23 Efecto de alerones sobre las características aerodinámicas de la sección del perfil aerodinámico NACA 23012. (Datos de [19].)

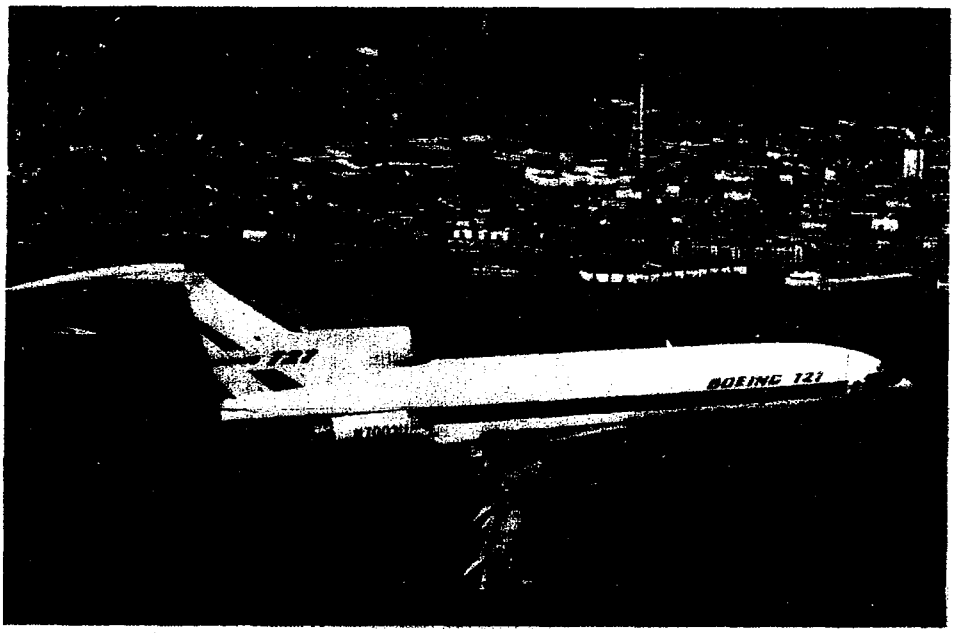


Fig. 9.24(*a*) Aplicación de dispositivos de control de capa límite de elevada sustentación a un avión jet de transporte para la reducción de la velocidad de aterrizaje. El ala del Boeing 727 está altamente mecanizada. Durante su aproximación al aterrizaje, los alerones con triple tobera divergente localizados en el borde posterior, giran desde la parte inferior del ala y se desvían hacia abajo para aumentar la sustentación. Una sección del borde delantero cerca del extremo alejado del fuselaje del ala, se desliza hacia adelante para abrir una tobera divergente que mantiene el flujo del aire cercano a la superficie superior del ala. En el borde delantero cercano a la base, un alerón de Kruger desciende bajo el ala, aumentando el radio efectivo del borde delantero para evitar la separación de flujo. Después del aterrizaje, los frenos aerodinámicos (no mostrados) aparecen inesperadamente enfrente de cada alerón para abatir la sustentación y asegurar que el avión permanezca sobre el suelo, a pesar de los dispositivos de aumento de la sustentación. (Fotografía cortesía de Boeing Airplane Company.)

aumentarse lo suficiente para superar el empuje disponible de los motores. Para evitar esta región peligrosa de operación inestable, la Administración Federal de Aviación (FAA) de los Estados Unidos limita la operación de aviones comerciales a velocidades mayores de 1.2 veces la velocidad de pérdida.

Aunque los detalles de las técnicas de control de la capa límite[10] están más allá del alcance de este libro, el propósito básico de todas ellas es retrasar la separación o reducir el arrastre, añadiendo momento a la capa límite a través de soplado, o removiendo el fluido de capa límite de momento bajo mediante succión. Usted puede observar muchos ejemplos de sistemas de control de capa límite en los aviones de transporte comercial en cualquier aeropuerto. Uno de los sistemas más complejos, en el avión de pasajeros Boeing 727, se muestra en la figura 9.24. En este avión, se emplean dispositivos de borde delantero junto con alerones de borde posterior de tres hendiduras, para alcanzar un valor de $C_{S_{máx}}$ superior a 3.6.

[10] Véase la excelente película, *Boundary Layer Control*, D. C. Hazen, director, para un repaso de estas técnicas.

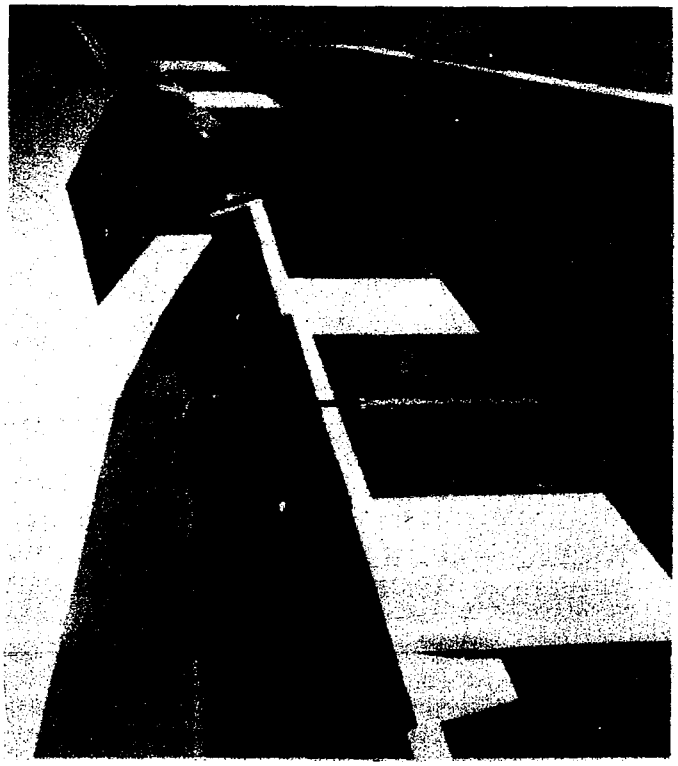


Fig. 9.24(*b*) En el Boeing 707 tanto los alerones del borde posterior internos como los externos (mostrados aquí totalmente desviados) están equipados con doble tobera divergente cerca del pivote. Las toberas divergentes conducen aire desde la superficie inferior hasta la superior del alerón, creando un chorro de tubo de corriente que provoca que el aire fluya para adherirse a la superficie superior. Dos hileras de hojas cortas enfrente de los alerones son generadores de vórtices cuyo propósito es estimular las capas de aire de movimiento lento junto a la superficie de tal modo que puedan seguir la superficie del ala más de cerca, evitando la separación. Los páneles levantados justo arriba de los alerones son dispositivos que eliminan la sustentación llamados frenos aerodinámicos. Normalmente se utilizan para controlar la sustentación en el aterrizaje y las maniobras. Aquí están levantados para ayudar al avión a descender de una gran altura. (Fotografía cortesía de Boeing Airplane Company.)

EJEMPLO 9.8 Operación óptima de crucero de un jet de transporte

Los motores de jet consumen combustible a una relación proporcional al empuje entregado. La condición de crucero óptima para un avión jet es a una velocidad máxima para un empuje dado. En vuelo horizontal estable, el empuje y el arrastre son iguales. La condición de crucero óptima ocurre cuando se minimiza la relación entre la fuerza de arrastre y la velocidad del aire.

Un jet Boeing 727-200 de transporte tiene una área de ala de avión $A_a = 1600$ pies cuadrados, y una proporción dimensional efectiva $ar = 6.5$. La velocidad de pérdida de sustentación al nivel del mar para este avión con los alerones hacia arriba y un peso total de 150,000 libras es de 175 mph. Por debajo de $M = 0.6$, el arrastre debido a efectos de compresibilidad es despreciable, por lo que la ecuación 9.43 puede emplearse para estimar el arrastre total sobre este avión. $C_{A,0}$ para la aeronave es constante e igual a 0.0182. Suponga que la velocidad del sonido al nivel del mar es $c = 759$ mph.

Evalúe la envolvente de funcionamiento para este avión al nivel del mar graficando la fuerza de arrastre contra la velocidad, entre la pérdida de sustentación y $M = 0.6$. Emplee esta gráfica para estimar la velocidad de crucero óptima para la aeronave a condiciones del nivel del mar. Comente acerca de la velocidad de pérdida de sustentación y la de crucero óptima para el avión a una altitud de 30,000 pies en un día normal.

PROBLEMA EJEMPLO 9.8

DATOS: Un jet de transporte Boeing 727-200 a las condiciones del nivel del mar.

$$W = 150\,000 \text{ lbf}, A = 1600 \text{ pies}^2, ar = 6.5 \text{ y } C_{A,0} = 0.0182$$

La velocidad de pérdida de sustentación es $V_{\text{pérdida}} = 175$ mph, y los efectos de compresibilidad sobre el arrastre son despreciables para $M \leq 0.6$ (la velocidad del sonido al nivel del mar es $c = 759$ mph).

ENCUENTRE: *a*) Evalúe y grafique la fuerza de arrastre contra la velocidad desde $V_{\text{pérdida}}$ hasta $M = 0.6$.

b) Estime la velocidad de crucero óptima a nivel del mar.

c) Comente acerca del funcionamiento a una altitud de 30,000 pies.

SOLUCIÓN:

Para un vuelo horizontal y estable, el peso es igual a la sustentación y el empuje igual al arrastre.

Ecuaciones de cálculo:

$$F_S = C_S A \tfrac{1}{2}\rho V^2 = W \qquad C_A = C_{A,0} + \frac{C_S^2}{\pi ar}$$

$$F_A = C_A A \tfrac{1}{2}\rho V^2 = T \qquad M = \frac{V}{c}$$

A nivel del mar, $\rho = 0.00238$ slug/pie^3 y $c = 759$ mph.

Como $F_S = W$ para un vuelo horizontal a cualquier velocidad, entonces

$$C_S = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \frac{2W}{\rho V^2 A}$$

La velocidad de pérdida de sustentación es $V = 175$ mph, por lo que

$$C_S = 2 \times 150\,000 \text{ lbf} \times \frac{\text{pie}^3}{0.00238 \text{ slug}} \left[\frac{\text{hr}}{175 \text{ mi}} \times \frac{\text{mi}}{5280 \text{ pies}} \times 3600 \frac{\text{s}}{\text{hr}}\right]^2 \frac{1}{1600 \text{ pies}^2}$$

$$\times \frac{\text{slug} \cdot \text{pie}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}$$

$$C_S = \frac{3.65 \times 10^4}{[\text{V(mph)}]^2} = \frac{3.65 \times 10^4}{(175)^2} = 1.19, \text{ y}$$

$$C_A = C_{A,0} + \frac{C_S^2}{\pi ar} = 0.0182 + \frac{(1.19)^2}{\pi(6.5)} = 0.0875$$

Por tanto,

$$F_A = W\frac{C_A}{C_S} = 150\,000 \text{ lbf}\left(\frac{0.0875}{1.19}\right) = 11\,000 \text{ lbf}$$

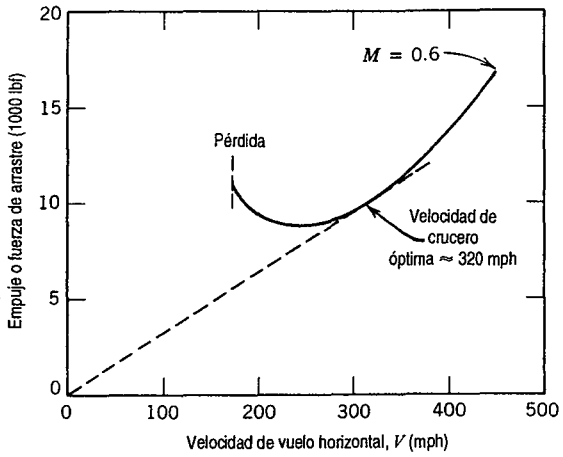
En $M = 0.6$, $V = Mc = (0.6)759$ mph $= 455$ mph, por lo que $C_S = 0.176$ y

$$C_A = 0.0182 + \frac{(0.176)^2}{\pi(6.5)} = 0.0197; \quad F_A = 150\ 000\ \text{lbf}\left(\frac{0.0197}{0.176}\right) = 16\ 800\ \text{lbf}$$

Cálculos similares conducen a la siguiente tabla:

V(mph)	175	200	300	400	455
C_S	1.19	0.913	0.406	0.228	0.176
C_A	0.0875	0.0590	0.0263	0.0207	0.0197
F_S(lbf)	11 000	9690	9720	13 600	16 800

Estos datos pueden graficarse como:



De acuerdo con la gráfica, la velocidad de crucero óptima al nivel del mar se estima igual a 320 mph.

A una altitud de 30 000 pies (9140 m), la densidad es sólo aproximadamente de 0.375 veces la densidad a nivel del mar, según la tabla A.3. Las velocidades para fuerzas correspondientes se calculan de

$$F_S = C_S A \tfrac{1}{2}\rho V^2 \quad \text{o} \quad V = \sqrt{\frac{2F_S}{C_A \rho A}} \quad \text{o} \quad \frac{V_{30}}{V_{SS}} = \sqrt{\frac{\rho_{SS}}{\rho_{30}}} = \sqrt{\frac{1}{0.375}} = 1.63$$

De tal modo, las velocidades aumentan 63 por ciento a una altitud de 30 000 pies: $V_{\text{pérdida}} \approx 285$ mph
$V_{\text{crucero}} \approx 522$ mph

Una razón primaria para operar un avión jet de transporte a una gran altitud es el aumento en la velocidad de crucero óptima comparada con la de nivel del mar; en este ejemplo, el rango es 63 por ciento mayor en altitud. (Entre las razones secundarias se encuentra la mejor operación del motor y menores perturbaciones climáticas.) La altitud de crucero óptima depende de la configuración del avión, del peso total, de la longitud del segmento y de los vientos en el vuelo.

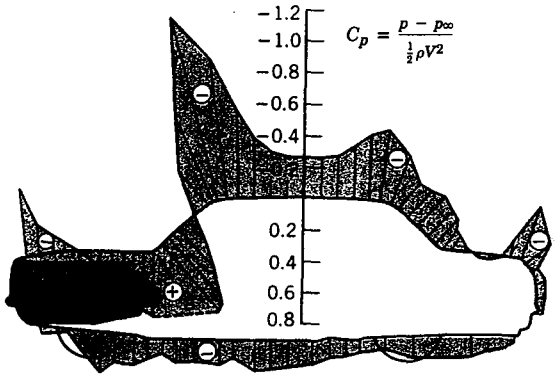


Fig. 9.25 Distribución de presión a lo largo de la línea central de un automóvil [28].

La sustentación aerodinámica es una consideración importante en el diseño de vehículos terrestres de alta velocidad tales como los autos de carreras y las máquinas de registro de velocidad terrestre. Un vehículo terrestre genera sustentación por causa de su forma [27]. En la figura 9.25 [28] se presenta la distribución de presión de línea central representativa medida en el túnel de viento para un automóvil.

La presión es baja alrededor de la nariz debido a la curvatura aerodinámica cuando el flujo rodea la nariz. La presión alcanza un máximo en la base del blindaje de viento, debido de igual modo a la curvatura aerodinámica. Las regiones de baja presión ocurren también en la parte superior del parabrisas y en el techo del automóvil. La velocidad del aire que atraviesa la parte superior es aproximadamente 30 por ciento mayor que la velocidad del aire de corriente libre. El mismo efecto ocurre alrededor de las "columnas en forma de A" en los bordes del parabrisas. El aumento del arrastre debido a un objeto añadido, tal como una antena, un faro o un espejo en esa posición, sería entonces $(1.3)^2 \approx 1.7$ veces el arrastre que el objeto experimentaría en un campo de flujo no perturbado. De modo que el *arrastre parásito* de un componente añadido puede ser mucho más alto que el predicho a partir de su coeficiente de arrastre medido en flujo libre.

A velocidades elevadas, las fuerzas de sustentación aerodinámica pueden separar del piso las llantas, provocando reducciones serias en el control de la dirección y reduciendo la estabilidad a un grado peligroso. Las fuerzas de sustentación en los primeros autos de carreras se contrarrestaban un poco por medio de "frenos aerodinámicos", con una considerable reducción del arrastre. En 1965, Jim Hall introdujo el empleo de perfiles aerodinámicos invertidos móviles en sus autos deportivos Chaparral para desarrollar una fuerza aerodinámica hacia abajo y brindar un frenado aerodinámico [29]. Desde entonces, los desarrollos en la aplicación de dispositivos aerodinámicos han sido rápidos. El diseño aerodinámico se emplea para reducir la sustentación en todos los autos de carreras modernos, como se ejemplifica en la figura 9.26. Los perfiles aerodinámicos de Liebeck [21] se emplean con frecuencia en automóviles de alta velocidad. Sus altos coeficientes de sustentación y arrastre relativamente bajo permiten que la fuerza hacia abajo sea igual o mayor que el peso del auto que se desarrollará a velocidades de carreras. Los autos de "efecto de piso" emplean ductos en forma de venturi en su parte baja y bordes laterales para bloquear los flujos de fuga. Mucho mayores velocidades en las curvas y menores tiempos para recorrer las vueltas son el resultado de la fuerza aerodinámica hacia abajo.

Otro método de control de la capa límite es usar superficies móviles para reducir los efectos de fricción superficial sobre la capa límite [30]. Este método es difícil de aplicar en dispositivos

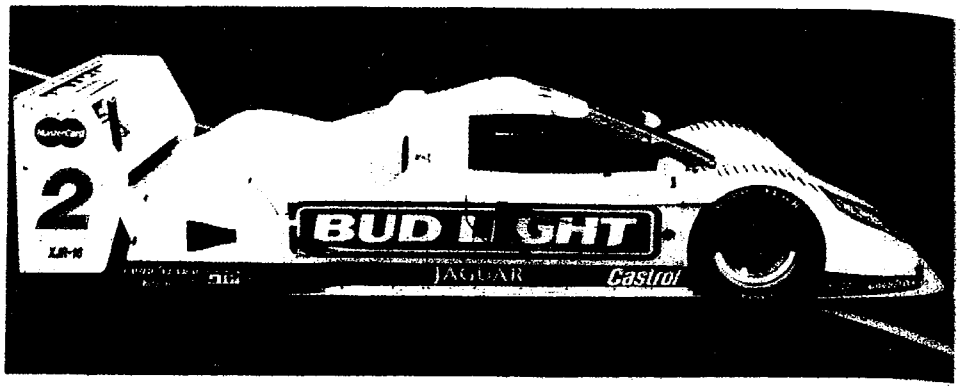
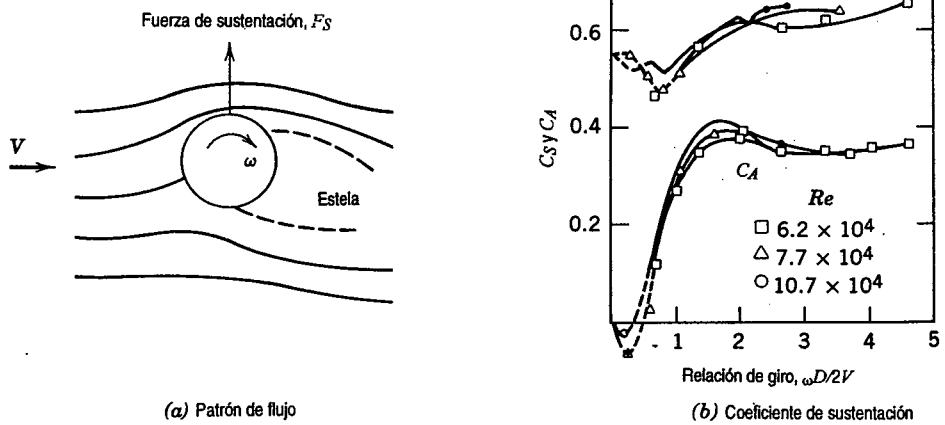


Fig. 9.26 Auto de carreras contemporáneo que muestra características de diseño aerodinámicos. Para alcanzar un desempeño de 200^+ mph se requiere de una cuidadosa atención en el diseño aerodinámico para bajo arrastre y en la fuerza aerodinámica hacia abajo para la estabilidad y las altas velocidades en las curvas. La foto muestra el cuidadoso diseño aerodinámico de espejos, ductos de flujo repentino de entrada y otros detalles necesarios para alcanzar un bajo arrastre. El contorno bajo del frente, la forma de la parte inferior y el ala posterior crean una fuerza hacia abajo para la estabilidad y el desempeño en las curvas a alta velocidad. (Foto cortesía de Goodyear Tire & Rubber Co., Inc.)

prácticos, debido a las complicaciones de geometría y peso, pero es muy importante en la recreación. ¡La mayoría de los golfistas, tenistas, seguidores del ping pong y lanzadores de béisbol puede confirmarlo! Los jugadores de tenis y ping pong utilizan el giro para controlar la trayectoria y el bote de un tiro. En el golf, ¡un golpe puede hacer que la bola abandone el tee a 275 pies/s o más, con un giro de retroceso de 9000 rpm! El giro brinda una importante sustentación aerodinámica que aumenta de manera sustancial el alcance del golpe. El giro es en gran medida responsable de la desviación y el efecto que adquiere la bola cuando los golpes no se dan con firmeza. Los lanzadores en béisbol utilizan el giro para lanzar una curva.

El flujo alrededor de una esfera girando se muestra en la figura 9.27*a*. El giro altera la



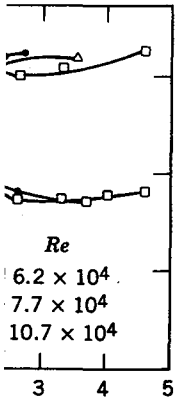
(a) Patrón de flujo *(b)* Coeficiente de sustentación

Fig. 9.27 Patrón de flujo y coeficientes de sustentación y arrastre para una esfera que gira en un flujo uniforme. (Datos de [17].)

) aerodinámicos. Para
ención en el diseño
o para la estabilidad y
o aerodinámico de
s para alcanzar un
el ala posterior crean
s a alta velocidad.

uy importante en la
lanzadores de béisbol
ontrolar la trayectoria
: el tee a 275 pies/s o
ustentación aerodiná-
n medida responsable
lan con firmeza. Los

7*a*. El giro altera la



giro, $\omega D/2V$

iente de sustentación

era que gira en un

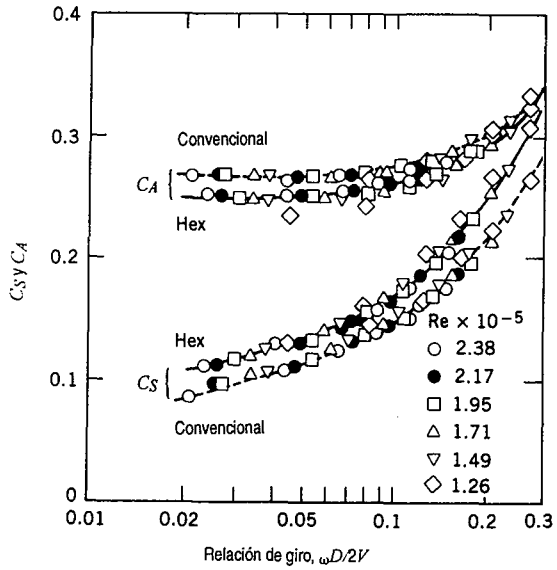


Fig. 9.28 Comparación entre las bolas de golf convencionales y las que tienen orificios hexagonales [31].

distribución de presión y también afecta la posición de la separación de la capa límite. La separación se retarda en la superficie superior de la esfera en la figura 9.27*a*, y ocurre antes en la superficie inferior. La presión se reduce en la superficie superior y aumenta en la superficie inferior; la estela se desvía hacia abajo como se muestra. Las fuerzas de la presión provocan una sustentación en la dirección que se indica; el giro en la dirección opuesta produciría sustentación negativa —una fuerza hacia abajo. La fuerza está en dirección perpendicular tanto a V como al eje de giro.

Los datos de sustentación y arrastre para esferas lisas girando se presentan en la figura 9.27*b*. El parámetro más importante es la *relación de giro*, $\omega D/2V$, la relación entre la velocidad en la superficie y la velocidad del flujo de corriente libre; el número de Reynolds desempeña un papel secundario. A una relación de giro baja, la sustentación es negativa para un giro en el sentido de las manecillas del reloj. Sólo arriba de $\omega D/2V \approx 0.5$ la sustentación se vuelve positiva y continúa aumentando conforme se incrementa la relación de giro. El coeficiente de sustentación se equilibra en aproximadamente 0.35. El giro tiene poco efecto sobre el coeficiente de arrastre de la esfera, el cual varía de cerca de 0.5 a casi 0.65 sobre el rango de la relación de giro mostrada.

Antes mencionamos el efecto de los "hoyuelos" en el arrastre de una bola de golf. En la figura 9.28 se presentan datos experimentales para los coeficientes de arrastre y sustentación de bolas de golf girando, para números de Reynolds subcríticos entre 126,000 y 238,000. También en este caso la variable independiente es la relación de giro; un rango mucho más pequeño de la relación de giro, típico de las bolas de golf, se presenta en la figura 9.28.

Una clara tendencia es evidente: el coeficiente de sustentación aumenta consistentemente con la relación de giro tanto para hoyuelos hexagonales como "convencionales" (redondos). El coeficiente de arrastre sobre una bola de golf con hoyuelos hexagonales es bastante mayor —tanto como el 15 por ciento— que el de una bola con hoyuelos redondos. La ventaja de los hoyuelos hexagonales permanece para las relaciones de giro más grandes que se midieron. El coeficiente de arrastre para una bola con hoyuelos hexagonales es consistentemente de 5 a 7 por ciento menor

que el coeficiente de arrastre para una bola con hoyuelos redondos a relaciones de giro bajas, pero la diferencia se vuelve menos pronunciada cuando aumenta la relación de giro.

La combinación de mayor sustentación y menor arrastre aumenta el alcance de un tiro de golf. Hace algunos años, Royal introdujo la bola "Plus 6" —con hoyuelos hexagonales— en los Estados Unidos. ¡Su campaña publicitaria aseguraba a los golfistas que los golpes serían consistentemente seis yardas más largos que los que se daban al utilizar bolas convencionales con hoyuelos redondos!

EJEMPLO 9.9 Sustentación de una bola que gira

Una pelota de tenis lisa, con 57 g de masa y 64 mm de diámetro, se golpea a 25 m/s con giro hacia arriba de 7500 rpm. Calcule la sustentación aerodinámica que actúa sobre la pelota. Evalúe el radio de curvatura de su trayectoria en un plano vertical. Compare con el radio para el caso en que no haya giro.

PROBLEMA EJEMPLO 9.9

DATOS: Una pelota de tenis en vuelo, con $m = 57$ g y $D = 64$ mm, golpeada con $V = 25$ m/s y giro hacia arriba de 7500 rpm.

ENCUENTRE: *a*) La sustentación aerodinámica que actúa sobre la pelota.
b) El radio de curvatura de la trayectoria en el plano vertical.
c) Compare con el radio en el caso en que no haya giro.

SOLUCIÓN:

Suponga que la bola es lisa.

Emplee los datos de la figura 9.27 para encontrar la sustentación: $C_S = f\left(\frac{\omega D}{2V}, Re_D\right)$

A partir de los datos dados (para aire estándar, $\nu = 1.45 \times 10^{-5}$ m^2/s),

$$\frac{\omega D}{2V} = \frac{1}{2} \times 7500 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 0.064 \text{ m} \times \frac{\text{s}}{25 \text{ m}} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} = 1.01$$

$$Re_A = \frac{VD}{\nu} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.064 \text{ m} \times \frac{\text{s}}{1.45 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 1.1 \times 10^5$$

De la figura 9.27, $C_S \approx 0.3$, por lo que

$$F_S = C_S A \frac{1}{2}\rho V^2 = C_S \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{\pi}{8} C_S D^2 \rho V^2$$

$$F_S = \frac{\pi}{8} \times 0.3 \times (0.064)^2 \text{ m}^2 \times 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (25)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 0.371 \text{ N} \quad \longleftarrow F_S$$

Debido a que la pelota se golpea con giro hacia arriba, esta fuerza actúa hacia abajo.

Emplee la segunda ley de Newton para evaluar la curvatura de la trayectoria. En el plano vertical,

$$\sum F_z = -F_S - mg = ma_z = -m\frac{V^2}{R} \quad \text{o} \quad R = \frac{V^2}{g + F_S/m}$$

$$R = (25)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\left[\frac{1}{9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0.371\text{ N} \times \frac{1}{0.057\text{ kg}} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}}\right]$$

$R = 38.3$ m (con giro) ← R

$R = (25)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2}{9.81\text{ m}} = 63.7$ m (sin giro) ← R

¡Consecuentemente el giro hacia arriba tiene un importante efecto en la trayectoria del tiro!

Desde hace mucho se sabe que un proyectil en vuelo que gira sobre su eje es afectado por una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento y al eje de giro. Este efecto, conocido como el *efecto Magnus*, es responsable de la desviación sistemática de los casquillos de artillería.

El flujo cruzado alrededor de un cilindro circular rotatorio es cualitativamente similar al flujo en torno a la esfera giratoria mostrado esquemáticamente en la figura 9.27*a*. Con la rotación del cilindro en el sentido de las manecillas del reloj, la separación se retarda sobre la superficie superior; ésta ocurre antes sobre la superficie inferior. De tal modo, la estela se desvía y la distribución de presión sobre el cilindro se altera cuando se presenta la rotación. La presión se reduce sobre la superficie superior y se incrementa sobre la inferior, provocando una fuerza de sustentación neta que actúa hacia arriba. El giro en la dirección opuesta invierte estos efectos y ocasiona una fuerza de sustentación hacia abajo.

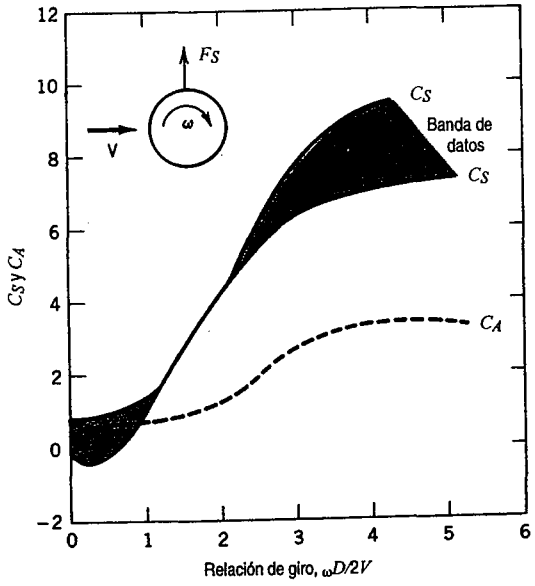


Fig. 9.29 Sustentación y arrastre de un cilindro rotatorio como una función de la velocidad rotacional relativa; fuerza de Magnus. (Datos de [32].)

Los coeficientes de sustentación y arrastre para el cilindro rotatorio se basan en el área proyectada, SA. En la figura 9.29 se muestran coeficientes de sustentación y arrastre medidos experimentalmente para números de Reynolds subcríticos entre 40,000 y 660,000 como funciones de la relación de giro. Cuando la velocidad de la superficie excede la velocidad del flujo, el coeficiente de sustentación aumenta hasta valores sorprendentemente grandes, en tanto que en flujo bidimensional, el arrastre se afecta sólo de manera moderada. El arrastre inducido, el cual debe considerarse en cilindros finitos, puede reducirse empleando discos en los extremos de diámetro mayor que el del cuerpo del cilindro.

Es posible estimar la potencia requerida para rotar un cilindro a partir del arrastre de fricción superficial de la superficie del cilindro. Hoerner [32] sugiere que se base el arrastre de fricción superficial en la velocidad de la superficie tangencial y en el área de la superficie. Goldstein [17] señala que la potencia requerida para hacer girar el cilindro, cuando se expresa como un coeficiente de arrastre equivalente, puede representar 20 por ciento o más del C_A aerodinámico de un cilindro estacionario.

9-9 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 9, usted será capaz de efectuar lo siguiente:

1. Definir:

flujo externo	arrastre
espesor de la perturbación de la capa límite	sustentación
espesor del desplazamiento	ángulo de ataque
espesor del momento	cuerda
gradiente de presión (favorable, adverso)	envergadura
separación	dimensión proporcional
coeficiente de fricción superficial	arrastre inducido

2. Empezando con la ecuación integral del momento para flujo de gradiente de presión cero, desarrollar expresiones para $\delta(x)$, $\delta^*(x)$, $\tau_w(x)$, $C_f(x)$; determinar la fuerza de fricción total sobre una placa plana colocada paralela al flujo.
3. Emplear el concepto del espesor del desplazamiento para aproximar la caída de presión en la región de entrada de un canal.
4. Determinar las fuerzas de arrastre y sustentación para cuerpos en flujo externo.
5. Calcular el momento sobre un objeto debido a fuerzas de arrastre aerodinámico.
6. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionen con el material que usted ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Prandtl, L., "Fluid Motion with Very Small Friction (en alemán)," Proceedings of the Third International Congress on Mathematics, Heidelberg, 1904; Traducción al inglés disponible como NACA TM 452, marzo 1928.
2. Blasius, H., "The Boundary Layers in Fluids with Little Friction (en alemán)," *Zeitschrift fur Mathematik und Physik, 56*, 1, 1908, pp. 1-37; Traducción al inglés disponible como NACA TM 1256, febrero 1950.

3. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 7a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1979.
4. Stokes, G. G., "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums," *Cambridge Philosophical Transactions, IX*, 8, 1851.
5. Howarth, L., "On the Solution of the Laminar Boundary-Layer Equations," *Proceedings of the Royal Society of London, A164*, 1938, pp. 547-579.
6. Hess, J. L., y A. M. O. Smith, "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies," *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 8, D. Kuchemann, et al., eds. Elmsford, NY: Pergamon Press, 1966.
7. Kraus, W., "Panel Methods in Aerodynamics," *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, H. J. Wirz y J. J. Smolderen, eds. Washington, D. C.: Hemisphere, 1978.
8. Rosenhead, L., ed., *Laminar Boundary Layers*. Londres: Oxford University Press, 1963.
9. Rotta, J. C., "Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow," *Progress in Aeronautical Sciences*, A. Ferri, et al., eds. Nueva York: Pergamon Press, 1960, pp. 1-220.
10. Kline, S. J., et al., eds., *Proceedings, Computation of Turbulent Boundary Layers—1968 AFOSR-IFP-Stanford Conference*, Vol. I: Methods, Predictions, Evaluation, and Flow Structure, y Vol. II: Compiled Data. Stanford, CA: Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1969.
11. Kline, S. J., et al., eds., *Proceedings, 1980-81 AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows: Comparison of Computation and Experiment*, tres volúmenes. Stanford, CA: Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1982.
12. Cebeci, T., y P. Bradshaw, *Momentum Transfer in Boundary Layers*. Washington, D. C.: Hemisphere, 1977.
13. Bradshaw, P., T. Cebeci, y J. H. Whitelaw, *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow*. Nueva York: Academic Press, 1981.
14. Hoerner, S. F., *Fluid-Dynamic Drag*, 2nd ed. Midland Park, NJ: Publicada por el autor, 1965.
15. Shapiro, A. H., *Shape and Flow, The Fluid Dynamics of Drag*, Nueva York: Anchor, 1961 (libro de bolsillo).
16. Fage, A., "Experiments on a Sphere at Critical Reynolds Numbers," Gran Bretaña, *Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda*, No. 1766, 1937.
17. Goldstein, S., ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vols. I y II. Oxford: Clarendon Press, 1938. (Reimpreso en libro de bolsillo por Dover, Nueva York, 1967.)
18. Morel, T., y M. Bohn, "Flow over Two Circular Disks in Tandem," *Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, 102*, 1, marzo 1980, pp. 104-111.
19. Abbott, I. H., y A. E. von Doenhoff, *Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data*. Nueva York: Dover, 1959 (libro de bolsillo).
20. Stratford, B. S., "An Experimental Flow with Zero Skin Friction," *Journal of Fluid Mechanics, 5*, Pt. 1, enero 1959, pp. 17-35.
21. Liebeck, R. H., "Design of Subsonic Airfoils for High Lift," *AIAA Journal of Aircraft, 15*, 9, septiembre 1978, pp. 547-561.
22. Smith, A. M. O., "Aerodynamics of High-Lift Airfoil Systems," *Fluid Dynamics of Aircraft Stalling*, AGARD CP-102, 1973, pp. 10-1 a la 10-26.
23. Morel, T., "Effect of Base Slant on Flow in the Near Wake of an Axisymmetric Cylinder," *Aeronautical Quarterly, XXXI*, Pt. 2, mayo 1980, pp. 132-147.
24. Hucho, W. H., "The Aerodinamic Drag of Cars —Current Understanding, Unresolved Problems, and Future Prospects," *Aerodynamic Drag Mechanisms of Bluff Bodies and Road Vehicles*, G. Sovran, T. Morel, y W. T. Mason, eds. Nueva York: Plenum, 1978.
25. McDonald, A. T., and G. M. Palmer, "Aerodynamic Drag Reduction of Intercity Buses," *Transactions, Society of Automotive Engineers, 89*, sección 4, 1980, pp. 4469-4484 (SAE Paper No. 801404).

26. Grosser, M., *Gossamer Odyssey.* Boston: Houghton Mifflin, 1981.
27. Carr, G. W., "The Aerodynamics of Basic Shapes for Road Vehicles. Part 3: Streamlined Bodies," The Motor Industry Research Association, Warwickshire, Inglaterra, Informe Núm. 107/4, 1969.
28. Goetz, H., "The Influence of Wind Tunnel Tests on Body Design, Ventilation, and Surface Deposits of Sedans and Sports Cars," SAE Paper No. 710212, 1971.
29. Hall, J., "What's Jim Hall Really Like?" *Automobile Quarterly, VIII,* 3, Spring 1970, pp. 282-293.
30. Moktarian, F., y V. J. Modi, "Fluid Dynamics of Airfoils with Moving Surface Boundary-Layer Control," *AIAA Journal of Aircraft, 25,* 2, febrero 1988, pp. 163-169.
31. Mehta, R. D., "Aerodynamics of Sports Balls," *Annual Review of Fluid Mechanics,* ed. por M. van Dyke, et al. Palo Alto, CA: Annual Reviews, 1985, *17,* pp. 151-189.
32. Hoerner, S. F., y H. V. Borst, *Fluid-Dynamic lift.* Bricktown, NJ: Hoerner Fluid Dynamics, 1975.
33. Chow, C. Y., *An Introduction to Computational Fluid Mechanics.* Nueva York: Wiley, 1980.
34. Carr, G. W., "The Aerodynamics of Basic Shapes for Road Vehicles, Part 1: Simple Rectangular Bodies," The Motor Industry Research Association, Warwickshire, England, Informe Núm. 1968/2, 1967.

PROBLEMAS

9.1 Un submarino se mueve a 20 nudos a través de agua salada a 7 C. Suponga que cerca del casco la capa límite se comporta como una placa plana. Estime la distancia a partir del casco donde podría esperarse la transición de flujo laminar a turbulento en la capa límite.

9.2 Un modelo de remolcador de río se va a probar a una escala de 1:13.5. El bote está diseñado para viajar a 8 mph en agua dulce a 10 C. Estime la distancia desde el casco donde ocurre la transición. ¿Dónde debe estimularse la transición sobre el remolcador modelo?

9.3 Un aeroplano vuela a 300 nudos a 10 km de altura en un día normal. Suponga que las capas límite sobre las superficies del ala se comportan como en una placa plana. Estime la extensión esperada del flujo laminar en las capas límite del ala.

9.4 El número de Reynolds es $Re = \rho VL/\mu$, donde L es una dimensión característica para el campo de flujo. Considere el desarrollo de la capa límite en flujo paralelo más allá de una placa plana, para la cual la dimensión característica es x, la distancia medida desde el borde delantero. Elabore una gráfica log-log de la velocidad contra la distancia para $0.01 \leq x \leq 10$ m. Muestre las líneas para las cuales $Re_x = 5 \times 10^5$ y 1×10^6 si el fluido es agua.

9.5 El número de Reynolds es $Re = \rho VL/\mu$, donde L es una dimensión característica para el campo de flujo. Considere el desarrollo de la capa límite en flujo paralelo más allá de una placa plana, para la cual la dimensión característica es x, la distancia medida desde el borde delantero. Elabore una gráfica log-log de la velocidad contra la distancia para $0.01 \leq x \leq 10$ m. Muestre las líneas para las cuales $Re_x = 5 \times 10^5$ y 1×10^6 para aire estándar a *a*) condiciones al nivel del mar y *b*) 10 km de altitud.

9.6 Las aeronaves y los misiles que vuelan a grandes alturas pueden tener regiones de flujo laminar que se vuelven turbulentas a altitudes menores a la misma velocidad. Explique un posible mecanismo para este efecto. Sustente su respuesta con cálculos basados en datos atmosféricos estándar.

9.7 El perfil de velocidad senoidal más general para el flujo de capa límite laminar sobre una placa plana $u = A \operatorname{sen}(By) + C$. Establezca tres condiciones de frontera aplicables al perfil de velocidad de capa límite laminar. Evalúe las constantes A, B y C.

****9.8** El perfil de velocidad para una capa límite laminar se va a aproximar mediante la expresión

$$\frac{u}{U} = a + b\left(\frac{y}{\delta}\right) + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^m$$

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

Evalúe a, b y c para la situación donde $m = 1.5$. Compare el perfil resultante con el perfil de Blasius, tabla 9.1.

9.9 Los perfiles de velocidad en capas límite laminares a menudo se aproximan por medio de las ecuaciones

Lineal: $\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta}$ Cúbico: $\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$

Parabólico: $\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$ Senoidal: $\frac{u}{U} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$

Compare las formas de estos perfiles de velocidad graficando y/δ (en la ordenada) contra u/U (en la abscisa).

9.10 El perfil de velocidad en una capa límite turbulenta con frecuencia se aproxima mediante la ecuación de la "ley exponencial de $\frac{1}{7}$"

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

Compare la forma de este perfil con el perfil de velocidad parabólico de capa límite laminar (problema 9.9) graficando y/δ (en la ordenada) contra u/U (en la abscisa) para ambos perfiles.

9.11 La transición en un flujo de capa límite laminar a turbulenta ocurre en realidad sobre una longitud finita de superficie, durante la cual el perfil de velocidad y el esfuerzo de corte en la pared se ajustan de la forma laminar a turbulenta. Una aproximación útil durante la transición es que el espesor del momento de la capa límite permanece constante. Suponiendo constante el espesor del momento, encuentre la relación $\delta_{\text{turbulenta}}/\delta_{\text{laminar}}$ para la transición de un perfil de velocidad laminar parabólico a un perfil de velocidad turbulento de "exponente $\frac{1}{7}$".

9.12 Evalúe δ^*/δ para cada uno de los perfiles de velocidad de capa límite laminar dados en el problema 9.9.

9.13 Evalúe δ^*/δ y θ/δ para el perfil de velocidad turbulento de ley exponencial de $\frac{1}{7}$ dado en el problema 9.10. Compare con las razones para el perfil de velocidad cúbico de capa límite laminar dadas en el problema 9.9.

9.14 Considere una capa límite laminar sobre una placa plana con perfil de velocidad dado por la expresión cúbica del problema 9.9. Para este perfil

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}}$$

Encuentre expresiones para δ^*/x y θ/x.

9.15 Aire en condiciones estándar fluye sobre una placa plana. El flujo es uniforme en el borde delantero de la placa. El perfil de velocidad en la capa límite es de la forma

$$\frac{u}{U} = 2\eta - \eta^2 + C_1, \qquad \text{donde } \eta \equiv y/\delta$$

En una sección, $U = 20$ m/s, $L = 0.20$ m y $\delta = 5.7$ mm. ¿El flujo en esta sección es laminar o turbulento? ¿Por qué? ¿Qué condiciones de frontera debe satisfacer la ecuación para u/U, y qué es C_1? Determine δ^*, θ y τ_w en la sección dada.

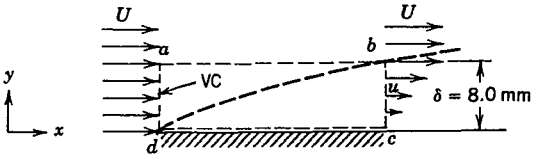
9.16 Evalúe θ/δ para cada uno de los perfiles de velocidad de capa límite laminar dados en el problema 9.9.

9.17 Evalúe $H \equiv \delta^*/\theta$ para cada uno de los perfiles de velocidad de capa límite laminar dados en el problema 9.9.

9.18 Evalúe $H \equiv \delta^*/\theta$ para el perfil de ley exponencial empleado para representar el perfil de velocidad turbulento (problema 9.10). Compare con H para el perfil de velocidad cúbico de capa límite laminar dado en el problema 9.9.

‡**9.19** Agua fluye sobre una placa plana a una velocidad de corriente libre de 0.5 pies/s. No hay gradiente de presión, y la capa límite laminar tiene 0.25 pulg de espesor. Suponga un perfil de velocidad senoidal como el dado en el problema 9.9. Deduzca una ecuación para el esfuerzo de corte en cualquier posición dentro de la capa límite. Para las condiciones de flujo dadas, calcule el esfuerzo local de corte de pared. Encuentre θ por medio de integración numérica o gráfica, y compare con el resultado analítico.

9.20 Aire fluye en condiciones estándar sobre una delgada placa de 1 m de largo y 0.3 m de ancho. El flujo es uniforme en el borde delantero de la placa. Suponga que el perfil de velocidad en la capa límite es lineal, y que la velocidad de corriente libre es $U = 2.7$ m/s. Considere al flujo como bidimensional; suponga que las condiciones de flujo son independientes de z. Empleando el volumen de control *abcd*, mostrado mediante las líneas interrumpidas, calcule la relación de flujo másico que pasa por la superficie *ab*. Determine la magnitud y dirección de la componente x de la fuerza requerida para mantener estacionaria la placa.

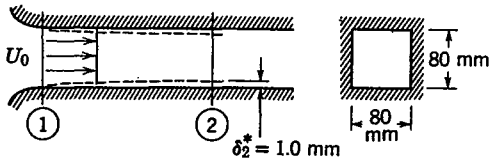


P9.20

9.21 Vuelva a resolver el problema 9.20 con el perfil de velocidad en la sección *bc* dado por la expresión parabólica del problema 9.9, y $\delta = 12.7$ mm.

9.22 Un perfil de velocidad de capa límite viscosa y el perfil de velocidad no viscoso equivalente, con la misma relación de flujo másico, se bosquejan en el problema ejemplo 9.1. Considere la diferencia de flujo de energía cinética entre el flujo no viscoso equivalente y el flujo viscoso. Deduzca una expresión para el "espesor de la diferencia de energía", δ^{**}. Dibuje un diagrama que muestre la interpretación física de este espesor.

9.23 Aire fluye en la región de entrada de un ducto cuadrado, como se muestra. La velocidad es uniforme $U_0 = 30$ m/s, y el ducto es de 80 mm cuadrados. En una sección a 0.3 m aguas abajo desde la entrada, el espesor del desplazamiento, δ^*, en cada pared mide 1.0 mm. Determine el cambio de presión entre las secciones ① y ②.



P9.23

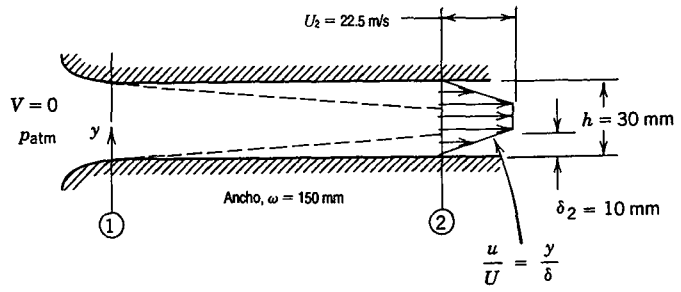
9.24 Los túneles de viento de laboratorio tienen secciones de prueba de 1 pie cuadrado y 2 pies de longitud. Con una velocidad nominal del aire $U_1 = 80$ pies/s en la entrada de la sección de prueba, se forman capas límite turbulentas en las paredes laterales y en las partes superior e inferior del túnel. El espesor de la capa límite es $\delta_1 = 0.8$ pulg en la entrada y $\delta_2 = 1.2$ pulg en la salida de la sección de prueba.

‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

Los perfiles de velocidad de la capa límite son la forma de la ley exponencial, con $u/U = (y/\delta)^{1/7}$. Evalúe la velocidad de la corriente libre, U_2, en la salida de la sección de prueba del túnel de viento. Determine el cambio en la presión estática a lo largo de la sección de prueba.

9.25 La sección cuadrada de prueba de un pequeño túnel de viento de laboratorio tiene lados de ancho $W = 305$ mm. En una sección de medición, las capas límite turbulentas sobre las paredes del túnel son $\delta_1 = 9.5$ mm de espesor. El perfil de velocidad se aproxima bien por medio de la expresión de "exponente $\frac{1}{7}$". En esta posición, la velocidad del aire de corriente libre es $U_1 = 18.3$ m/s, y la presión estática es $p_1 = -22.9$ mm H_2O (manométrica). En una segunda sección de medición aguas abajo, el espesor de la capa límite es $\delta_2 = 12.7$ mm. Evalúe la velocidad del aire en la corriente libre en la segunda sección. Calcule la diferencia en la presión estática de la sección (1) a la sección (2).

9.26 Aire estándar fluye de la atmósfera al canal plano ancho que se muestra. Se forman capas límite laminares en las paredes superior e inferior del canal (ignore los efectos de la capa límite sobre las paredes laterales). Suponga que las capas límite se comportan como en una placa plana, con perfiles de velocidad lineal. Evalúe el espesor del desplazamiento en la sección (2). Determine la presión estática en la sección (1).



P9.26

9.27 Un flujo de aire se desarrolla en un ducto horizontal plano pasando por una sección de entrada bien redondeada. La altura del ducto es $H = 300$ mm. Las capas límite turbulentas crecen sobre las paredes del ducto, pero el flujo aún no se ha desarrollado completamente. Suponga que el perfil de velocidad en cada capa límite es $u/U = (y/\delta)^{1/7}$. El flujo de entrada es uniforme en $\bar{V} = 10$ m/s en la sección (1). En la sección (2), el espesor de la capa límite sobre cada pared del canal es $\delta_2 = 100$ mm. Muestre que para este flujo, $\delta^* = \delta/8$. Evalúe la presión manométrica estática en la sección (2). Encuentre el esfuerzo promedio de corte de la pared entre la entrada y la sección (2), localizada en $L = 5$ m.

9.28 Un túnel de viento de laboratorio tiene una sección cuadrada de prueba con lados de ancho $W = 305$ mm y longitud $L = 610$ mm. Cuando la velocidad del aire de la corriente libre en la entrada de la sección de prueba es $U_1 = 24.4$ m/s, la pérdida de carga desde la atmósfera es 6.5 mm de H_2O. Se forman capas límite turbulentas sobre la parte superior, la inferior y las paredes laterales de la sección de prueba. Las mediciones indican que los espesores de las capas límite son $\delta_1 = 20.3$ mm en la entrada y $\delta_2 = 25.4$ en la salida de la sección de prueba. Los perfiles de velocidad son de la forma del exponente $\frac{1}{7}$. Evalúe la velocidad del aire de la corriente libre en la salida de la sección de prueba. Determine las presiones estáticas en la entrada y la salida de la sección de prueba.

9.29 Entra aire a un ducto circular de 3 pulg de diámetro a través de una entrada de contorno liso. El flujo es estable y el área del ducto constante. La velocidad es uniforme en la sección (1), donde la presión estática es -0.567 pulg de agua (manométrica). En la sección (2), la velocidad varía linealmente, desde 0 en la pared hasta V_2 a una distancia de 0.15 pulg a partir de la pared. Determine *a*) la relación de flujo volumétrico del aire a través del ducto, *b*) la velocidad del centro en la sección (2) y *c*) el espesor del desplazamiento en la sección (2).

9.30 Para las condiciones del problema 9.24, calcule *a*) la fuerza de corte total en la pared y *b*) el esfuerzo promedio de corte en la pared de la sección de prueba.

**9.31 Utilizando los resultados numéricos para la solución exacta de Blasius para el flujo de capa límite laminar sobre una placa plana, grafique el perfil de velocidad adimensional, u/U (en la abscisa), contra la distancia adimensional desde la superficie, y/δ (en la ordenada). Compare con el perfil de velocidad parabólico aproximado del problema 9.9.

‡**9.32 Empleando integración gráfica o numérica, evalúe θ/δ para la solución exacta de Blasius correspondiente a la capa límite laminar sobre una placa plana (tabla 9.1). Demuestre que el resultado es $\theta/x = 0.664/\sqrt{Re_x}$.

**9.33 Empleando los resultados numéricos obtenidos por Blasius (tabla 9.1), evalúe la distribución del esfuerzo de corte en una capa límite laminar sobre una placa plana. Grafique τ/τ_w contra y/δ. Compare con los resultados obtenidos del perfil de velocidad parabólico aproximado dado en el problema 9.9.

**9.34 Empleando los resultados numéricos obtenidos por Blasius (tabla 9.1), evalúe la distribución de los esfuerzos de corte en una capa límite laminar sobre una placa plana. Grafique τ/τ_w contra y/δ. Compare con los resultados obtenidos del perfil de velocidad senoidal aproximado del problema 9.9.

**9.35 Empleando los resultados numéricos obtenidos por Blasius (tabla 9.1), evalúe la distribución de los esfuerzos de corte en una capa límite laminar sobre una placa plana. Grafique τ/τ_w contra y/δ. Compare con los resultados obtenidos del perfil de velocidad cúbico aproximado dado en el problema 9.9.

**9.36 Empleando los resultados numéricos obtenidos por Blasius (tabla 9.1), evalúe la componente vertical de la velocidad en una capa límite laminar sobre una placa plana. Grafique v/U contra y/δ para $Re_x = 10^5$.

**9.37 Las ecuaciones de capa límite de Prandtl pueden escribirse como una ecuación diferencial ordinaria introduciendo la función de corriente definida por la ecuación 9.8. Mediante sustitución directa, exprese la derivada $\partial v/\partial x$, en términos de $f(\eta)$ y sus derivadas. Evalúe en la pared y explique el significado físico de este resultado.

**9.38 Compruebe que la componente y de la velocidad para la solución de Blasius a las ecuaciones de capa límite de Prandtl está dada por la ecuación 9.10. Obtenga una expresión algebraica para la componente x de la aceleración de una partícula de fluido en la capa límite laminar. Estime la componente x máxima de la aceleración a una x dada.

**9.39 Los resultados numéricos de la solución de Blasius a las ecuaciones de capa límite de Prandtl se presentan en la tabla 9.1. Considere el flujo estable e incompresible de aire estándar sobre una placa plana a la velocidad de corriente libre $U = 4.3$ m/s. En $x = 0.2$ m, estime la distancia desde la superficie a la cual $u = 0.95\ U$. Evalúe la pendiente de la línea de corriente que pasa por este punto. Obtenga una expresión algebraica para la fricción superficial local, $\tau_w(x)$. Obtenga una expresión algebraica para la fuerza de arrastre de la fricción superficial total sobre la placa. Evalúe el espesor del momento a $L = 0.8$ m.

9.40 Considere el flujo estable, incompresible y horizontal en una capa límite con succión distribuida en la pared. La velocidad de succión en la pared es constante con $v = -v_0$ en $y = 0$. No hay gradiente de presión. Emplee un volumen de control diferencial para demostrar que

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} - \frac{v_0}{U}$$

donde U es la velocidad de la corriente libre y τ_w es el esfuerzo de corte en la pared.

9.41 Resuelva el problema 9.40 para un flujo de capa límite con *soplado* distribuido en la pared en vez de succión. Suponga que la velocidad del soplado en la pared es constante con $v = v_0$ en $y = 0$.

** Estos problemas requieren material de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.
‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

9.42 Una placa plana delgada, $L = 0.3$ m de largo y $b = 1$ m de ancho, se instala en un túnel de agua como un divisor. La velocidad de corriente libre es $U = 2$ m/s y el perfil de velocidad en la capa límite es aproximadamente parabólico. Para este perfil, $\delta/x = 5.48/\sqrt{Re_x}$. Grafique δ, δ^*, y τ_w contra x/L para la placa.

9.43 Una placa plana delgada se instala en un túnel de agua como un divisor. La placa tiene 0.3 m de largo y 1 m de ancho. La velocidad de corriente libre es 1.6 m/s. Las capas límite laminares se forman sobre ambos lados de la placa. El perfil de velocidad de la capa límite se aproxima como parabólico. Determine la fuerza total de arrastre viscoso sobre la placa, suponiendo que el arrastre de la presión es despreciable.

9.44 Considere el flujo sobre la placa divisora del problema 9.42. Muestre algebraicamente que la fuerza de arrastre total sobre un lado de la placa divisora puede ser escrita como $F_A = \rho U^2 \theta_L b$. Evalúe θ_L y el arrastre total para las condiciones dadas.

9.45 Calcule la fuerza de arrastre sobre una placa plana con dimensiones de 0.75 m × 0.75 m cuando se alinea en un flujo de aire estándar donde la velocidad de corriente libre es 1.8 m/s.

9.46 Una superficie horizontal, con longitud $L = 1.8$ m y ancho $b = 0.9$ m, está sumergida en una corriente de aire estándar que fluye a $U = 3.2$ m/s. Suponga que se forma una capa límite laminar y aproxime el perfil de velocidad como senoidal. Grafique δ, δ^* y τ_w contra x/L para la placa.

9.47 Para las condiciones de flujo del problema 9.46, desarrolle una expresión algebraica para la variación del esfuerzo de corte de pared con respecto a la distancia a lo largo de la superficie. Integre para obtener una expresión algebraica para el arrastre total de la fricción superficial sobre la superficie. Evalúe el arrastre en las condiciones dadas.

9.48 Considere de nuevo las condiciones de flujo del problema 9.46. Demuestre algebraicamente que la fuerza de arrastre total sobre un lado de la placa puede escribirse $F_A = \rho U^2 \theta_L b$. Evalúe θ_L y el arrastre total en las condiciones dadas.

9.49 El perfil de velocidad en un flujo de capa límite laminar con gradiente de presión cero se aproxima por medio de la expresión lineal dada en el problema 9.9. Emplee la ecuación integral del momento con este perfil para obtener expresiones para δ/x y C_f.

9.50 Una superficie horizontal, con longitud $L = 0.8$ m y ancho $b = 1.9$ m, se sumerge en una corriente de aire estándar que fluye a $U = 5.3$ m/s. Suponga que se forma una capa límite laminar y aproxime el perfil de velocidad como lineal. Grafique δ, δ^* y τ_w contra x/L para la placa.

9.51 Para las condiciones de flujo del problema 9.50, desarrolle una expresión algebraica para la variación del esfuerzo de corte en la pared con respecto a la distancia a lo largo de la superficie. Integre para obtener una expresión algebraica para el arrastre de fricción superficial sobre la superficie. Evalúe el arrastre para las condiciones dadas.

9.52 Considere otra vez las condiciones de flujo del problema 9.50. Muestre algebraicamente que la fuerza de arrastre total sobre un lado de la placa puede escribirse $F_A = \rho U^2 \theta_L b$. Evalúe θ_L y el arrastre total para las condiciones dadas.

9.53 Agua fluye a 15 C sobre una placa plana a una velocidad de 1 m/s. La placa tiene 0.4 m de largo y 1 m de ancho. La capa límite sobre cada superficie de la placa es laminar. Suponga que el perfil de velocidad se aproxima como lineal. Determine la fuerza de arrastre sobre la placa.

9.54 El perfil de velocidad en un flujo de capa límite laminar a gradiente de presión cero se va a aproximar por medio de la expresión cúbica dada en el problema 9.9. Emplee la ecuación integral del momento con este perfil para obtener expresiones para la razón δ/x y el coeficiente de fricción superficial, C_f.

9.55 Agua fluye sobre una placa plana, con longitud $L = 1.2$ pies y ancho $b = 3$ pies, a una velocidad de corriente libre $U = 4$ pies/s. Suponga que se forma una capa límite laminar y aproxime el perfil de velocidad utilizando la expresión cúbica dada en el problema 9.9. Grafique δ, δ^* y τ_w contra x/L para la placa.

9.56 Agua fluye sobre la superficie superior de una placa plana, formando una capa límite laminar. El perfil de velocidad de la capa límite se aproxima mediante la expresión cúbica dada en el problema 9.9. La placa tiene una longitud de 0.5 pies y un ancho de 3 pies. La velocidad del flujo de corriente libre es 4 pies/s. Determine la δ máxima para la placa. ¿Dónde ocurre el esfuerzo de corte mínimo en la pared? Ilustre con un dibujo de τ_w contra x. Calcule el esfuerzo de corte mínimo en la pared. Determine la fuerza de arrastre sobre la placa.

9.57 Considere las condiciones de flujo del problema 9.55. Muestre algebraicamente que la fuerza de arrastre total sobre un lado de la placa puede escribirse $F_A = \rho U^2 \theta_L b$. Evalúe θ_L y el arrastre total para las condiciones dadas.

9.58 Suponga las condiciones de flujo dadas en el problema ejemplo 9.4. Grafique δ, δ^* y τ_w contra x/L para la placa.

9.59 Para las condiciones de flujo del problema ejemplo 9.4, desarrolle una expresión para la variación del esfuerzo de corte en la pared con respecto a la distancia a lo largo de la superficie. Integre para obtener una expresión algebraica para el arrastre total de fricción superficial sobre la superficie. Evalúe el arrastre para las condiciones dadas.

9.60 Considere las condiciones de flujo del problema ejemplo 9.4. Muestre algebraicamente que la fuerza de arrastre total sobre un lado de la placa puede escribirse $F_A = \rho U^2 \theta_L b$. Evalúe θ_L y el arrastre total para las condiciones dadas.

9.61 El perfil de velocidad en un flujo de capa límite turbulenta a gradiente de presión cero es aproximado por medio de la expresión del perfil de "exponencial $\frac{1}{6}$",

$$\frac{u}{U} = \eta^{1/6}, \quad \text{donde} \qquad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Emplee la ecuación integral del momento con este perfil para obtener expresiones para δ/x y C_f. Compare con los resultados obtenidos en la sección 9-5.2 para el perfil de "exponencial $\frac{1}{7}$".

9.62 Para las condiciones de flujo del problema ejemplo 9.4, pero utilizando el perfil de velocidad de "exponencial $\frac{1}{6}$" del problema 9.61, desarrolle una expresión algebraica para la variación del esfuerzo de corte de pared con respecto a la distancia a lo largo de la superficie. Integre para obtener una expresión algebraica para el arrastre total de fricción superficial sobre la superficie. Evalúe el arrastre para las condiciones dadas.

9.63 Repita el problema 9.61 empleando la expresión del perfil de "exponencial $\frac{1}{8}$".

9.64 Para las condiciones de flujo del problema ejemplo 9.4, pero utilizando el perfil de velocidad de "exponencial $\frac{1}{8}$", desarrolle una expresión algebraica para la variación del esfuerzo de corte en la pared con respecto a la distancia a lo largo de la superficie. Integre para obtener una expresión algebraica para el arrastre total de fricción superficial sobre la superficie. Evalúe el arrastre para las condiciones dadas.

9.65 Aire fluye en condiciones estándar sobre una placa plana. La velocidad de la corriente libre es 15 m/s. Encuentre δ y τ_w en $x = 1$ m desde el borde delantero para *a*) flujo completamente laminar (suponga un perfil de velocidad parabólico) y *b*) flujo completamente turbulento (suponga un perfil de velocidad de "exponencial $\frac{1}{7}$").

9.66 Aire estándar fluye sobre una placa plana lisa y horizontal a una velocidad de corriente libre $U =$ 14.5 m/s. La longitud de la placa es $L = 1.5$ m y su ancho es $b = 0.8$ m. El gradiente de presión es cero. La capa límite se dispara por lo que es turbulenta a partir del borde delantero; el perfil de velocidad se representa bien por medio de la expresión de "exponencial $\frac{1}{7}$". Evalúe el espesor de la capa límite, δ, en el borde de salida de la placa. Calcule el esfuerzo de corte en la pared en el borde de salida de la placa. Estime el arrastre de la fricción superficial sobre la parte de la placa entre $x =$ 0.5 m y el borde de salida.

9.67 Un flujo uniforme de aire estándar a 60 m/s entra a un difusor de pared plana con espesor de capa límite despreciable. El ancho de la entrada es de 75 mm. Las paredes del difusor divergen ligeramente

9.68

9.69

9.70

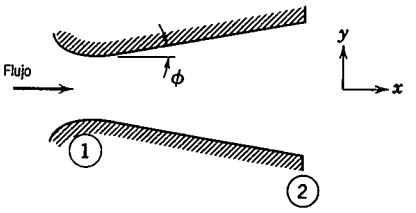
9.71

9.72

para acomodar el crecimiento de la capa límite de manera que el gradiente de presión sea despreciable. Suponga un comportamiento de capa límite de placa plana. Explique por qué la ecuación de Bernoulli es aplicable a este flujo. Estime el ancho del difusor 1.2 m aguas abajo desde la entrada.

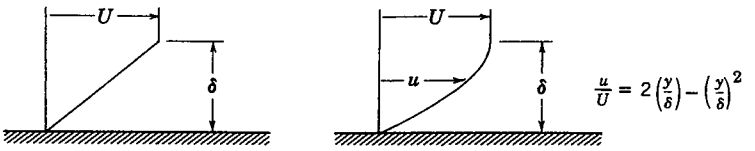
9.68 Un túnel de viento de laboratorio tiene una *pared superior flexible* que puede ajustarse para compensar el crecimiento de la capa límite, proporcionando gradiente de presión cero a lo largo de la sección de prueba. Las capas límite de pared se representan de manera adecuada mediante el perfil de velocidad de "exponencial $\frac{1}{7}$". En la entrada, la sección transversal del túnel es cuadrada, con altura H_1 y ancho W_1, cada una igual a 305 mm. Con velocidad de corriente libre $U_1 = 26.5$ m/s, las mediciones indican que $\delta_1 = 12.2$ mm mientras que aguas abajo, $\delta_6 = 16.6$ mm. Calcule la altura de las paredes del túnel en la sección (6). Determine la longitud equivalente de la placa plana que produciría el espesor de la capa límite de la entrada. Estime la distancia del tubo de corriente entre las secciones (1) y (6) en el túnel.

9.69 Deseamos comparar el flujo de un fluido ideal ($\mu = 0$) y un fluido real en un difusor de pared plana, como se muestra abajo. Considere primero el caso de canal recto donde $\phi = 0$. ¿Qué puede decirse del gradiente de presión para los fluidos real e ideal? ¿Cuál fluido produce la p_2 más alta? Considere luego el caso donde ϕ no es igual a cero, pero es suficientemente pequeña para evitar la separación. También en este caso, ¿qué puede decirse del gradiente de presión para los fluidos real e ideal? ¿Cuál caso origina la presión de salida más alta?



P9.69

9.70 Se muestran dos perfiles de velocidad de capa límite hipotéticos. Obtenga una expresión para el flujo de momento de cada perfil. Si los dos perfiles se sometieran a las mismas condiciones de gradiente de presión, ¿cuál sería la que probablemente se separaría primero? ¿Por qué?

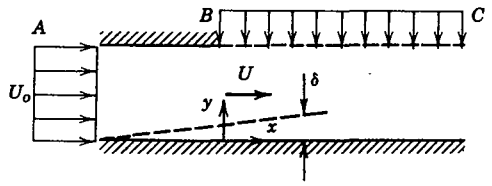


P9.70 *(a)* *(b)*

9.71 La separación de la capa límite ocurre cuando el esfuerzo de corte en la superficie se vuelve cero. Suponga una representación polinomial para la capa límite laminar de la forma $u/U = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3$, donde $\lambda = y/\delta$. Especifique las condiciones de frontera sobre el perfil de velocidad en la separación. Encuentre constantes apropiadas, *a*, *b*, *c* y *d*, para el perfil de la separación. Grafique el perfil y compare con el perfil aproximado parabólico. Calcule H en la separación.

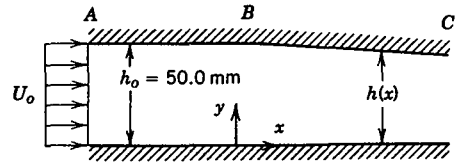
9.72 Mediante la elección adecuada del gradiente de presión adverso, es posible mantener una capa límite turbulenta por una distancia apreciable con esfuerzo de corte de pared casi cero. Para tales flujos, los experimentos muestran que el factor de forma H permanece casi constante e igual a 2. Considere flujo turbulento de aire estándar a través de un difusor plano con ancho aguas arriba $W_1 = 3.0$ pulg. Suponga que la velocidad de flujo de corriente libre en la entrada del difusor es $U_1 = 200$ pies/s y que el espesor de momento correspondiente es $\theta_1 = 0.10$ pulg. La velocidad del flujo de corriente libre en la sección (2) aguas abajo es $U_2 = 100$ pies/s. Grafique el ancho de la salida, W_2, para factores de forma en el rango de 1.29 a 2.6.

9.73 Aire estándar fluye entre dos placas paralelas como se muestra. La placa superior es porosa de B a C y se inyecta aire adicional a través de esta superficie. Como resultado, la velocidad de corriente libre, $U(x)$, varía como $U(x) = U_0 + C_1x$, donde $U_0 = 5$ m/s, $C_1 = 4\ s^{-1}$ y x es la distancia en metros medida desde B. Una capa límite laminar se desarrolla a lo largo de la superficie inferior; en $x = 0.05$ m, $\delta = 3.5$ mm. Suponga que la distribución de velocidad en esta capa límite es lineal. Estime la relación de crecimiento de la capa límite, $d\delta/dx$, en $x = 0.05$ m. Comente este resultado en relación con la naturaleza del gradiente de presión para $x > 0$.



P9.73

9.74 Aire estándar fluye entre dos placas planas paralelas como se muestra. La placa superior es paralela a la inferior de A a B, y luego convergen de B a C. Como resultado de la inclinación, la altura del canal, $h(x)$, varía como $h(x) = h_0 - C_1x$, donde $h_0 = 50$ mm, $C_1 = 0.005$ y x es la distancia en metros medida desde B. Una capa límite laminar se desarrolla a lo largo de ambas superficies; en $x = 0.05$ m, $\delta = 3.5$ mm. Suponga que la distribución de velocidad en la capa límite laminar es parabólica. Estime la relación de crecimiento de la capa límite, $d\delta/dx$, en $x = 0.05$ m.

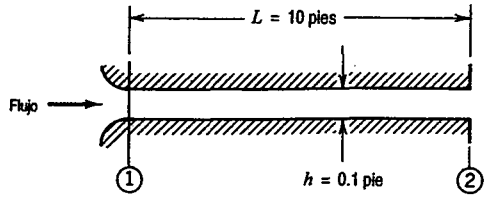


P9.74

9.75 Considere otra vez la geometría del flujo y las condiciones iniciales del problema 9.73. Suponga que una capa límite laminar, con el perfil de velocidad *lineal* aproximado, se desarrolla a lo largo de la superficie de la parte inferior. Desprecie cualquier desarrollo de la capa límite a lo largo de la superficie AC. Evalúe la distribución de velocidad de la corriente libre, $U(x)$, necesaria para mantener la capa límite laminar a *espesor constante* desde $x = 50$ mm hasta $x = 100$ mm.

‡9.76 Elabore un programa de computadora para resolver la distribución del espesor de la capa límite, $\delta(x)$, entre $x = 50$ mm y $x = 100$ mm en el problema 9.73.

9.77 Aire de enfriamiento se alimenta a través del canal plano y ancho mostrado. Para conseguir perturbaciones y ruido mínimos del flujo de salida, deben mantenerse capas límite laminares sobre las paredes del canal. Estime la velocidad máxima del flujo de entrada a la cual el flujo de salida será laminar. Suponiendo perfiles de velocidad parabólicos en las capas límite laminares, evalúe la caída de presión, $p_1 - p_2$. Exprese su respuesta en pulgadas de agua.



P9.77

‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

9.78 Un túnel de viento de laboratorio tiene una sección transversal cuadrada de prueba, con ancho de entrada, W_1, y altura, H_1, cada una igual a 305 mm. A la velocidad de corriente libre $U_1 = 24.5$ m/s, las mediciones muestran que el espesor de la capa límite es $\delta_1 = 9.75$ mm con un perfil de velocidad de "exponencial $\frac{1}{7}$". El gradiente de presión en la región está dado aproximadamente por $dp/dx = -0.035$ mm de H_2O/mm. Evalúe la reducción efectiva en el área del flujo provocada por las capas límite sobre la base, la parte superior y las paredes en la sección (1) del túnel. Calcule la relación de cambio del espesor del momento de la capa límite, $d\theta/dx$, en la sección (1). Estime el espesor del momento al final de la sección de prueba, localizada en $L = 254$ mm aguas abajo.

‡**9.79** El concepto de pared variable se propone para mantener constante el espesor de la capa límite en el túnel de viento del problema 9.78. Empezando con las condiciones iniciales del problema 9.78, evalúe el gradiente de presión necesario para mantener constante el espesor de la capa límite. Suponga ancho constante, W_1. Estime los valores de la altura en la parte superior a lo largo de la sección de prueba desde $x = 0$ en la sección (1) hasta $x = 254$ mm en la sección (2) aguas abajo.

9.80 Una barca de fondo plano, de 25 m de largo y 10 m de ancho, sumergida hasta una profundidad de 1.5 m, se va a empujar contra la corriente en un río a razón de 8 km/hr. Estime la potencia requerida para superar la fricción superficial si la temperatura del agua es 15 C.

9.81 Una aleta estabilizadora vertical sobre un carro de registro de velocidad terrestre tiene $L = 1.65$ m de largo y $H = 0.785$ m de altura. El automóvil se va a conducir en Bonneville Salt Flats en Utah, Estados Unidos, donde la altura es 1340 m y la temperatura en el verano alcanza 50 C. La velocidad del carro es de 560 km/hr. Evalúe el número de Reynolds de longitud de la aleta. Estime la posición de la transición de flujo laminar a turbulento en las capas límite. Calcule la potencia requerida para superar el arrastre de la fricción superficial sobre la aleta.

9.82 Un avión jet de transporte vuela a 12 km de altura en un vuelo horizontal y estable a 820 km/hr. Modele el fuselaje del avión como un cilindro circular con $D = 4$ m de diámetro y $L = 40$ m de largo. Despreciando los efectos de compresibilidad, estime la fuerza de arrastre de la fricción superficial sobre el fuselaje. Evalúe la potencia necesaria para superar esta fuerza.

9.83 Un remolcador para barcas de río se va a probar en un tanque de remolque. El modelo del remolque se va a construir a una escala de 1:13.5. Las dimensiones del modelo son 11.1 pies de longitud total, 3.11 pies de ancho y 0.62 pies de calado. (El desplazamiento del modelo en agua dulce es de 1200 lb.) Estime la longitud promedio de la superficie mojada en el casco. Calcule la fuerza de arrastre de la fricción superficial en el prototipo, a una velocidad de 8 mph relativa al agua.

9.84 La resistencia de una barca se va a determinar a partir de datos de una prueba de modelo. El modelo se construye a una relación de escala de 1:13.5, y tiene longitud, ancho y calado de 22.0, 4.00 y 0.667 pies, respectivamente. La prueba es para simular el desempeño del prototipo a 8 mph. ¿A qué velocidad debe probarse el modelo? ¿Las capas límite en el prototipo son laminares o turbulentas? ¿Dónde deben situarse las separaciones de la capa límite sobre el modelo? Estime las fuerzas de arrastre de la fricción superficial para las barcas modelo y prototipo.

9.85 Una hoja de material plástico de $\frac{3}{8}$ de pulgada de espesor, con densidad relativa DR = 1.5, se deja caer dentro de un gran tanque que contiene agua. La hoja tiene 2 pies de altura y 3 pies de ancho, y cae verticalmente. Estime la velocidad terminal de la hoja, suponiendo que el único arrastre se debe a la fricción superficial y que las capas límite son turbulentas a partir del borde delantero.

9.86 Un submarino nuclear se desplaza completamente sumergido a 27 nudos. El casco es aproximadamente un cilindro circular con diámetro $D = 11.0$ m y largo $L = 107$ m. Estime el porcentaje de la longitud del casco para la cual la capa límite es laminar. Calcule el arrastre de la fricción superficial sobre el casco. Estime la relación aproximada de desaceleración del submarino si toda la potencia de propulsión se retirara repentinamente.

9.87 Considere los datos de la prueba del modelo de barco presentados en las figura 7.1 y 7.2. Calcule

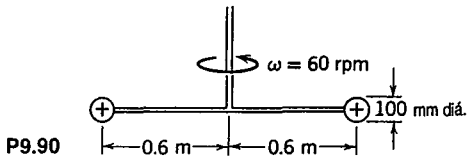
‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

los coeficientes de arrastre de la fricción superficial y las fuerzas correspondientes para el modelo y el prototipo a $Fr = 0.5$. Para el prototipo, $L = 409$ pies y $A = 19{,}500$ pies^2.

9.88 El desplazamiento de un buque tanque es de aproximadamente 600,000 toneladas métricas. Este barco tiene longitud $L = 300$ m, manga (ancho) $b = 80$ m, y calado (profundidad) $D = 25$ m. El barco navega a 14 nudos a través de agua de mar a 4 C. En estas condiciones, estime *a*) el espesor de la capa límite en la popa del barco, *b*) el arrastre total de fricción superficial que actúa sobre el barco, *c*) la potencia requerida para superar la fuerza de arrastre, *d*) la energía cinética contenida en las capas límite sobre el barco y *e*) la distancia mínima requerida para detener el barco.

9.89 Como parte de la celebración del bicentenario de la independencia de los Estados Unidos en 1976, un grupo empresarial colgó una bandera estadounidense gigante (59 m de altura y 112 m de ancho) desde los cables de suspensión del Puente Verrazano. El grupo aparentemente se opuso a hacer hoyos en la bandera para aliviar la fuerza del viento y en consecuencia, tuvieron efectivamente una placa plana normal al flujo. El bocel de la bandera se desprendió de sus montajes cuando la velocidad del viento alcanzó 16 km/hr. Estime la fuerza del viento que actuó sobre la bandera a esta velocidad del viento. ¿A este grupo le debió haber sorprendido la caída de la bandera?

9.90 Una mezcladora rotatoria se construye a partir de dos discos circulares como se muestra. La mezcladora gira a 60 rpm en un gran recipiente que contiene una solución salina (DR = 1.1). Desprecie el arrastre de las barras y el movimiento inducido por el líquido. Estime el momento de torsión mínimo y la potencia requerida para accionar la mezcladora.



P9.90

9.91 La componente vertical de la velocidad de aterrizaje de un paracaídas va a ser menor que 6 m/s. La masa total del paracaídas y el paracaidista es de 120 kg. Determine el diámetro mínimo del paracaídas abierto.

9.92 Datos balísticos obtenidos respecto a un rango de disparo muestran que el arrastre aerodinámico reduce la velocidad de una bala de una magnum 44 de 250 m/s a 210 m/s cuando ésta recorre una distancia horizontal de 150 m. El diámetro y la masa de la bala son 11.2 mm y 15.6 g, respectivamente. Evalúe el coeficiente de arrastre promedio para la bala.

9.93 La resistencia al movimiento de una buena bicicleta sobre pavimento liso casi se debe totalmente al arrastre aerodinámico. Suponga que la masa total del ciclista y la bicicleta es $M = 100$ kg. El área frontal medida a partir de una fotografía es $A = 0.46$ m^2. Los experimentos en una colina, donde la inclinación del camino es 8 por ciento, indican que la velocidad terminal es $V_t = 15$ m/s. De estos datos, el coeficiente de arrastre se estima como $C_A = 1.2$. Verifique este cálculo del coeficiente de arrastre. Estime la distancia necesaria para que la bicicleta y el ciclista desaceleran desde 15 hasta 10 m/s mientras se desplaza cuesta abajo sin pedalear después de alcanzar el camino al nivel.

9.94 Un disco circular está colgado en una corriente de aire de un tirante articulado, como se muestra en la página siguiente. En un experimento de túnel de viento, efectuado en aire a 50 pies/s con un disco de 1 pulg de diámetro, el valor medido de α fue 10°. Para estas condiciones, determine la masa del disco, suponga que el arrastre sobre el tirante y la fricción en el pivote son despreciables y grafique una curva teórica de α como una función de la velocidad del aire.

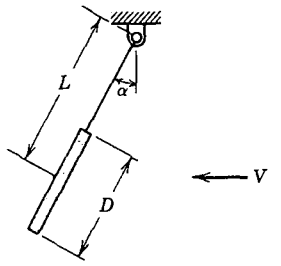
9.95 Se ha propuesto emplear mitades de tambos de 55 galones para construir molinos de viento simples en países en desarrollo (véase figura en la página siguiente). Se muestran dos posibles configuraciones. Estime cuál sería mejor. ¿Por qué y por cuánto? El diámetro y la longitud de un tambor de 55 galones son $D = 24$ pulg y $H = 29$ pulg, respectivamente.

9.96 U
d
d
fi

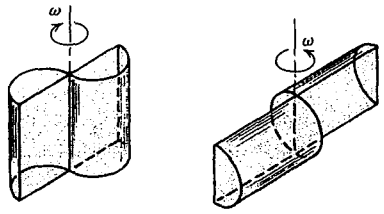
9.97 U
d
r
c
a
l

9.98

9.99



P9.94

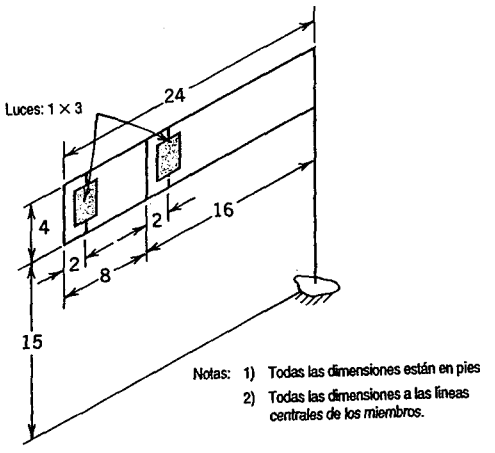


P9.95

9.96 Un simple pero efectivo anemómetro para medir la velocidad del viento puede construirse a partir de una delgada placa articulada para que la mueva el viento. Considere una placa delgada de latón de 20 mm de alto y 10 mm de ancho. Deduzca una relación para la velocidad del viento como una función del ángulo de desviación, θ. ¿Qué espesor del latón debe usarse para dar $\theta = 30°$ a 10 m/s?

9.97 Un atleta de alto nivel puede manejar una bicicleta a 37 km/h sostenidos a máximo esfuerzo en un día tranquilo. (La masa total del ciclista y la bicicleta es $M = 80$ kg. La fuerza de resistencia al rodamiento de las ruedas es $F_R = 4$ N. El coeficiente de arrastre y el área frontal de la bicicleta y el ciclista son $C_A = 1.2$ y $A = 0.25$ m^2.) El atleta ha apostado que puede rodar a una velocidad respecto al suelo de 30 km/hr a través de un viento frontal que sopla a 10 km/hr. Determine la salida de potencia máxima que el atleta puede sostener. Evalúe las posibilidades del atleta de ganar esta apuesta.

9.98 Se muestran los soportes de las luces de semáforo de la ciudad de Detroit. Cada miembro de la estructura de soporte está hecha de tubo cuadrado de acero estirado de 6 pulg × 6 pulg. Calcule las fuerzas y momentos máximos en la base con un viento de 90 mph.



P9.98

9.99 Un avión F-4 se frena después del aterrizaje mediante paracaídas duales desplegados desde la parte posterior. Cada paracaídas es de 12 pies de diámetro. El F-4 pesa 32,000 lbf y aterriza a 160 nudos.

Estime el tiempo y la distancia requerida para desacelerar el avión hasta 100 nudos, suponiendo que no se usan los frenos y el arrastre del avión es despreciable.

9.100 Datos experimentales [14] indican que el área máxima y mínima ($C_A A$) de arrastre para un paracaidista varía de cerca de 0.85 m^2 desde una posición boca abajo de águila extendida hasta 0.11 m^2 para caída vertical. Estime las velocidades terminales en cada posición para un paracaidista de 75 kg. Calcule el tiempo y la distancia necesarios para que el paracaidista alcance 95 por ciento de la velocidad terminal a una altura de 3000 m en un día normal.

9.101 Se construye un vehículo que intentará el récord de velocidad terrestre en Bonneville Salt Flats, a una altura de 4400 pies. El motor entrega 500 hp a las ruedas traseras, y un perfilado aerodinámico cuidadoso ha dado como resultado un coeficiente de arrastre de 0.15 basado en una área frontal de 15 pies^2. Calcule la velocidad terrestre máxima teórica del carro *a*) en aire sin perturbaciones y *b*) con viento frontal de 20 mph.

‡**9.102** A principios de la década de los setenta, un gran auto sedan típico estadounidense tenía una área frontal de 23.4 pies^2 y un coeficiente de arrastre de 0.5. Grafique una curva de los caballos de potencia requeridos para superar el arrastre aerodinámico contra la velocidad de carretera en aire estándar. Si la resistencia al rodamiento es 1.5 por ciento del peso del auto parado (4500 lb), determine la velocidad a la cual la fuerza aerodinámica sobrepasa la resistencia de la fricción. ¿Cuánta potencia se necesita para viajar a 55 mph y a 70 mph sobre un camino nivelado sin viento?

9.103 La caja de un trailer tiene un área frontal $A = 102$ pies^2 y un coeficiente de arrastre $C_A = 0.9$. La resistencia al rodado es de 6 lbf por 1000 lbf de peso del vehículo. El consumo específico de combustible del motor diesel es 0.34 lbm de combustible por caballo de potencia hora, y la eficiencia del tren motriz es de 92 por ciento. La densidad del combustible diesel es 6.9 lbm/gal. Estime la economía de combustible de la caja a 55 mph si el peso total es 72,000 lbf. Un sistema de fuselado de aire reduce el arrastre aerodinámico 15 por ciento. El camión viaja 120,000 millas por año. Calcule el combustible ahorrado anualmente por el fuselaje del techo.

9.104 Según una publicidad, el Porsche 944 tiene las siguientes características: $C_A = 0.35$, $A = 1.83$ m^2 y potencia máxima # = 143 bph. La publicidad señala además que el vehículo requiere 13.9 hp para viajar a 55 mph. Emplee estos datos para estimar *a*) la capacidad de aceleración máxima a 55 mph y *b*) la velocidad tope del auto. Suponga que la resistencia al rodamiento es 1 por ciento del peso del auto.)

9.105 Un automóvil Ford "Probe GT" se maneja a lo largo de una autopista nivelada a 100 km/hr en aire estándar. El área frontal del vehículo es 1.8 m^2 y el coeficiente de arrastre es 0.31. ¿Cuánta potencia se requiere para superar el arrastre aerodinámico? Estime la velocidad máxima del auto si el motor tiene un valor nominal de 145 hp.

9.106 Un delgado disco de radio R se orienta perpendicular a una corriente de fluido. Las distribuciones de presión sobre las superficies frontal y posterior se miden y presentan en la forma de coeficientes de presión. Los datos se modelan con las expresiones siguientes para las superficies frontal y posterior, respectivamente:

$$\text{Superficie frontal} \qquad C_p = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^6$$

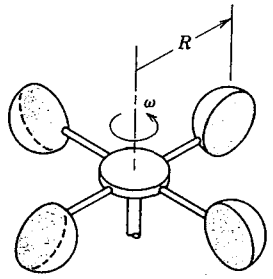
$$\text{Superficie posterior} \qquad C_p = -0.42$$

Calcule el coeficiente de arrastre para el disco.

9.107 Un anemómetro para medir la velocidad del viento está hecho de cuatro copas hemisféricas de 50 mm de diámetro, como se muestra en la página siguiente. El centro de cada copa se coloca a $R = 75$

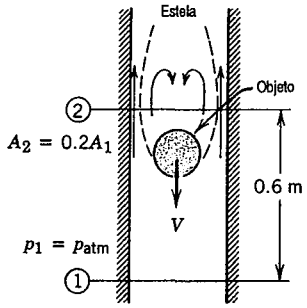
‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

mm del pivote. El anemómetro empezará a girar cuando la velocidad del viento sea mayor que 1 km/hr. Determine la relación entre la velocidad rotacional, ω, y la velocidad del viento, V, si se desprecia la fricción en el pivote. Calcule el momento de torsión friccionante máximo que puede estar presente en el pivote. Estime el error en la medición de la velocidad provocado por el momento de torsión friccionante a una velocidad del viento de 10 km/hr.



P9.107

9.108 Un objeto cae en aire por un largo conducto vertical. La velocidad del objeto, a 3 m/s, es constante. Se muestra el patrón de flujo alrededor del objeto. La presión estática es uniforme a través de las secciones ① y ②; la presión es la atmosférica en la sección ①. El área del flujo efectiva en la sección ② es 20 por ciento del área del conducto. Los efectos friccionantes entre las secciones ① y ② son despreciables. Evalúe la velocidad del flujo relativa al objeto en la sección ② y calcule la presión estática en la misma. Determine la masa del objeto.

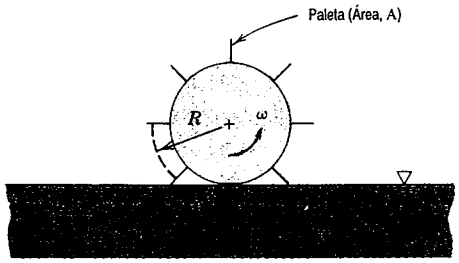


P9.108 $A_1 = 0.09\ m^2$

9.109 Un objeto de masa m, con área de sección transversal igual a la mitad del tamaño del conducto, desciende por un buzón tubular. El movimiento es estable. El área de la estela es $\frac{3}{4}$ el tamaño del conducto en su área máxima. Utilice la suposición de presión constante en la estela. Aplique la continuidad, la ecuación de Bernoulli y las ecuaciones del momento para desarrollar una expresión para la velocidad terminal del objeto en términos de su masa y otras cantidades.

9.110 Una gran rueda de paletas se sumerge en la corriente de un río para generar potencia (véase fig. en la página siguiente). Cada paleta tiene una área A y un coeficiente de arrastre C_A; el centro de cada paleta se localiza a un radio R de la línea central de la rueda de paletas. Suponga que el equivalente de una paleta se sumerge continuamente en la corriente que fluye. Obtenga una expresión para la fuerza de arrastre sobre una sola paleta en términos de variables geométricas, la velocidad de la corriente, V, y la velocidad lineal del centro de la paleta, $U = R\omega$. Desarrolle expresiones para el momento de torsión y la potencia producida por la rueda de paletas. Encuentre la velocidad a la cual la rueda de paletas puede rotar para obtener la máxima salida de potencia en una corriente dada.

9.111 Una probeta de un tubo estático de pitot con diámetro del vástago $d = 6$ mm se sumerge $L = 300$ mm en un flujo de aire de túnel de viento, donde la velocidad uniforme es 25 m/s. Calcule la fuerza de arrastre y el momento de flexión que actúan sobre la probeta.



P9.110

9.112 La antena de banda civil en un automóvil tiene 8 mm de diámetro y 2 m de largo. Estime el momento de torsión que tiende a romperla si el auto se conduce a 125 km/hr en un día normal.

9.113 Considere pequeñas gotas de aceite (DR = 0.85) ascendiendo en agua. Desarrolle una relación para calcular la velocidad terminal de una gota (en m/s) como una función de su diámetro (en mm), suponiendo flujo de Stokes. ¿Para qué rango del diámetro de gota el flujo de Stokes es una suposición razonable?

9.114 Se observa que una partícula de polvo que cae en aire se estabiliza en 2 mm/s. La densidad relativa de la partícula es 4.5. Estime su tamaño.

9.115 Un globo esférico lleno de hidrógeno, de 0.6 m de diámetro, ejerce una fuerza hacia arriba de 1.3 N sobre una cuerda de sujeción, cuando se mantiene estacionario en aire estándar sin viento. Con una velocidad del viento de 3 m/s, la cuerda que sostiene el globo forma un ángulo de 60° con la horizontal. Calcule el coeficiente de arrastre del globo bajo estas condiciones, despreciando el peso de la cuerda.

9.116 Un avión antiguo transporta 60 m de tirantes externos tensados normales según la dirección del movimiento. El diámetro del tirante es 6 mm. Basando los cálculos en flujo bidimensional alrededor de los tirantes, ¿qué ahorro de potencia puede conseguirse removiendo los tirantes si la velocidad es de 150 km/hr en aire estándar a nivel del mar?

9.117 Una bola de hockey tiene un diámetro $D = 73$ mm y masa $m = 160$ g. Cuando se golpea bien, abandona el palo con una velocidad inicial $U_0 = 50$ m/s. La bola es esencialmente lisa. Estime la distancia recorrida en vuelo horizontal antes de que el arrastre aerodinámico reduzca la velocidad de la bola 10 por ciento.

9.118 Calcule la velocidad terminal de granizo de 10 mm (supóngalo esférico) en aire estándar.

9.119 Calcule la velocidad terminal de una gota de lluvia de $\frac{1}{8}$ pulg (supóngala esférica) en aire estándar.

9.120 Determine la velocidad terminal de una bola de tenis lisa en aire tranquilo. Su peso es 2 onzas y su diámetro 2.5 pulg.

9.121 Un avión ligero remolca un anuncio sobre un estadio de fútbol la tarde de un sábado. El anuncio tiene 1 m de altura y 12 m de largo. De acuerdo con Hoerner [14], el coeficiente de arrastre basado en el área (Lh) de tal anuncio es aproximado por medio de $C_A = 0.05\ L/h$, donde L es la longitud del anuncio y h su altura. Estime la potencia para el anuncio a $V = 90$ km/hr. Compare con el arrastre de una placa plana rígida. ¿Por qué el arrastre es más largo para el anuncio?

9.122 Una pelota de tenis con masa de 57 g y diámetro de 64 mm se deja caer en aire estándar al nivel del mar. Calcule la velocidad terminal de la pelota. Estime el tiempo y la distancia requeridos para que la pelota alcance 95 por ciento de su velocidad terminal.

9.123 Se observa la caída de una pequeña esfera ($D = 6$ mm) a través de aceite de ricino a una velocidad terminal de 60 mm/s. La temperatura es 20 C. Calcule el coeficiente de arrastre para la esfera y determine su densidad. Si descendiera en agua, ¿la esfera caería más despacio o más rápido? ¿Por qué?

9.124 En el proceso de impresión con tinta de chorro, pequeñas gotas esféricas de tinta (DR = 1.2) se rocían desde una tobera. Cada gota está cargada eléctricamente, y su trayectoria se controla mediante un campo eléctrico. El diámetro de una gota típica es $D = 60\ \mu$m y su velocidad inicial es $V_0 = 17.5$

m/s. El coeficiente de arrastre para una sola gota esférica en este rango de velocidad se aproxima por medio de

$$C_A \approx \frac{10.4}{\sqrt{Re_A}}$$

Considere una sola gota esférica de tinta que se mueve horizontalmente en aire no perturbado de otro modo. Evalúe la velocidad de la gota cuando alcanza el papel, localizado en $L = 30$ mm de la tobera.

9.125 El siguiente ajuste de curva para el coeficiente de arrastre de una esfera lisa como una función del número de Reynolds ha sido propuesto por Chow [33]:

$$\begin{aligned} C_A &= 24/Re && Re \leq 1 \\ C_A &= 24/Re^{0.646} && 1 < Re \leq 400 \\ C_A &= 0.5 && 400 < Re \leq 3\times 10^5 \\ C_A &= 0.000366\ Re^{0.4275} && 3\times 10^5 < Re \leq 2\times 10^6 \\ C_A &= 0.18 && Re > 2\times 10^6 \end{aligned}$$

Emplee los datos de la figura 9.11 para estimar la magnitud y localización del error máximo entre el ajuste de la curva y los datos.

9.126 El problema 9.94 mostró un disco circular colgado de un tirante cilíndrico en una corriente de aire. Suponga que el codal tiene una longitud $L = 40$ mm y diámetro $d = 3$ mm. Resuelva el problema 9.94 incluyendo el efecto del arrastre sobre el soporte. Suponga que los coeficientes de arrastre para el cilindro y el disco se aplican cuando se usa la componente de la velocidad del viento perpendicular al objeto.

9.127 Una torre de suministro de agua consta de una esfera de 12 m de diámetro sobre la parte superior de una torre vertical de 30 m de alto. Estime el momento de flexión ejercido sobre la base de la torre debido a la fuerza aerodinámica impuesta por un viento de 100 km/hr en un día normal. Ignore la interferencia en la unión entre la esfera y la torre.

9.128 Un globo aerostático esférico contiene helio y asciende a través de aire estándar. La masa del globo y su carga es de 150 kg. Determine el diámetro requerido si va a ascender a 3 m/s.

9.129 Una bola de cañón de "12 libras" de hierro fundido rueda fuera de la cubierta de un barco y cae al océano en una posición donde la profundidad es 1000 m. Estime el tiempo que transcurre antes de que la bola de cañón golpee el fondo del mar.

9.130 Considere un poste de bandera cilíndrico de altura H. Para un coeficiente de arrastre constante, evalúe la fuerza de arrastre y el momento de flexión sobre el poste si la velocidad del viento varía como $u/U = (y/H)^{1/7}$, donde y es la distancia medida desde el suelo. Compare con el arrastre y el momento para un perfil de viento uniforme con velocidad constante U.

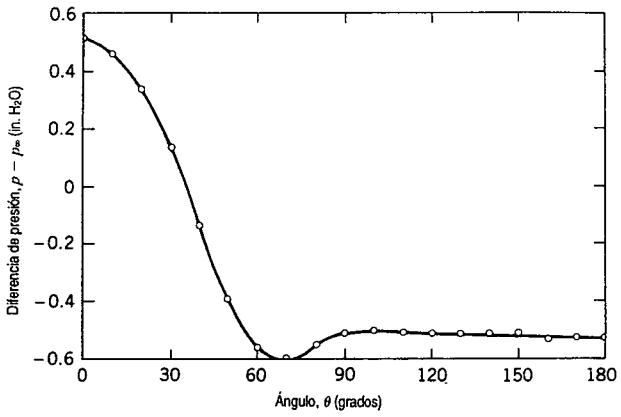
9.131 La ley de arrastre de Stokes para esferas lisas se va a verificar experimentalmente dejando caer cojinetes de bola de acero en glicerina. Evalúe la bola de acero de diámetro mayor para la cual $Re < 1$ a la velocidad terminal. Calcule la altura de la columna de glicerina necesaria para que un cojinete alcance 95 por ciento de la velocidad terminal.

9.132 Con frecuencia se utilizan burbujas de hidrógeno como marcadores para la visualización de flujo. Considere burbujas con diámetros de 0.01 a 0.1 mm. Estime sus velocidades terminales en agua. (Asegúrese de considerar el efecto de la tensión superficial en la presión del hidrógeno dentro de la burbuja.)

‡**9.133** La gráfica de la página siguiente muestra la diferencia de presión contra el ángulo medido para el

‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

flujo de aire alrededor de un cilindro circular, a $Re = 80\,000$. Emplee estos datos para estimar C_A en este flujo. Compare con los datos de la figura 9.13. ¿Cómo puede usted explicar la diferencia?



P9.133

9.134 Una esfera de plástico de paredes delgadas de 10 mm de diámetro y masa de 0.05 g, sumergida en un baño de glicerina a una profundidad de 1 m, se suelta y empieza a ascender hacia la superficie. Calcule el tiempo requerido para que la esfera alcance la superficie.

9.135 Una gota de lluvia que cae se comporta esencialmente como una esfera que se mueve a través de un medio infinito. Obtenga una relación algebraica para la velocidad terminal de una gota de agua para un coeficiente de arrastre constante de 0.5. Evalúe numéricamente para obtener la forma

$$V(\text{m/s}) = K\sqrt{D\ (\text{mm})}$$

donde K es una constante dimensional y D es el diámetro de la gota. ¿Para qué rango de diámetros de la gota usted esperaría que esta ecuación *a*) sobrepredeciría o *b*) subpredeciría la velocidad de la gota?

‡**9.136** Ascienden burbujas de aire provenientes del regulador de un buzo que nada a una profundidad de 10 m en agua de mar. Considere una burbuja de 10 mm de diámetro a esta profundidad. Evalúe la velocidad terminal de esta burbuja como una función de la profundidad. Estime el tiempo necesario para que la burbuja ascienda hasta la superficie. Emplee integración numérica o gráfica si es necesario.

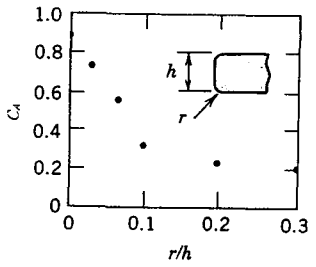
9.137 Las pruebas de costa, efectuadas sobre una carretera plana un día tranquilo, se emplean para medir los coeficientes de arrastre aerodinámico y de resistencia al rodamiento para un vehículo a escala natural. La resistencia al rodamiento se estima a partir de dV/dt medida a baja velocidad, donde el arrastre aerodinámico es pequeño. La resistencia al rodamiento se deduce luego de dV/dt medida a alta velocidad para determinar el arrastre aerodinámico. Los siguientes datos se obtuvieron durante una prueba con un vehículo de peso $W = 25{,}000$ lbf y área frontal $A = 79$ pies^2:

V(mph)	5	55
$\frac{dV}{dt}\left(\frac{\text{mph}}{\text{s}}\right)$	−0.150	−0.475

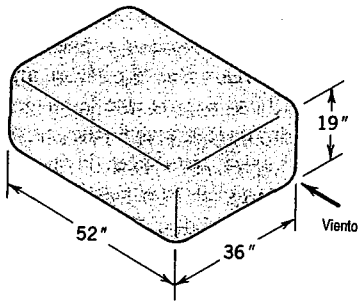
‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

Evalúe el coeficiente de arrastre aerodinámico para este vehículo.

9.138 Se muestran las dimensiones aproximadas de un vehículo rentado de transporte con tejados. Estime la fuerza de arrastre en el vehículo ($r = 4$ pulg) a 65 mph. Si la eficiencia de su transmisión es 0.85 y el consumo de combustible específico de frenado de su motor es 0.46 lbm/hp · hr, estime la relación adicional de consumo de combustible debida al vehículo. Calcule el efecto sobre la economía de combustible si el auto alcanza 30 mpg sin el transportador.



Coeficiente de arrastre contra relación de radios [34]



P9.138

‡**9.139** El movimiento de un pequeño cohete se analizó en el problema ejemplo 4.12 suponiendo despreciable el arrastre aerodinámico. Esto no fue realista en la velocidad final calculada de 369 m/s. Escriba un programa de computadora o de calculadora sencillo para evaluar la velocidad del cohete como una función del tiempo, suponiendo $C_A = 0.3$ y un diámetro del cohete de 700 mm. Compare con los resultados del problema ejemplo 4.12.

9.140 Los cables de los tirantes en el avión antiguo del problema 9.116 se van a hacer aerodinámicos en lugar de quitarse. Emplee los datos de la figura 9.14 para seleccionar una forma fuselada óptima para los tirantes. Evalúe el máximo ahorro de potencia que resulta de fuselar los cables.

9.141 La bicicleta del problema 9.97 está equipada con fuselaje para reducir el arrastre aerodinámico. El fuselaje reduce C_A hasta 0.90 pero aumenta el área frontal hasta 0.30 m^2. Estime la velocidad en la parte superior del ciclista en aire tranquilo con el fuselaje instalado.

9.142 Un avión está en un vuelo horizontal a 250 km/hr a través de aire en condiciones estándar. El coeficiente de sustentación a esta velocidad es 0.4 y el coeficiente de arrastre es 0.065. La masa del avión es 850 kg. Calcule el área de sustentación efectiva de la aeronave.

9.143 Un aeroplano con una área de sustentación efectiva de 25 m^2 se equipa con perfiles aerodinámicos

‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

de sección NACA 23012 (figura 9.23). La máxima instalación de alerones que puede emplearse en el despegue corresponde a la configuración ② en la figura 9.23. Determine la máxima masa bruta posible para el aeroplano si su velocidad de despegue es 150 km/hr (desprecie la sustentación añadida debida al efecto del suelo).

9.144 Considere una cometa de 0.2 kg de masa como una placa plana, con una área de 1 m^2, que se vuela en aire estándar que se mueve horizontalmente a 10 m/s. La cometa forma un ángulo de 5° con la horizontal. Suponga que el coeficiente de sustentación está dado por la ecuación $C_S = 2\pi \text{sen}\alpha$, donde α es el ángulo de ataque, y la relación sustentación-arrastre es 4.0. Si la cuerda forma un ángulo θ con la horizontal, determine θ y la tensión en la cuerda.

9.145 Una placa plana, $L = 3$ pies de largo y $b = 4$ pies de ancho, se mueve a través de aire tranquilo a un ángulo de ataque de 12 grados y 44.5 pies/s. A este ángulo de ataque, los coeficientes de sustentación y arrastre para una placa con esta proporción dimensional son $C_S = 0.72$ y $C_A = 0.17$, con base en el área de la placa. Evalúe el vector de fuerza resultante que actúa sobre la placa. Determine la potencia requerida para impulsar la placa a esta velocidad.

9.146 Las hojas de una nave marina hidrodinámica de superficie penetrante tienen una área efectiva total de 0.7 m^2. Sus coeficientes de sustentación y arrastre son 1.6 y 0.5, respectivamente. La masa total de la nave en condición de funcionamiento es de 1800 kg. Determine la velocidad mínima a la cual la nave es soportada por los perfiles hidrodinámicos. A esta velocidad, encuentre la potencia requerida para superar la resistencia del agua. Si la nave está equipada con un motor de 110 kW, estime su velocidad máxima.

9.147 Un ligero aeroplano, con masa $M = 2000$ lbm, tiene un área de ala $A = 100$ $pies^2$. Su velocidad máxima en vuelo horizontal es $V_{máx} = 180$ mph. El aeroplano puede emplearse con seguridad para maniobras acrobáticas siempre que la máxima aceleración vertical sea menor que $5g$. El perfil aerodinámico utilizado para la nave tiene una sección NACA 23015. ¿Es posible para el piloto superar una aceleración vertical instantánea de $5g$ con este avión, a partir de vuelo horizontal? (En vuelo horizontal, el piloto y el avión se consideran sujetos a $1g$.)

9.148 El avión de combate F-16 de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos tiene un área de ala de avión $A = 27.9$ m^2; puede alcanzar un coeficiente de sustentación máximo de $C_S = 1.6$. Cuando está totalmente cargado su masa es $M = 11{,}600$ kg. El armazón es capaz de efectuar maniobras que producen aceleraciones verticales de $9g$. Sin embargo, los pilotos estudiantes están restringidos a maniobras de $5g$ durante el adiestramiento. Considere un giro en vuelo horizontal con el avión inclinado. Encuentre la velocidad mínima en aire estándar a la cual el piloto puede producir una aceleración total de $5g$. Calcule el radio de vuelo correspondiente. Analice el efecto de la altitud en estos resultados.

9.149 Un avión ligero tiene una envergadura efectiva de 10 m y una cuerda de 1.8 m. Se diseñó originalmente para usar una sección de perfil aerodinámico convencional (NACA 23015). Con este perfil aerodinámico, su velocidad de crucero en un día normal cerca del nivel del mar es 225 km/hr. Se propone una conversión a un perfil aerodinámico de sección de flujo laminar (NACA 66_2-215). Determine la velocidad de crucero que podría alcanzarse con una nueva sección de perfil aerodinámico para la misma potencia.

9.150 Suponga que el avión Boeing 727 tiene alas con sección NACA 23012, área de ala de avión de 1600 $pies^2$, alerones de doble tobera divergente y una proporción dimensional efectiva de 6.5. Si el avión vuela a 150 nudos en aire estándar con 175,000 lb de peso total, estime el empuje requerido para mantener el vuelo horizontal.

9.151 Un avión, con masa de 4,500 kg, está volando a elevación y velocidad constantes en una trayectoria circular a 250 km/hr. El círculo de vuelo tiene un radio de 1000 m. El avión tiene una área de sustentación de 22 m^2 y está equipado con perfiles aerodinámicos de sección 23015 con relación dimensional efectiva de 7. Determine el arrastre sobre el avión y la potencia requerida.

9.152

9.153

9.154

9.155

9.156

9.15

9.1

9.1

9.

9

9.152 En la década de los sesenta, los autos de carreras Chaparral 2F de Jim Hall fueron los primeros que usaron perfiles aerodinámicos montados sobre la suspensión trasera para incrementar la estabilidad y mejorar el funcionamiento en el frenado. El perfil aerodinámico era efectivamente de 6 pies de ancho (envergadura) y tenía una cuerda de 1 pie. Su ángulo de ataque variaba entre 0 y menos 12 grados. Suponga que los datos de coeficientes de sustentación y arrastre son dados por las curvas (para la sección convencional) de la figura 9.17. Considere una velocidad del auto de 120 mph en un día tranquilo. Para una desviación del perfil aerodinámico de 12° hacia abajo, calcule *a*) la máxima fuerza hacia abajo y *b*) el máximo incremento en la fuerza de desaceleración producida por el perfil aerodinámico.

9.153 El ángulo de planeo para un vuelo sin motores es tal que la sustentación, el arrastre y el peso se encuentran en equilibrio. Muestre que el ángulo de la pendiente de planeo, θ, es tal que $\tan\theta = C_A/C_S$. La pendiente mínima de planeo ocurre a la velocidad en la que C_S/C_A es un máximo. Para las condiciones del problema ejemplo 9.8, evalúe el ángulo mínimo para el Boeing 727-200. ¿Qué tan lejos podría planear este avión desde una altura inicial de 10 km en un día normal?

9.154 En el problema ejemplo 9.8 se considera el funcionamiento de un avión jet. Muestre analíticamente que, a la velocidad de crucero óptima, $C_{A,i} = \frac{1}{3} C_{A,0}$.

9.155 En el problema ejemplo 9.8 se considera el funcionamiento de un avión jet. Muestre analíticamente que, a la velocidad de resistencia máxima, $C_{A,i} = C_{A,0}$.

9.156 La carga del ala del Gossamer Condor es 0.4 lbf/pie^2 del área del ala. Mediciones aproximadas mostraron que el arrastre fue de aproximadamente 6 lbf a 12 mph. El peso total del condor era 200 lbf. La proporción dimensional efectiva del Condor es 17. Estime la potencia mínima requerida para volar el avión. Compare con los 0.39 hp que el piloto Brian Allen podía sostener durante 2 horas.

9.157 El aire que se mueve sobre un automóvil se acelera a velocidades más altas que la velocidad de recorrido, como se muestra en la figura 9.25. Esto ocasiona cambios en la presión interior cuando se abren o cierran las ventanas. Emplee los datos de la figura 9.25 para estimar la reducción de presión cuando una ventana se abre ligeramente a una velocidad de 100 km/hr. ¿Cuál es la velocidad del aire en la corriente libre cerca de la abertura de la ventana?

9.158 Un experimento en clase mostró que la sustentación está presente cuando un cilindro rota en una corriente de aire. Una cuerda enrollada alrededor de un cilindro de papel y de la cual se tira, provoca que el cilindro gire y se mueva hacia adelante simultáneamente. Suponga que a un cilindro de 2 pulg de diámetro y 10 pulg de largo se le da una velocidad rotacional de 300 rpm y una velocidad hacia adelante de 4 pies/s. Estime la fuerza de sustentación aproximada que actúa sobre el cilindro.

9.159 En 1924, el ingeniero alemán Flettner propuso cilindros rotatorios como un medio de propulsión de barcos. El barco de rotor original de Flettner tenía dos rotores, cada uno de aproximadamente 3 m de diámetro y 15 m de altura, que rotaban hasta 750 rpm. Calcule la sustentación máxima y las fuerzas de arrastre que actúan sobre cada rotor en un viento de 50 km/hr. Compare la fuerza total con la producida en el valor S/A óptimo a la misma velocidad del viento. Estime la potencia necesaria para hacer girar el rotor a 750 rpm.

9.160 Una bola de golf (diámetro $D = 43$ mm) con hoyuelos circulares se golpea desde una trampa de arena a 20 m/s, con giro hacia atrás de 2000 rpm. La masa de la bola es de 48 g. Evalúe las fuerzas de sustentación y de arrastre que actúan sobre la bola. Exprese sus resultados como fracciones de la fuerza másica debida a la gravedad que actúa sobre la bola.

9.161 Las bolas de golf estadounidenses e inglesas tienen diámetros ligeramente diferentes pero la misma masa (véanse los problemas 1.32 y 1.33). Suponga que un golfista profesional golpea cada tipo de bola desde un tee a 85 m/s, con giro hacia atrás de 9000 rpm. Evalúe las fuerzas de sustentación y arrastre sobre cada bola. Exprese sus respuestas como fracciones de la fuerza másica sobre cada bola. Estime el radio de curvatura de la trayectoria de cada bola. ¿Cuál bola tiene el rango más largo para estas condiciones?

9.162 Un lanzador de béisbol lanza una bola a 90 km/hr. El plato del home está a 18 m de distancia desde el montículo del lanzador. ¿Qué giro debe aplicarse a la bola para una desviación máxima horizontal desde una trayectoria recta? (Una bola de béisbol tiene $m = 145$ g y $D = 74$ mm.) ¿Qué tanto se desviará la bola de la línea recta?

de distancia desde
máxima horizontal
ım.) ¿Qué tanto se

Capítulo 10

Flujo en canales abiertos

Muchos flujos en la naturaleza ocurren con una *superficie libre.* Debido a que los flujos de superficie libre difieren en varios aspectos importantes de los flujos en conductos cerrados, se van a tratar por separado en este capítulo. Los escurrimientos de agua de lluvia y los flujos en ríos, acueductos, canales de irrigación y zanjas de drenaje son ejemplos familiares en los que la superficie libre se encuentra a la presión atmosférica. Las propiedades geométricas de las formas comunes de canal abierto se presentan en la sección 10-1.

Pueden formarse ondas superficiales en flujos con una superficie libre. La velocidad de propagación de una onda aislada es análoga en muchos aspectos a la propagación de una onda sonora en un medio fluido compresible. La velocidad de propagación de una perturbación en un flujo en canal abierto depende del número de Froude del flujo (sección 10-2). Los cambios en la sección transversal o la profundidad del canal, así como sus efectos en la velocidad media del flujo, son también característica distintivas de los flujos de superficie libre.

En contraste con el flujo en un conducto cerrado, donde el flujo se mantiene por una diferencia de presión, la fuerza accionadora para el flujo en canal abierto es la gravedad. A la fuerza de la gravedad se opone una fuerza de fricción sobre las fronteras sólidas del canal.

La mayor parte de los flujos de interés son grandes en la escala física, por lo que los números de Reynolds son por lo general elevados. En consecuencia, el flujo en canal abierto rara vez es laminar. Como en el caso de flujo turbulento en tuberías, debemos confiar en correlaciones empíricas para relacionar los efectos friccionantes con la velocidad promedio del flujo. La correlación empírica se incluye por medio de un término de pérdida de carga en la ecuación de energía (sección 10-3). Las complicaciones adicionales en muchos casos prácticos comprenden la presencia de sedimentos, u otra materia corpuscular en el flujo, y la erosión de canales o estructuras térreos por la acción del agua.

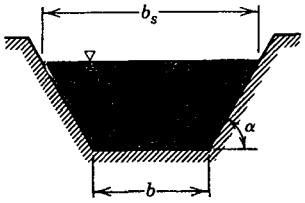
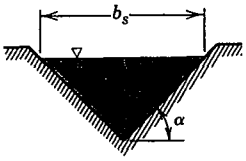
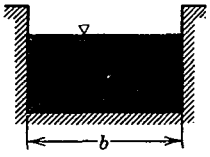
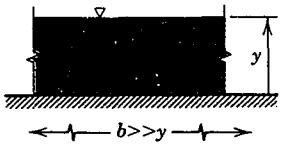
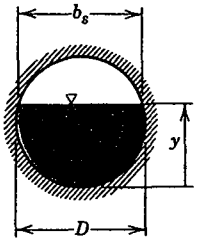
En este capítulo analizamos varios aspectos del flujo estable en canal abierto, empleando las ecuaciones básicas del volumen de control del capítulo 4. En la sección 10-4 consideramos flujos en los cuales los efectos del cambio de área predominan y las fuerzas de fricción pueden ignorarse. Cuando la sección transversal del flujo no varía en la dirección del flujo, se dice que el flujo está a profundidad normal o uniforme (sección 10-5). En flujo a profundidad normal, la superficie líquida es paralela al lecho del canal. Esto es análogo al flujo completamente desarrollado en una tubería. Cuando la profundidad del líquido no es constante, hemos variado el flujo. En la sección 10-6 consideraremos flujo variado gradualmente. El principal objetivo en el análisis del flujo variado gradualmente es predecir la forma de la superficie libre. Cuando las condiciones requieren

que la profundidad del flujo cambie abruptamente, ello se logra mediante un salto hidráulico (sección 10-7). El capítulo concluye con un breve análisis de las técnicas de medición de flujo que se emplean en canales abiertos (sección 10-8).

10-1 CARACTERÍSTICAS DE LOS CANALES ABIERTOS

Cualquier conducto con una superficie libre líquida se clasifica como un canal abierto; son abundantes los ejemplos de este tipo de canales. A los canales construidos por el hombre se les han dado muchos nombres diferentes, entre ellos, canal, acequia o alcantarilla; éstos se definen y

Tabla 10.1 Propiedades geométricas de formas comunes de canales abiertos

Forma	Sección	Área de flujo, A	Perímetro mojado, P	Radio hidráulico, R_h
Trapezoidal		$y(b + y\cot\alpha)$	$b + \dfrac{2y}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\dfrac{y(b + y\cot\alpha)}{b + \dfrac{2y}{\operatorname{sen}\alpha}}$
Triangular		$y^2\cot\alpha$	$\dfrac{2y}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\dfrac{y\cos\alpha}{2}$
Rectangular		by	$b + 2y$	$\dfrac{by}{b + 2y}$
Plano ancho		by	b	y
Circular		$(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)\dfrac{D^2}{8}$	$\dfrac{\alpha D}{2}$	$\dfrac{D}{4}\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)$

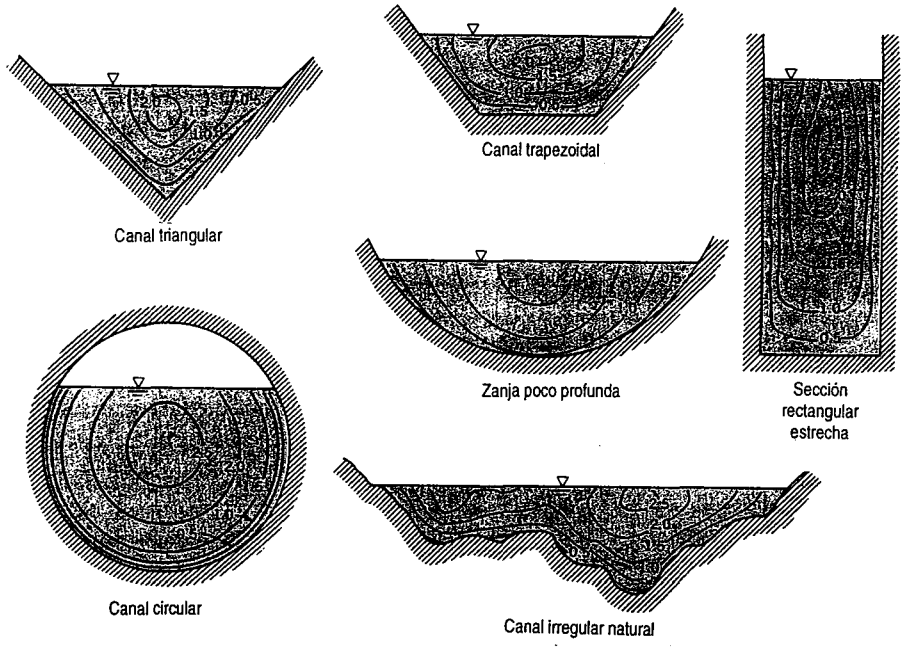


Fig. 10.1 Contornos típicos de igual velocidad en secciones de canal abierto. (De [1], empleados con autorización).

aplican con bastante libertad. Un *canal* suele excavarse por debajo del nivel del suelo, y puede ser o no revestido. Los canales por lo general son largos y de pendiente muy moderada; se emplean para conducir agua de irrigación o de tormentas, o para la navegación. Una *acequia* suele construirse sobre el nivel del suelo para conducir agua a través de una depresión. Una *alcantarilla* —que suele diseñarse para que el flujo la llene parcialmente— es un canal corto cubierto utilizado para drenar agua bajo una autopista o el terraplén de vías férreas.

Los canales pueden construirse con diversas formas de la sección transversal; suelen utilizarse formas geométricas regulares. Un canal con pendiente y sección transversal constantes recibe el nombre de *prismático*. Los canales revestidos a menudo se construyen con secciones rectangulares o trapezoidales; los canales o zanjas más pequeñas algunas veces son triangulares. Las alcantarillas y los túneles por lo general son de sección circular o elíptica. Los canales naturales son altamente irregulares y no prismáticos, aunque con frecuencia se aproximan por medio de secciones trapezoidales o paraboidales. Las propiedades geométricas de las formas comunes de los canales abiertos se resumen en la tabla 10.1. La profundidad del flujo, y, es la distancia perpendicular medida desde la plantilla del canal hasta la superficie libre. El área de flujo, A, es la sección transversal del flujo perpendicular a la dirección del mismo. El perímetro mojado, P, es la longitud de la superficie del canal sólido en contacto con el líquido. El radio hidráulico, R_h, se define como

$$R_h = \frac{A}{P} \tag{10.1}$$

Observe que, para flujo en conductos cerrados no circulares (sección 8-7.3), el diámetro hidráulico se definió como

$$D_h = 4\frac{A}{P} \tag{8.43}$$

Por tanto, para una tubería circular, el diámetro hidráulico, de acuerdo con la ecuación 8.43, es igual al diámetro de la tubería. De la ecuación 10.1, el radio hidráulico es la mitad del radio de la tubería. El radio hidráulico, según se define en la ecuación 10.1, se emplea comúnmente en el análisis de flujos en canal abierto, por lo que se utilizará a lo largo de este capítulo.

Para canales no rectangulares, la *profundidad hidráulica* se define como $y_h = A/b_s$, donde b_s es el ancho de la superficie. La profundidad hidráulica representa la profundidad promedio del canal en cualquier sección transversal y corresponde a la profundidad de un canal rectangular equivalente.

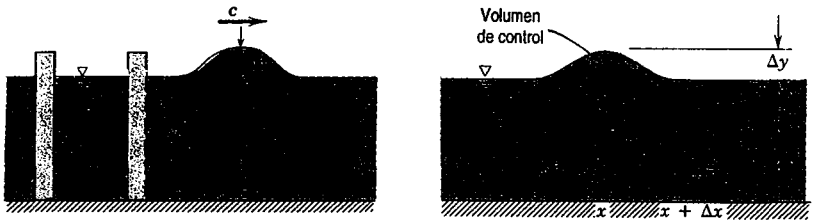
Los contornos típicos de velocidad de tubo de corriente para varias secciones de canal abierto se muestran en la figura 10.1. A pesar de que los perfiles no son uniformes, el enfoque que se sigue es suponer flujo uniforme en una sección. El coeficiente de energía cinética, α, se toma como la unidad.

Observe de la figura 10.1 que la velocidad máxima medida ocurre debajo de la superficie libre. Como hay un esfuerzo de corte despreciable debido al arrastre del aire, uno esperaría que la velocidad máxima ocurriera en la superficie libre. Los flujos secundarios son responsables de la distorsión del perfil de velocidad axial.[1]

El perfil no uniforme de velocidad axial ocasiona intensos flujos secundarios en la base de una obstrucción, tal como el pilar de un puente. La posición de la velocidad máxima está bastante arriba del piso del canal; la elevada presión de estancamiento en esta posición provoca que se forme una zona de recirculación en la base frente a la obstrucción. Cuando este flujo turbulento se mueve alrededor de los lados de la obstrucción, forma un vórtice de herradura. El núcleo del vórtice se alarga y las velocidades de la turbulencia se incrementan a lo largo de los lados de la obstrucción.[2] Las altas velocidades presentes en el vórtice pueden erosionar seriamente el fondo de un canal natural a lo largo de los lados de un pilar.

10-2 PROPAGACIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES

Considere un canal abierto con una pared móvil en uno de sus extremos; el canal contiene un líquido inicialmente en reposo. Si a la pared en el extremo se le desplaza repentinamente, como en la figura 10.2*a*, se forma una pequeña onda que viaja por el canal de ancho b. La velocidad de propagación de la onda, la *celeridad* de la onda, se denota con la letra c.



a) Onda propagándose

b) Volumen de control inercial que se mueve con celeridad de onda, c

Fig. 10.2 Generación de una pequeña onda aislada en líquido tranquilo.

[1] La película de la NCFMF, *Secondary Flow*, E. S. Taylor, director, ilustra varios ejemplos de fenómenos de flujos secundarios.

[2] La formación y alargamiento de vórtices se muestran en la película de la NCFMF, *Vorticity*, A. H. Shapiro, director.

10-2.1 Velocidad de onda

La velocidad de onda puede calcularse aplicando las ecuaciones básicas. Según la ve un observador fijo, la propagación de la onda es inestable. Sin embargo, el flujo aparece estable para un observador *en* un volumen de control que se mueve con la onda, figura 10.2*b*.

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en una sección
3) Incompresible, ρ = constante

Por tanto,

$$0 = \{+|\rho b(y + \Delta y)(c - \Delta V)|\} + \{-|\rho b y c|\} \tag{10.2a}$$

$$0 = yc - y\,\Delta V + c\,\Delta y - \Delta y\,\Delta V - yc$$

Resolviendo para ΔV,

$$\Delta V = c\frac{\Delta y}{y + \Delta y} \tag{10.2b}$$

b. Ecuación del momento

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \overbrace{F_{B_x}}^{=0(6)} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposiciones:
4) Variación de presión hidrostática (esto será exactamente válido si los efectos de la curvatura de la línea de corriente son despreciables, esto es, para Δy pequeña), de modo que

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g$$

5) No hay efectos viscosos o de tensión superficial
6) $F_{B_x} = 0$

En la ausencia de efectos viscosos y de tensión superficial, F_{S_x} se deberá sólo a fuerzas de la presión. Puesto que la variación de la presión es hidrostática en ambas caras verticales del volumen de control,

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \quad \text{y} \quad p = \rho g(y_s - y)$$

donde y_s es la distancia a la superficie libre. La magnitud de la fuerza de presión es

$$F_{S_x} = \int p\,dA = \int_0^{y_s} pb\,dy = \int_0^{y_s} \rho g(y_s - y)b\,dy$$

$$F_{S_x} = \rho g b\left[y y_s - \frac{y^2}{2}\right]_0^{y_s} = \frac{\rho g b y_s^2}{2}$$

Por tanto,

$$F_{S_x}]_{x+\Delta x} = -\frac{\rho g b}{2} y^2$$

y

$$F_{S_x}]_x = \frac{\rho g b}{2}(y + \Delta y)^2$$

Al sustituir las fuerzas de presión en la ecuación del momento, obtenemos

$$\frac{\rho g b}{2}(y + \Delta y)^2 - \frac{\rho g b}{2} y^2 = -|c - \Delta V|\{+|\rho b(y + \Delta y)(c - \Delta V)|\} - |c|\{-|\rho b y c|\}$$

Los dos términos { } en esta ecuación son iguales por continuidad (ecuación 10.2a), por lo que la ecuación del momento se reduce a

$$g y\,\Delta y + g\frac{(\Delta y)^2}{2} = \Delta V y c$$

o

$$g\left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right)\Delta y = \Delta V c \tag{10.3}$$

Combinando las ecuaciones 10.2b y 10.3, obtenemos

$$c^2 = g\left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right)(y + \Delta y)$$

o

$$c^2 = g y\left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right)\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) \tag{10.4}$$

En nuestro desarrollo de la ecuación 10.4, supusimos variación de presión hidrostática en el líquido. Un estudio cuidadoso de los detalles de los movimientos de la onda [2] indica que ésta es una buena suposición, siempre que la longitud de onda, λ, sea larga comparada con la profundidad del líquido. Tales ondas se llaman *ondas someras en el agua.*

De tal modo, para el caso $\Delta y << y$, habrá una variación despreciable en la velocidad de propagación a través de la onda, y nuestra suposición de variación de presión hidrostática será razonable. Podemos usar

$$c = \pm\sqrt{gy} \tag{10.5}$$

para representar la velocidad de tales ondas.

La celeridad, c, depende de la profundidad local, y. En consecuencia, c será más grande en el pico de la onda que en el frente delantero o trasero. De tal modo, las ondas reales de amplitud finita se vuelven más pronunciadas a medida que viajan. Esto provoca el "rompimiento" de olas en una playa.[3]

[3] Estos y otros fenómenos de ondas superficiales se ilustran en la película de la NCFMF, *Waves in Fluids*, A. E. Bryson, director.

es

EJEMPLO 10.1 Velocidad de propagación de una onda en una superficie libre aislada

Calcule y grafique la velocidad de propagación de ondas aisladas para profundidades de 10 mm a 10 km. Comente acerca de la importancia de la velocidad de propagación para la profundidad oceánica promedio de 4 km [3].

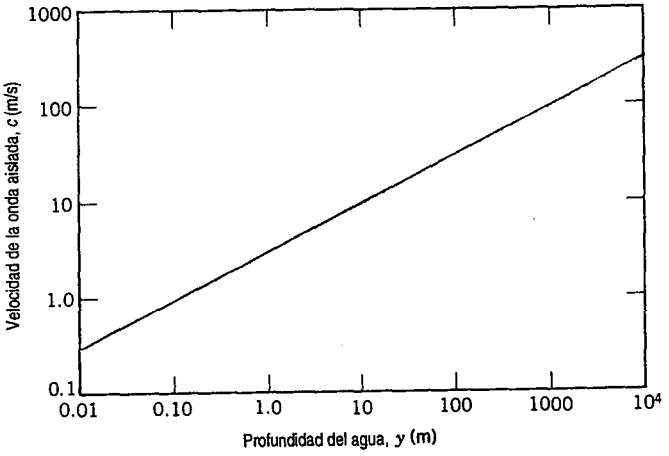
PROBLEMA EJEMPLO 10.1

DATOS: La propagación de una onda aislada.

ENCUENTRE: Evalúe y grafique la velocidad de propagación para profundidades de 10 mm a 10 km. Comente acerca de la velocidad para una profundidad oceánica promedio de 4 km.

SOLUCIÓN:
De la ecuación 10.5, $c = \pm\sqrt{gy}$, donde y es la profundidad del agua. La ecuación se graficará como una línea recta en coordenadas log-log. En $y = 4$ km,

$$c = \sqrt{gy} = \left[9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 4 \text{ km} \times 10\,000 \frac{\text{m}}{\text{km}} \right]^{1/2} = 197 \text{ m/s}$$



A la profundidad oceánica promedio de 4 km, la velocidad de la onda es 198 m/s (713 km/hr). Las marejadas (*tsunamis*) generadas por terremotos submarinos se propagan rápidamente; este fenómeno puede causar tremendos daños cerca de una costa [4, 5].

10-2.2 El número de Froude

La mayor parte de los fenómenos de interés ocurren en corrientes en movimiento. El análisis de la sección 10-2.1 se aplicaría igualmente bien a una pequeña onda que se propagara sobre la superficie de una corriente moviéndose con velocidad V. La velocidad de la onda vista por un observador fijo sería

$$V_w = V \pm c = V \pm \sqrt{gy}$$

En consecuencia, V_w puede tomar cualquier valor dependiendo de las magnitudes de V y $\sqrt{gy}$. La velocidad de la onda, V_w, puede ser negativa —una onda puede moverse aguas arriba— sólo cuando $V < \sqrt{gy}$. De esta manera vemos que el carácter del flujo cambia en la condición en la que $V = \sqrt{gy}$, o cuando

$$\frac{V}{\sqrt{gy}} = Fr = 1 \tag{10.6}$$

donde Fr es el número de Froude introducido en el capítulo 7. Cuando $Fr = 1$, el carácter del movimiento de la onda cambia.

Los flujos en canal abierto[4] pueden clasificarse con base en el número de Froude:

- $Fr < 1$ El flujo es *subcrítico*, *tranquilo* o *unidireccional*. Las perturbaciones pueden viajar aguas arriba; las condiciones aguas abajo pueden afectar el flujo aguas arriba.
- $Fr = 1$ El flujo es *crítico*.
- $Fr > 1$ El flujo es *supercrítico, rápido* o *fugaz*. Ninguna perturbación puede viajar aguas arriba; las condiciones aguas abajo no pueden sentirse aguas arriba.

Estos regímenes de comportamiento de flujo son cuantitativamente análogos a los regímenes subsónico, sónico y supersónico del flujo de gases analizado en el capítulo 12.

10-3 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA PARA FLUJO EN CANAL ABIERTO

Como en el caso de flujo en tubería, la fricción en los flujos en canal abierto resultan en una pérdida de energía mecánica; esto puede caracterizarse mediante una pérdida de carga. El efecto de la fricción es particularmente importante en canales largos.

Considere el flujo a través de un canal largo rectangular, de ancho b y pendiente de la plantilla $S_b = \tan\theta$, donde S_b es pequeña. La profundidad del flujo puede variar. Para deducir una forma apropiada de la ecuación de la energía para flujo en canal abierto, suponemos flujo uniforme en cada sección. El volumen de control utilizado para el análisis se muestra en la figura 10.3. La coordenada z indica distancias medidas en la dirección vertical; las distancias medidas normales a la plantilla se denotan mediante y.

La ecuación de la energía para un volumen de control es

$$\begin{aligned} &= 0(6) = 0(6) = 0(6) \qquad = 0(1) \\ \dot{Q} - \cancel{W_s} - \cancel{W_{\text{corte}}} - \cancel{W_{\text{otro}}} &= \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{VC} e\rho\, d\forall \\ &\quad + \int_{SC} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \end{aligned} \tag{4.57}$$

[4] El número de Froude para canales no rectangulares debe basarse en la profundidad hidráulica, por lo que

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy_h}}$$

Para un canal rectangular, $y_h = y$, de modo que esta ecuación se reduce a la expresión dada arriba.

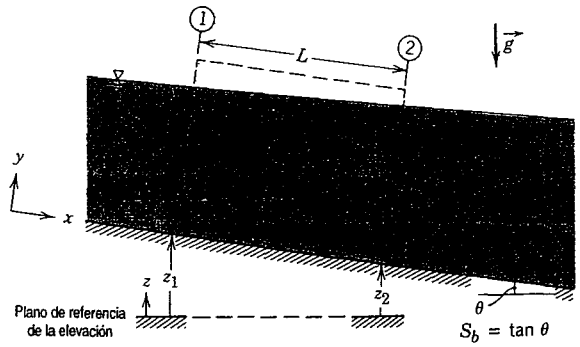


Fig. 10.3 Volumen de control y coordenadas para el análisis de energía en canal abierto.

La ecuación se va a aplicar al volumen de control de la figura 10.3 bajo las suposiciones:

1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en una sección
4) La profundidad varía gradualmente de modo que la distribución de presión es hidrostática
5) La pendiente de la plantilla es pequeña, $\theta \sim \text{sen}\ \theta \sim \tan\theta = S_b$, y $\cos\theta \sim 1$
6) $\dot{W}_s = \dot{W}_{\text{corte}} = \dot{W}_{\text{otro}} = 0$

Bajo estas suposiciones, la ecuación de la energía se reduce a

$$\dot{Q} = \int_{SC} \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{10.7}$$

Como un resultado de la fricción, la energía mecánica se disipará entre las secciones ① y ②. Como en el caso de flujo en tubería, la disipación se caracteriza por una pérdida de carga. Para demostrar esto, la ecuación 10.7 se reescribe como

$$\int_{SC} \left(pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} - \dot{Q} = 0$$

$$\int_{SC} \left(pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + (u_2 - u_1)\dot{m} - \frac{\delta Q}{dm}\dot{m} = 0$$

$$\int_{SC} \left(pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} + \dot{m}h_l = 0 \tag{10.8}$$

La integral de la ecuación 10.8 debe evaluarse en las secciones ① y ②. En la sección ①, $dA = b\,dy$, $z = z_1 + y\cos\theta$, y la velocidad es uniforme sobre el área. La variación de presión es hidrostática; $dp = -\rho g\,dz = -\rho g\cos\theta\,dy$, y la distribución de la presión hidrostática está dada por $p = \rho g\cos\theta\,(y_1 - y)$. De tal modo,

$$\int_{SC_1} \left(pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$= \int_0^{y_1} \left(g \cos\theta (y_1 - y) + \frac{V_1^2}{2} + g(z_1 + y \cos\theta) \right) \{-|\rho V_1 b \, dy|\}$$

$$= \int_0^{y_1} \left(g \cos\theta y_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 \right) \{-|\rho V_1 b \, dy|\}$$

Como todos los términos bajo el signo integral son independientes de y,

$$\int_{SC_1} \left(pv + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\dot{m}_1 \left(\frac{V_1^2}{2} + g z_1 + g \cos\theta y_1 \right)$$

La forma de la integral en la sección ② es idéntica a la de la sección ① (excepto el signo, que será positivo). Además, $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$. La sustitución en la ecuación 10.8 produce

$$\left(\frac{V_2^2}{2} + g z_2 + g \cos\theta y_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + g z_1 + g \cos\theta y_1 \right) + h_l = 0 \tag{10.9}$$

Para pendientes pequeñas, $\cos\theta \approx 1$. Para obtener la pérdida de carga en dimensiones de longitud (pérdida de carga por peso unitario más que por unidad de masa), la ecuación 10.9 se divide entre g. En consecuencia,

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + z_2 + h_l \tag{10.10}$$

Para flujo sin fricción no hay pérdida de carga y la ecuación de la energía (ecuación 10.10) se vuelve

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + z_2$$

10-3.1 Energía específica

La ecuación de la energía para flujo en canal abierto (ecuación 10.10) contenía la suma de los términos, $V^2/2g + y$, en ambos lados. Esta suma se define como la *energía específica* (o *carga específica*) y se denota por medio del símbolo E,

$$E = \frac{V^2}{2g} + y \tag{10.11}$$

donde la profundidad del flujo, y, se mide normal a la plantilla del canal.

Para flujo uniforme en una sección, la velocidad puede escribirse en términos de la relación de flujo volumétrico. De la continuidad, $V = Q/A$, de modo que

$$E = \frac{Q^2}{2gA^2} + y \tag{10.12}$$

Para una relación de flujo dada, la energía específica es una función de la profundidad. La profundidad también aparece en la expresión para el área (tabla 10.1). Para ilustrar la relación entre

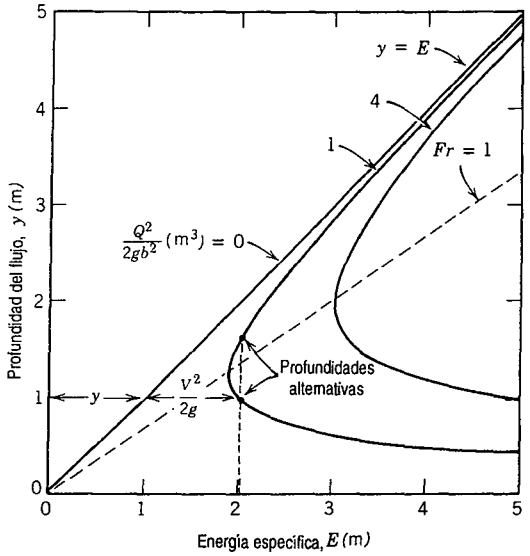


Fig. 10.4 Diagrama de energía específica.

la profundidad y la energía específica a tasa de flujo constante, considere flujo en un canal rectangular de ancho b. Entonces $A = by$, y

$$E = \frac{Q^2}{2g\,b^2y^2} + y \tag{10.13}$$

La variación de la profundidad como una función de la energía específica para una relación de flujo determinada se grafica en la figura 10.4; se muestran las curvas para varios valores de Q (en realidad $Q^2/2gb^2$).

Cuando $Q = 0$, entonces $y = E$; este caso límite es una línea de 45° sobre la gráfica. Para una relación de flujo ($Q > 0$) y energía específica dadas, hay dos profundidades posibles. Estas dos se denominan *profundidades alternativas*. La curva para Q constante brinda el lugar geométrico de todas las profundidades posibles y las energías específicas correspondientes que satisfacen la ecuación 10.13. A medida que Q aumenta, las curvas se desplazan hacia la derecha.

Para cualquier E, la distancia horizontal, desde el eje vertical ($E = 0$) hasta la línea $y = E$, proporciona la profundidad y. La distancia de la línea $y = E$ a la curva Q es entonces igual a la energía cinética, $V^2/2g$; ésta se muestra en la figura 10.4.

Para cada curva que representa una relación de flujo dada en la figura 10.4, hay una profundidad que proporciona una E mínima. Podemos determinar esta profundidad, y, diferenciando la ecuación 10.13; E será un mínimo cuando

$$\frac{dE}{dy} = -\frac{Q^2}{g\,b^2y^3} + 1 = 0 \tag{10.14}$$

Resolviendo para y, obtenemos

$$\frac{Q^2}{g\,b^2} = y^3 \qquad \text{o} \qquad y = \left[\frac{Q^2}{g\,b^2}\right]^{1/3}$$

La sustitución de este resultado en la ecuación 10.13 produce

$$E_{min} = \tfrac{1}{2}y + y = \tfrac{3}{2}y$$

El lugar geométrico de los valores mínimos de E es consecuentemente una línea recta con $y = \frac{2}{3}E_{min}$.

Podemos resolver para la velocidad en E_{min} utilizando la ecuación 10.14,

$$V^2 = \frac{Q^2}{A^2} = \frac{Q^2}{b^2y^2} = gy$$

De este modo, en el valor mínimo de E, $Fr = V/\sqrt{gy} = 1.0$, y la condición corresponde a flujo crítico. La profundidad en E_{min} recibe el nombre de *profundidad crítica*, y_c. En consecuencia, para flujo en un canal rectangular de ancho b,

$$y_c = \left[\frac{Q^2}{gb^2}\right]^{1/3} \qquad \text{y} \qquad E_{min} = \frac{3}{2}y_c$$

De la ecuación 10.11,

$$E_{min} = \frac{3}{2}y_c = \frac{V_c^2}{2g} + y_c$$

por lo que

$$\frac{V_c^2}{2g} = \frac{y_c}{2} \tag{10.15}$$

Podemos investigar la naturaleza del flujo en la ramas de la curva sobre y debajo de la profundidad crítica escribiendo una expresión para el número de Froude. De la continuidad,

$$Q = V_c b y_c = V b y \tag{10.16}$$

Entonces, empleando las ecuaciones 10.15 y 10.16,

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{V_c y_c}{y\sqrt{gy}} = \frac{\sqrt{gy_c}y_c}{y\sqrt{gy}} = \left[\frac{y_c}{y}\right]^{3/2} \tag{10.17}$$

En la rama superior de la curva,

$$y > y_c, \text{ por lo que } Fr < 1; \qquad \text{el flujo es subcrítico}$$

En la rama inferior de la curva,

$$y < y_c, \text{ por lo que } Fr > 1; \qquad \text{el flujo es supercrítico}$$

Para canales no rectangulares, la profundidad del canal varía a través del ancho. En estos casos, la evaluación de la profundidad crítica (y la velocidad y área críticas correspondientes) usualmente requiere solución por ensayo y error. A la energía específica mínima, la diferenciación de la ecuación 10.12 con respecto a y, a Q constante, produce

$$\frac{dE}{dy} = 0 = -\frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy} + 1 \tag{10.18}$$

Como $dA = b_s dy$, donde b_s es la profundidad del canal en la superficie libre, entonces

$$\frac{gA^3}{b_{sc}Q^2} = 1 \qquad \text{en} \qquad E = E_{\min} \tag{10.19}$$

Tanto A_c como b_{sc} son funciones de la profundidad crítica, y_c. Para una forma de sección transversal específica, la ecuación 10.19 puede resolverse numéricamente para la profundidad crítica.

El área crítica, A_c, correspondiente a $Fr = 1$ es

$$A_c = \left[\frac{b_{sc}\,Q^2}{g}\right]^{1/3} \tag{10.20}$$

De la continuidad, $V_c = Q/A_c$. De la ecuación 10.19, $Q^2/A_c^2 = gA_c/b_{sc}$. De tal modo,

$$V_c = \frac{Q}{A_c} = \left[\frac{Q^2}{A_c^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{gA_c}{b_{sc}}\right]^{1/2} = [g\,y_{hc}]^{1/2} \tag{10.21}$$

donde y_{hc} es la profundidad hidráulica en condiciones críticas. Así, el número de Froude es la unidad para flujo en condiciones críticas que corresponden a energía específica mínima.

En un canal rectangular, $A_c = by_c$ y $b_{sc} = b$; la ecuación 10.21 produce $V_c = (gy_c)^{1/2}$. (Éste es el mismo resultado obtenido de la ecuación 10.15.)

Cerca del E mínimo, la relación de cambio de y con respecto a E es casi infinita. Incluso cambios pequeños en E, debidos a irregularidades o perturbaciones en el canal, pueden ocasionar cambios pronunciados en la profundidad del fluido. Por tanto, suelen formarse ondas superficiales cuando un flujo está casi en condiciones críticas. En consecuencia, en la práctica se evitan recorridos largos de flujo casi crítico.

10.4 FLUJO SIN FRICCIÓN: EFECTO DEL CAMBIO DE ÁREA

Empezamos considerando dos casos de flujo simples en los que la plantilla del canal es horizontal, predominan los efectos de la sección transversal del canal (cambio de área) y puede ignorarse el efecto de la fricción. Puesto que se supone que el flujo es sin fricción, la ecuación de la energía (ecuación 10.8) se reduce a una forma de la ecuación de Bernoulli. Estos casos de flujo se analizan empleando las ecuaciones de Bernoulli y de continuidad.

10-4.1 Flujo sobre una protuberancia

Considere un flujo sin fricción en un canal rectangular horizontal de ancho constante, b, con una protuberancia en la plantilla del canal, como se ilustra en la figura 10.5. La altura de la protuberancia sobre la plantilla horizontal del canal es $h(x)$; la profundidad del agua, $y(x)$, se mide desde la superficie local del fondo del canal. Se supone que el flujo será uniforme en cada sección. Estamos interesados en investigar la forma de la superficie libre cuando el flujo pasa por la protuberancia.

Como el flujo es estable, incompresible y sin fricción, podemos aplicar la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.9}$$

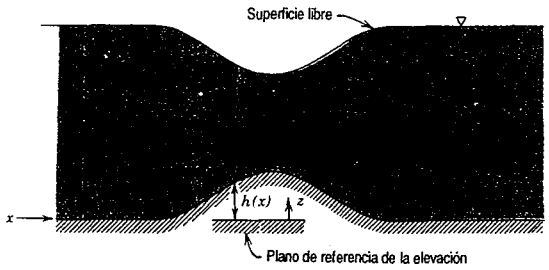


Fig. 10.5 Flujo en canal abierto sobre una protuberancia en una plantilla de canal horizontal.

Aplicando la ecuación a lo largo de la línea de corriente de la superficie libre entre la posición ① aguas arriba y el punto sobre la protuberancia, obtenemos

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + y + h$$

Puesto que la presión es la atmosférica a lo largo de la superficie libre, $p_1 = p = p_{atm}$, y

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V^2}{2g} + y + h = \text{constante} \tag{10.22}$$

La relación de flujo volumétrico es una constante. De tal modo, de la continuidad para flujo estable, incompresible y uniforme en una sección,

$$\frac{Q}{b} = V_1 y_1 = V y$$

La sustitución de V_1 y V en la ecuación 10.22 produce

$$\frac{Q^2}{2gb^2y_1^2} + y_1 = \frac{Q^2}{2gb^2y^2} + y + h = \text{constante} \tag{10.23}$$

Podemos obtener una expresión para la variación de la profundidad de la superficie libre diferenciando la ecuación 10.23

$$\frac{-Q^2}{gb^2y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dh}{dx} = 0$$

Al resolver para la pendiente de la superficie libre, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dh/dx}{\left[\dfrac{Q^2}{gb^2y^3} - 1\right]} = \frac{dh/dx}{\left[\dfrac{V^2}{gy} - 1\right]} = \frac{dh/dx}{Fr^2 - 1} \tag{10.24}$$

De la ecuación 10.24 vemos que la pendiente de la superficie libre depende del número de Froude local. Para $Fr < 1$, un aumento en la elevación de la plantilla ocasiona una disminución en la profundidad del agua; una disminución en la elevación de la plantilla provoca el aumento de la profundidad del agua. En el caso de $Fr > 1$, un aumento en la elevación de la plantilla causa un incremento en la profundidad del agua; una reducción en la elevación de la plantilla produce la reducción de la profundidad del agua. Estos resultados se resumen en la figura 10.6.

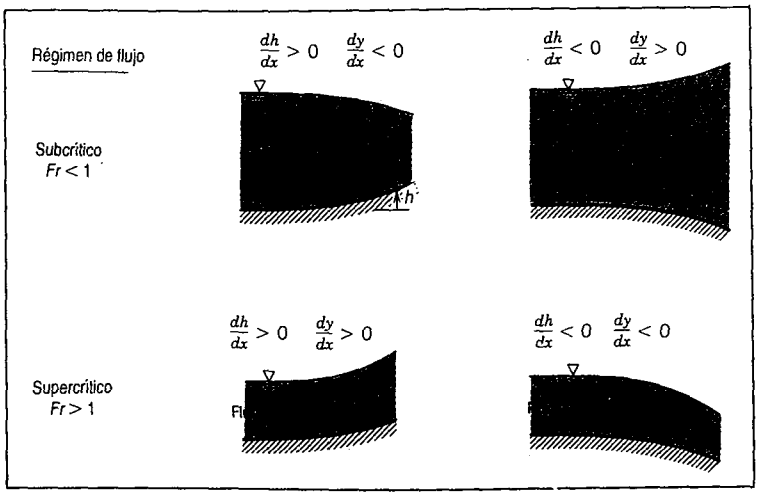


Fig. 10.6 Efecto de los cambios de la elevación de la plantilla en la profundidad del agua en el flujo en canal abierto.

Cuando el número de Froude es la unidad, la ecuación 10.24 predice una pendiente infinita de la superficie del agua, a menos que dh/dx sea igual a cero. Puesto que la pendiente de la superficie libre no puede ser infinita, entonces dh/dx debe ser cero cuando $Fr = 1$; un número de Froude igual a la unidad sólo puede existir en el sitio donde $dh/dx = 0$. Si se alcanza el flujo crítico, entonces aguas abajo de su posición, el flujo crítico puede ser subcrítico o supercrítico, dependiendo de las condiciones aguas abajo. Si no ocurre el flujo crítico donde $dh/dx = 0$, entonces el flujo aguas abajo de esta posición será del mismo tipo que el flujo aguas arriba de la misma.

EJEMPLO 10.2 Flujo sobre una protuberancia en la plantilla de un canal horizontal

Agua fluye por un canal rectangular horizontal. La velocidad y la profundidad del flujo en la sección ① son 0.5 m/s y 0.3 m, respectivamente. El flujo pasa sobre una protuberancia lisa en el piso del canal. Evalúe la velocidad y la profundidad del flujo directamente arriba del pico de la protuberancia. Suponga que la altura del pico es 0.03 m y desprecie la fricción.

PROBLEMA EJEMPLO 10.2

DATOS: Un flujo de agua en un canal rectangular horizontal. Se desprecian los efectos de la fricción.

ENCUENTRE: La velocidad y la profundidad del flujo arriba del pico de la protuberancia.

SOLUCIÓN:
Para flujo estable e incompresible a lo largo de una línea de corriente sin fricción, puede aplicarse la ecuación de Bernoulli. A lo largo de la superficie libre la presión es constante, por lo que

$$\cancel{\frac{p_{atm}}{\rho g}} + \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \cancel{\frac{p_{atm}}{\rho g}} + \frac{V^2}{2g} + y + h$$

En el caso de flujo uniforme en cada sección, la ecuación de continuidad se reduce a $V_1 y_1 = Vy$. Estas dos ecuaciones nos permiten resolver para V y y; el proceso de solución puede visualizarse empleando el diagrama de energía específica de la manera siguiente. De la ecuación 10.22,

$$E_1 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = E + h = \frac{V^2}{2g} + y + h \qquad \text{o} \qquad E = E_1 - h$$

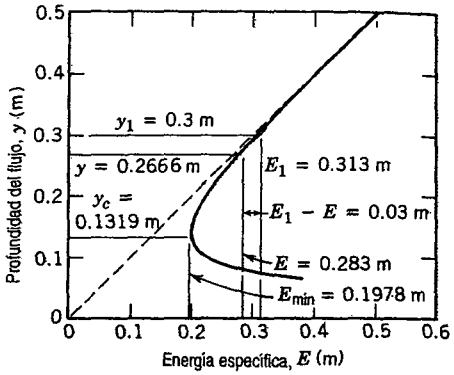
Evaluando, obtenemos

$$E_1 = \frac{1}{2} \times (0.5)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2}{9.807\ \text{m}} + 0.3\ \text{m}$$

$$E_1 = 0.3127\ \text{m}$$

y

$$E = E_1 - h = (0.3127 - 0.03)\ \text{m} = 0.2827\ \text{m}$$



Estos puntos se grafican sobre el diagrama de energía específica. Mediante iteración puede mostrarse que la profundidad del flujo para este valor de E es

$$y = 0.2666\ \text{m} \longleftarrow y$$

El cambio en el nivel de la superficie es

$$\Delta = y + h - y_1 = (0.2666 + 0.0300 - 0.3000)\ \text{m} = -3.4\ \text{mm}$$

La velocidad del flujo es

$$V = V_1 \frac{y_1}{y} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{0.3000\ \text{m}}{0.2666\ \text{m}} = 0.563\ \text{m/s} \longleftarrow V$$

{El diagrama de energía específica sugiere que el flujo podría pasar por la protuberancia aproximadamente a $E_1 - E_{min} = 0.313\ \text{m} - 0.1978\ \text{m} = 0.115\ \text{m}$ de altura sin alcanzar su velocidad crítica.}

10-4.2 Flujo a través de una compuerta de esclusa

Como un segundo ejemplo de un flujo en canal abierto donde la fricción puede ignorarse, considere el flujo a través de una compuerta de esclusa. Una compuerta de esclusa es una forma de estructura de control empleada a menudo para regular la descarga. Un flujo que pasa por debajo de una compuerta de esclusa se muestra en la figura 10.7. A cierta distancia aguas arriba de la compuerta, la profundidad del agua, y_0, es constante y la velocidad del flujo es despreciable. Esto es equivalente

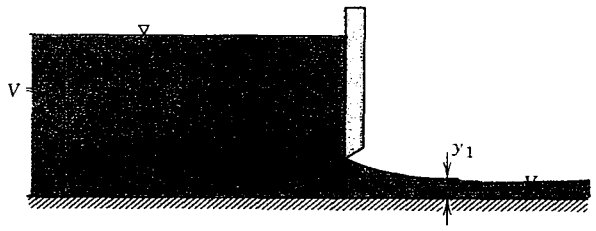


Fig. 10.7 Flujo a través de una compuerta de esclusa.

a considerar el flujo proveniente de un gran depósito. La sección ① se elige de manera que el flujo se haga uniforme a través de la profundidad y_1.

Como el flujo es estable, incompresible y sin fricción, podemos aplicar la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente. Al aplicar la ecuación a lo largo de la línea de corriente de la superficie entre las secciones ⓪ y ①, entonces

$$y_0 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 \tag{10.25}$$

Podemos expresar V en términos de la relación de flujo volumétrico. Como $V = Q/A$ y $A = by$, donde b es el ancho de la compuerta, entonces

$$y_0 = \frac{Q^2}{2gb^2y_1^2} + y_1 \tag{10.26}$$

La ecuación 10.26 brinda una relación entre la profundidad y_1 y la relación de flujo volumétrico,

$$y_1^2(y_0 - y_1) = \frac{Q^2}{2gb^2} \tag{10.27}$$

Esta relación se muestra en la figura 10.8, donde la profundidad y_1 se ha adimensionalizado mediante la profundidad del depósito, y_0. La figura 10.8 indica que para una relación de flujo dada, hay dos profundidades posibles para cualquier relación de flujo menor que un máximo. A la relación de flujo máximo hay una sola profundidad. Es posible evaluar la profundidad a la relación de flujo máximo diferenciando la ecuación 10.27 con respecto a y_1,

$$\frac{d}{dy_1}\left[\frac{Q^2}{2gb^2}\right] = 0 = 2y_1y_0 - 3y_1^2$$

A relación de flujo máxima

$$y_1 = \frac{2}{3}y_0$$

y de la ecuación 10.27

$$\frac{Q_{\text{máx}}^2}{gb^2} = 2\left[\frac{2}{3}y_0\right]^2\left[y_0 - \frac{2}{3}y_0\right] = \frac{8}{27}y_0^3$$

El número de Froude a la relación de flujo máxima está dado por

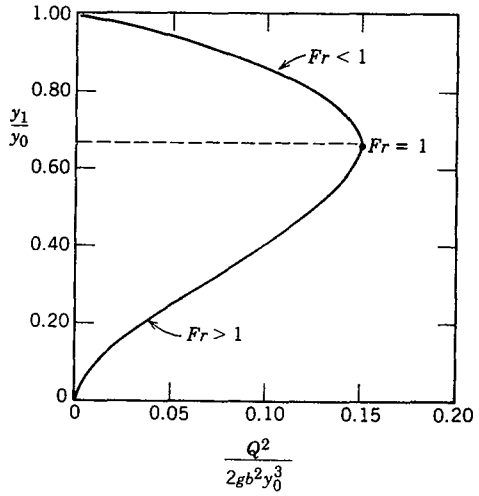


Fig. 10.8 Relación entre la profundidad aguas abajo y la relación de flujo para flujo a través de una compuerta de esclusa.

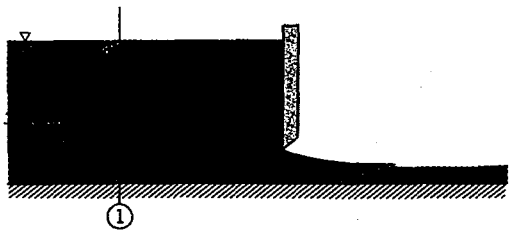
$$Fr^2 = \frac{V_{\text{máx}}^2}{gy_1} = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{gb^2y_1^3} = \frac{8}{27}y_0^3\left[\frac{3}{2y_0}\right]^3 = 1$$

De este modo, en la figura 10.8, la relación de flujo máxima ocurre en $y_1/y_0 = \frac{2}{3}$. La parte superior de la curva corresponde a flujo subcrítico ($Fr < 1$) y la parte inferior a flujo supercrítico ($Fr > 1$).

El flujo que sale de una compuerta de esclusa pasa a través de una vena contracta, como se muestra en la figura 10.7. No es posible relacionar analíticamente la profundidad y_1 con la abertura de la compuerta. Es necesario emplear datos experimentales para determinar la colocación de la compuerta necesaria para pasar a una relación de flujo deseada, como se analiza en la sección 10-8.

EJEMPLO 10.3 Flujo bajo una compuerta de esclusa

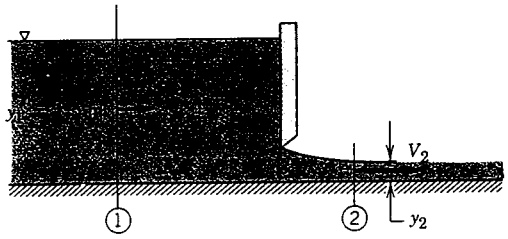
El agua bajo una compuerta de esclusa se consideró en el problema ejemplo 4.6, en las siguientes condiciones:



Evalúe la profundidad del agua, y_0, en una posición aguas arriba de la compuerta donde la velocidad del flujo es despreciable. Encuentre los valores exactos de la profundidad aguas abajo y la velocidad a esta relación de flujo mediante la condición de que la energía específica permanezca constante. Encuentre la profundidad y la velocidad que proporcionarían la relación de flujo máxima. Calcule esta relación de flujo.

PROBLEMA EJEMPLO 10.3

DATOS: Un flujo de agua bajo una compuerta de esclusa en las condiciones mostradas.



ENCUENTRE:
a) La profundidad del agua, y_0, donde la velocidad de flujo es despreciable.
b) La profundidad del agua, y_2, y la velocidad, V_2, aguas abajo a esta relación de flujo.
c) La profundidad del agua, y, y la velocidad, V, en condiciones aguas abajo que produzcan la máxima relación de flujo posible.
d) La relación de flujo máxima.

SOLUCIÓN:

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en las secciones ① y ②

La energía específica aguas arriba es

$$E_1 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{1}{2} \times (0.2)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2}{9.807\ \text{m}} + 1.5\ \text{m} = 1.502\ \text{m}$$

($\frac{V_1^2}{2g} \approx 0$)

Para energía específica constante, $E_0 = \frac{V_0^2}{2g} + y_0 = E_1$, de modo que $y_0 = 1.502$ m ← y_0

Para energía específica constante, las condiciones aguas abajo deben estar en la profundidad alternativa correspondiente a la relación de flujo especificada, como se muestra en el diagrama de la energía específica,

$$E_2 = y_0 = 1.502\ \text{m} = \frac{Q^2}{2gb^2y_2^2} + y_2$$

Por iteración, para $Q/b = 0.3\ \text{m}^2/\text{s}$,

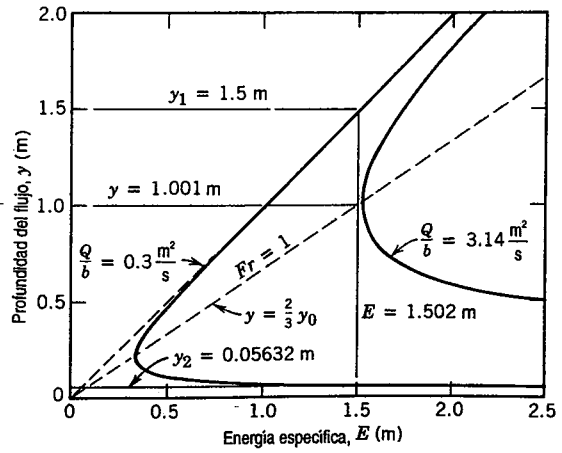
$$y_2 = 0.05632\ \text{m}$$ ←

La velocidad correspondiente es

$$V_2 = V_1 \frac{y_1}{y_2}$$

$$= \frac{0.2\ \text{m}}{\text{s}} \times \frac{1.5\ \text{m}}{0.05632\ \text{m}}$$

$$V_2 = 5.327\ \text{m/s}$$ ← V_2



Estas condiciones definen la profundidad alternativa, como se muestra arriba. (Hasta tres cifras significativas, estos resultados concuerdan con los datos dados en el problema ejemplo 4.6.)

De la solución para la ecuación 10.27, a la relación de flujo máxima,

$$y = \tfrac{2}{3}y_0 = \tfrac{2}{3} \times 1.502 \text{ m} = 1.001 \text{ m} \longleftarrow y$$

y

$$V = \sqrt{gy} = \left[9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1.001 \text{ m}\right]^{1/2} = 3.133 \text{ m/s} \longleftarrow V$$

La relación de flujo máxima es

$$\frac{Q}{b} = Vy = 3.133 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 1.001 \text{ m} = 3.14 \text{ m}^3/\text{s/m (m}^2/\text{s)} \longleftarrow Q$$

La curva correspondiente de y contra E también se muestra arriba.

Ésta es la relación máxima de flujo posible a partir de las condiciones del depósito especificadas, $V_0 \approx 0$ y $y_0 = 1.502$ m. Las condiciones en la sección (1) cambiarían cuando la compuerta de esclusa estuviera abierta a la posición de flujo máximo.

10-5 FLUJO A PROFUNDIDAD NORMAL: FLUJO UNIFORME

El flujo completamente desarrollado a través de un canal prismático (un canal con pendiente y sección transversal constantes) a profundidad constante, y_n, se denomina flujo a *profundidad normal* o *flujo uniforme*. La pendiente del fondo del canal, o plantilla, se denota mediante S_b y se supone pequeña. Para analizar el flujo, suponemos flujo uniforme en cada sección transversal y aplicamos las ecuaciones básicas al volumen de control de la figura 10.9.

10-5.1 Ecuaciones básicas

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en una sección
4) Profundidad normal, $y_1 = y_2 = y_n$

La ecuación de continuidad produce

$$0 = -|\rho V_1 A_1| + |\rho V_2 A_2|$$

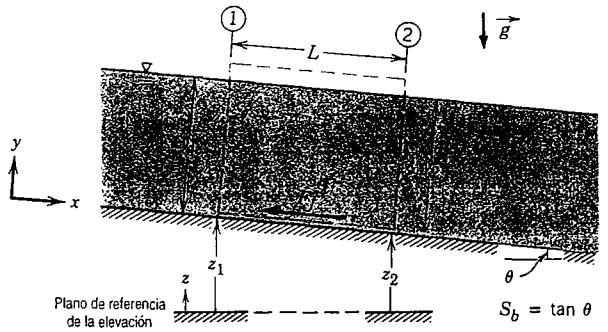


Fig. 10.9 Volumen de control y coordenadas utilizadas para el análisis de flujo a profundidad normal.

Puesto que $A_1 = A_2$, entonces

$$V_1 = V_2$$

b. Ecuación del momento

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC} u\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposiciones: 5) Distribución de presión hidrostática
6) Pendiente pequeña, $\theta \sim \text{sen}\ \theta \sim \tan\theta = S_b$

Como el flujo tiene profundidad constante y velocidad uniforme, el flujo de momento a través de la superficie de control es cero. La fuerza neta de presión sobre el volumen de control, en la dirección x, es cero debido a que la distribución de presión es hidrostática. La componente x de la fuerza másica es la componente del peso del líquido en el volumen de control en la dirección x. De tal modo, la ecuación del momento se reduce a

$$-F_f + W\,\text{sen}\,\theta = 0$$

o

$$F_f = W\,\text{sen}\,\theta \tag{10.28}$$

La fuerza de fricción puede expresarse como el producto del esfuerzo de corte de la pared, τ_w, y el área de la supeficie del canal sobre la cual actúa el esfuerzo. La ecuación 10.28 muestra que para flujo a profundidad normal, la componente de la fuerza de la gravedad que acciona al flujo está equilibrada mediante la fuerza de fricción que actúa sobre las paredes del canal.

c. Ecuación de energía

La ecuación de energía para flujo en canal abierto se dedujo en la sección 10-3 como

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + z_2 + h_l \tag{10.10}$$

Para flujo a profundidad normal, $y_1 = y_2 = y_n$, y $V_1 = V_2$. Por tanto, de la ecuación 10.10,

$$h_l = z_1 - z_2 = LS_b \tag{10.29}$$

Para flujo a profundidad normal, la pérdida de carga debida a la fricción es igual al cambio en la elevación de la plantilla. La energía específica, E, es constante en cada sección normal a la plantilla. La línea de gradiente de energía, la línea de gradiente hidráulico y la plantilla del canal son todos paralelos.

10-5.2 La correlación de Manning para la velocidad

Los flujos en canal abierto invariablemente son turbulentos en la práctica. Como no se dispone de ninguna relación constitutiva para relacionar el esfuerzo de corte y el gradiente de velocidad, debemos confiar en correlaciones empíricas. Como en el caso de flujo turbulento completamente desarrollado en tubería, la pérdida de carga puede escribire en términos de un factor de fricción (ecuación 8.32). Para la aplicación en canal abierto, el diámetro de la tubería D se sustituye por el radio hidráulico ($D = 2R = 4R_h$) y la pérdida de carga se expresa como pérdida de carga por peso unitario (h_l tiene unidades de longitud). En consecuencia, para flujo en canal abierto,

$$h_l = f\frac{L}{4R_h}\frac{V^2}{2g} \tag{10.30}$$

De la ecuación 10.29, $h_l/L = S_b$, y de ese modo la velocidad para flujo a profundidad normal es

$$V = \left[\frac{8g}{f}\right]^{1/2}\sqrt{R_h S_b} \tag{10.31}$$

En la mayor parte de los flujos en canal abierto, el factor de fricción es sólo una función de la rugosidad de la superficie; es independiente del número de Reynolds. Esto es análogo al flujo en el régimen completamente rugoso para flujo turbulento en tubería. Para una rugosidad dada, la ecuación 10.31 puede escribirse como

$$V = C\sqrt{R_h S_b} \tag{10.32}$$

La ecuación 10.32 se conoce como la ecuación de Chezy. Los valores empíricos de C fueron determinados por Manning. Él sugirió que

$$C = \left[\frac{8g}{f}\right]^{1/2} = \frac{R_h^{1/6}}{n} \tag{10.33}$$

donde n es el coeficiente de rugosidad, el cual tiene diferentes valores para diferentes tipos de rugosidad en la frontera. Con esta expresión para C, la velocidad para flujo a profundidad normal se vuelve

Tabla 10.2 Coeficiente de rugosidad de Manning, n, para superficies representativas

Superficie del canal	Valor representativo[a] de n
Lucita, vidrio o película plástica	0.010
Madera o concreto pulido	0.013
Concreto sin pulir, enladrillado con revestimiento, tubería de concreto o hierro fundido	0.015
Tubería de acero remachado o en espiral	0.017
Canal de tierra uniforme y liso	0.022
Acequias metálicas corrugadas, canales típicos, ríos sin piedras grandes ni maleza	0.025
Canales y ríos con muchas piedras y maleza	0.035

[a] Véase [1] para una tabla más completa.

$$V = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} \tag{10.34}$$

y la relación de flujo volumétrico se escribe

$$Q = VA = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} A \tag{10.35}$$

En la tabla 10.2 se presentan valores de n para algunas superficies típicas. Estos valores de n, considerados adimensionales (lo cual no son; de la ecuación 10.34 vemos que n tiene dimensiones de $L^{-1/3}t$), se basaron en mediciones en unidades del SI.[5]

La relación entre variables en la ecuación 10.35 puede verse de diversas maneras. La relación de flujo volumétrico, a través de un canal prismático de pendiente y rugosidad dadas, es una función tanto del tamaño como de la forma del canal. Esto se ilustra en el problema ejemplo 10.4. Para una relación de flujo especificada a través de un canal prismático de pendiente y rugosidad dadas, la profundidad de flujo uniforme es una función del tamaño y la forma del canal. Únicamente hay una profundidad para flujo uniforme a una relación de flujo determinada; puede ser mayor, menor o igual que la profundidad crítica. Esto se ilustra en el problema ejemplo 10.5.

EJEMPLO 10.4 Flujo contra área a través de dos formas de canal

Se considera que unos canales abiertos, de forma cuadrada o semicircular, conducen flujo en una pendiente de $S_b = 0.001$; en las paredes del canal se va a vaciar concreto con $n = 0.015$. Evalúe la relación de flujo entregada por los canales para dimensiones máximas entre 0.5 y 2.0 m. Compare los canales con base en una relación de flujo volumétrico para una área de sección transversal dada.

[5] Las ecuaciones 10.34 y 10.35 son válidas para unidades del SI. En unidades británicas, el numerador de estas ecuaciones debe multiplicarse por $(0.3048)^{-1/3} \approx 1.49$. Con esta modificación puede considerarse que n tiene el mismo valor numérico en ambos sistemas de unidades.

PROBLEMA EJEMPLO 10.4

DATOS: Canales de sección transversal cuadrado y semicircular; $S_b = 0.001$ y $n = 0.015$. Tamaños entre 0.5 y 2.0 m.

ENCUENTRE: *a*) Evalúe la relación de flujo como una función del tamaño.
b) Compare los canales con base en la relación de flujo volumétrico, Q, contra el área de la sección transversal, A.

SOLUCIÓN:
Aplique la ecuación 10.35 para flujo a profundidad normal en un canal largo.

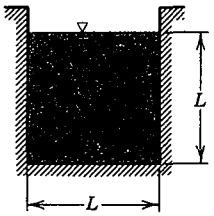
Ecuación de cálculo:

$$Q = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} A \tag{10.35}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en una sección
4) Flujo a profundidad normal

Para el canal cuadrado,

$P = 3L$ y $A = L^2$, por lo que $R_h = \frac{L}{3}$



Al sustituir en la ecuación 10.35, obtenemos

$$Q = \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^{2/3} S_b^{1/2} L^2}{n} = \frac{S_b^{1/2}}{(3)^{2/3} n} L^{8/3}$$

Para $L = 1$ m,

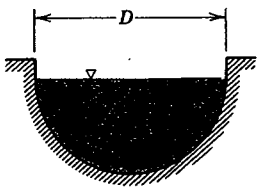
$$Q = \frac{(0.001)^{1/2}}{(3)^{2/3}(0.015)} (1)^{8/3} = 1.01 \text{ m}^3/\text{s}$$

La tabulación para un rango de tamaños resulta en

L(m)	0.5	1.0	1.5	2.0
A(m^2)	0.25	1.00	2.25	4.00
Q(m^3/s)	0.160	1.01	2.99	6.44

Para el canal de sección semicircular,

$P = \frac{\pi D}{2}$ y $A = \frac{\pi D^2}{8}$, por lo que $R_h = \frac{\pi D^2}{8} \frac{2}{\pi D} = \frac{D}{4}$



Al sustituir en la ecuación 10.35, obtenemos

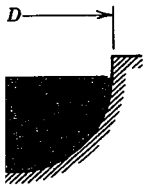
$$Q = \frac{\left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} S_b^{1/2}}{n} \frac{\pi D^2}{8} = \frac{S_b^{1/2} \pi}{4^{5/3}(2) n} D^{8/3}$$

: 0.015. Tamaños

ico, Q, contra el

(10.35)

$Q_\square$



Para $D = 1$ m,

$$Q = \frac{(0.001)^{1.2}\pi}{(2)(4)^{5.3}(0.015)}(1)^{8.3} = 0.329 \text{ m}^3/\text{s} \qquad Q_\smile$$

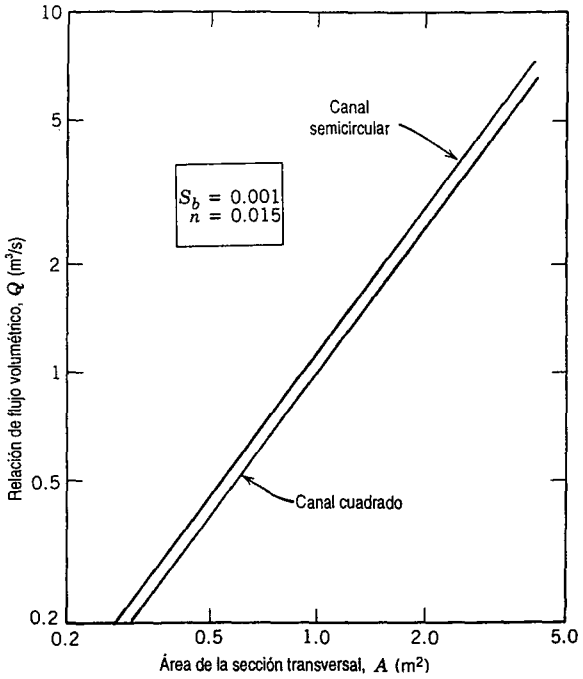
La tabulación para un rango de tamaños produce

D(m)	0.5	1.0	1.5	2.0
A(m^2)	0.0982	0.393	0.884	1.57
Q(m^3/s)	0.0517	0.329	0.969	2.09

En el caso de ambos canales, la relación de flujo volumétrico varía como

$$Q \sim L^{8/3} \quad \text{o} \quad Q \sim A^{4/3}$$

puesto que $A \sim L^2$. La gráfica de la relación de volumen contra el área de la sección transversal muestra que el canal semicircular es más "eficiente".



El comportamiento de ambos canales puede compararse en cualquier área especificada. En $A = 1$ m^2, $Q/A = 1.01$ m/s para el canal cuadrado. En el caso del canal semicircular con $A = 1$ m^2, $D = 1.60$ m y $Q = 1.15$ m^3/s, por lo que $Q/A = 1.15$ m/s. De tal modo, el canal semicircular conduce aproximadamente 14 por ciento más flujo por unidad de área que el canal cuadrado.

La comparación en el área de la sección transversal se relaciona con la excavación requerida para construir el canal. Las formas del canal también podrían compararse de acuerdo con el perímetro, el cual se relaciona con la cantidad de concreto necesaria para terminar el canal.

EJEMPLO 10.5 Determinación del tamaño de la acequia

Una acequia sobre el suelo, construida con madera, va a transportar agua desde un lago en una montaña hasta una pequeña central hidroeléctrica. La acequia entregará agua a $Q = 2$ m^3/s; la pendiente es $S_b = 0.002$ y $n = 0.013$. Evalúe el tamaño requerido de la acequia para *a*) una sección rectangular con $y/b = 0.5$ y *b*) una sección triangular equilátera.

PROBLEMA EJEMPLO 10.5

DATOS: Una acequia que se va a construir con madera, con $S_b = 0.002$, $n = 0.013$ y $Q = 2.00$ m^3/s.

ENCUENTRE: Tamaño de la acequia requerida para

a) Sección rectangular con $y/b = 0.5$.

b) Sección triangular equilátera.

SOLUCIÓN:

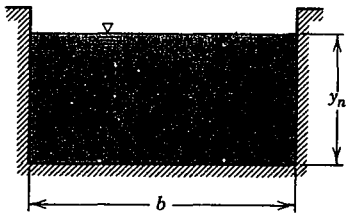
Suponga que la acequia es larga de modo que el flujo es uniforme (a profundidad normal). En ese caso se aplica la ecuación 10.35.

Ecuación de cálculo:
$$Q = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} A \tag{10.35}$$

La elección de la forma del canal fija la relación entre R_h y A, de modo que la ecuación 10.35 puede resolverse para la profundidad normal, y_n, determinándose en consecuencia el tamaño requerido del canal.

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en una sección
4) Flujo a profundidad normal

a) Sección rectangular



$P = 2y_n + b$; $y_n/b = 0.5$, por lo que $b = 2y_n$

$$\left.\begin{aligned} P &= 2y_n + 2y_n = 4y_n \\ A &= y_n b = y_n(2y_n) = 2y_n^2 \end{aligned}\right\} R_h = \frac{A}{P} = \frac{2y_n^2}{4y_n} = 0.5y_n$$

Sustituyendo en la ecuación 10.35, obtenemos

$$Q = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} A = \frac{(0.5y_n)^{2/3} S_b^{1/2} (2y_n^2)}{n} = \frac{2(0.5)^{2/3} S_b^{1/2} y_n^{8/3}}{n}$$

$$y_n = \left[\frac{nQ}{2(0.5)^{2/3} S_b^{1/2}}\right]^{3/8} = \left[\frac{0.013(2.00)}{2(0.5)^{2/3}(0.002)^{1/2}}\right]^{3/8} = 0.748 \text{ m}$$

Las dimensiones requeridas para el canal rectangular son

$y_n = 0.078$ m $\quad A = 1.12$ m^2

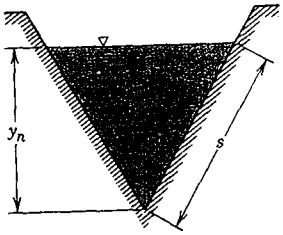
$b = 1.50$ m $\quad P = 3.00$ m $\longleftarrow$ Tamaño de la acequia

Además $Fr = \dfrac{V}{\sqrt{gy_n}} = \dfrac{Q}{A\sqrt{gy_n}}$

$$Fr = \frac{2.00 \text{ m}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{1.12 \text{ m}^2} \times \frac{1}{\left[9.81 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.748 \text{ m}\right]^{1/2}} = 0.659 \longleftarrow Fr$$

b) Sección triangular equilátera

$$\left.\begin{aligned} P &= 2s = \frac{2y_n}{\cos 30^\circ} \\ A &= \frac{y_n s}{2} = \frac{y_n^2}{2\cos 30^\circ} \end{aligned}\right\} R_h = \frac{A}{P} = \frac{y_n}{4}$$



La sustitución en la ecuación 10.35 produce

$$Q = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} A = \frac{\left(\dfrac{y_n}{4}\right)^{2/3} S_b^{1/2} \left(\dfrac{y_n^2}{2\cos 30^\circ}\right)}{n} = \frac{S_b^{1/2} y_n^{8/3}}{2(4)^{2/3} \cos 30^\circ n}$$

$$y_n = \left[\frac{2(4)^{2/3} \cos 30^\circ n Q}{S_b^{1/2}}\right]^{3/8} = \left[\frac{2(4)^{2/3} \cos 30^\circ (0.013)(2.00)}{(0.002)^{1/2}}\right]^{3/8} = 1.42 \text{ m}$$

Las dimensiones requeridas para el canal triangular son

$y_n = 1.42$ m $\quad P = 3.28$ m^2

$A = 1.16$ m $\quad b_s = 1.64$ m $\longleftarrow$ Tamaño de la acequia

Además $V = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{2.0 \text{ m}^3}{\text{s}} \times \dfrac{1}{1.16 \text{ m}^2} = 1.72$ m/s

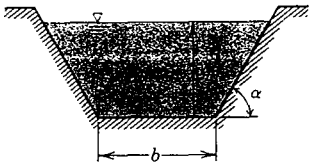
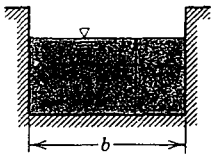
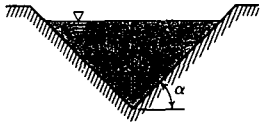
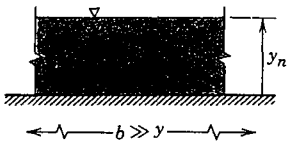
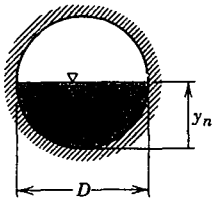
y $Fr = \dfrac{V}{\sqrt{gy_h}} = \dfrac{V}{\sqrt{gA/b_S}}$

$$Fr = \frac{1.72 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{\left[9.81 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1.16 \text{ m}^2 \times \dfrac{1}{1.64 \text{ m}}\right]^{1/2}} = 0.653 \longleftarrow Fr$$

Al comparar los resultados, vemos que la construcción de la acequia rectangular sería más económica; su perímetro es casi 8.5 por ciento menor que el de la acequia triangular.

Este ejemplo muestra el efecto de la forma del canal en el tamaño requerido para entregar una relación de flujo determinada, a una pendiente de la plantilla y coeficiente de rugosidad especificados. A los valores de S_b y n establecidos, el flujo puede ser subcrítico, crítico o supercrítico, dependiendo de Q.

Tabla 10.3 Propiedades de secciones óptimas de canales abiertos

Forma	Sección	Geometría óptima	Profundidad normal, y_n	Área de la sección transversal, A
Trapezoidal		$\alpha = 60°$ $b = \frac{2}{\sqrt{3}} y_n$	$0.968\left[\frac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/8}$	$1.622\left[\frac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/4}$
Rectangular		$b = 2y_n$	$0.917\left[\frac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/8}$	$1.682\left[\frac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/4}$
Triangular		$\alpha = 45°$	$1.297\left[\frac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/8}$	$1.682\left[\frac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/4}$
Plano ancho		ninguno	$1.00\left[\frac{(Q/b)n}{S_b^{1/2}}\right]^{3/8}$	— — —
Circular		$D = 2y_n$	$1.00\left[\frac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/8}$	$1.583\left[\frac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/4}$

10-5.3 Sección transversal óptima del canal

Para una pendiente y rugosidad dadas, la sección transversal óptima del canal requiere un área de flujo mínima para una relación de flujo determinada. De la ecuación 10.35

$$\frac{Q}{A} = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} \tag{10.36}$$

De tal modo, la sección transversal óptima tiene un radio hidráulico máximo, R_h. Como $R_h = A/P$, R_h es máximo cuando el perímetro mojado es mínimo. La solución de la ecuación 10.36 con respecto a A (con $R_h = A/P$) produce entonces

$$A = \left[\frac{nQ}{S_b^{1/2}}\right]^{3/5} P^{2/5} \tag{10.37}$$

De acuerdo con la ecuación 10.37, el área del flujo será un mínimo cuando el perímetro mojado sea un mínimo.

El perímetro mojado, P, es una función de la forma del canal. En cualquier forma de canal prismático (rectangular, trapezoidal, triangular, circular, etc.), la sección transversal del canal puede optimarse. En la tabla 10.3 se presentan secciones transversales óptimas para formas comunes de canal. La determinación de la sección transversal óptima para un canal trapezoidal se ilustra en el problema ejemplo 10.6.

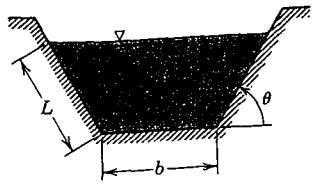
Una vez que la sección transversal óptima para una forma de canal dada se ha determinado, es posible obtener de la ecuación 10.35 expresiones para la profundidad normal, y_n, y el área, A, como funciones de la relación de flujo. Estas expresiones se incluyen en la tabla 10.3.

EJEMPLO 10.6 Optimación de la sección transversal de un canal trapezoidal

Se va a optimar un canal trapezoidal de modo que se minimice la excavación para una descarga dada a profundidad normal. Encuentre la relación óptima entre la longitud lateral del canal y el ancho del fondo, así como el ángulo óptimo de la pendiente lateral.

PROBLEMA EJEMPLO 10.6

DATOS: Una sección de canal trapezoidal.



ENCUENTRE: *a*) La relación óptima entre la longitud lateral del canal y el ancho del fondo.
b) El ángulo óptimo de la pendiente lateral.

SOLUCIÓN:

Suposiciones: 1) Flujo estable 3) Flujo uniforme en una sección
2) Flujo incompresible 4) Flujo a la profundidad normal

Del análisis de la sección 10-5.3, la forma óptima del canal se obtiene cuando R_h se maximiza, o bien cuando P se minimiza para un área de flujo dada. El área para la sección es

$$A = by_n + L\cos\theta\, L\,\text{sen}\,\theta$$

Pero $L = \dfrac{y_n}{\text{sen}\,\theta}$, por lo que $A = by_n + y_n^2\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = by_n + y_n^2\cot\theta$ (1)

El perímetro mojado es $$P = b + 2L = b + 2\frac{y_n}{\text{sen}\,\theta}$$

El ancho del fondo puede eliminarse empleando la ecuación 1 para obtener

$$P = \frac{A}{y_n} - y_n\cot\theta + \frac{2y_n}{\text{sen}\,\theta} \qquad (2)$$

Para cualquier ángulo de la pendiente lateral, el perímetro mínimo puede determinarse diferenciando la ecuación 2 con respecto a y_n. Por tanto,

$$\frac{dP}{dy_n} = -\frac{A}{y_n^2} - \cot\theta + \frac{2}{\text{sen}\,\theta} = 0$$

Área de la sección transversal, A

$1.622\left[\dfrac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/4}$

$1.682\left[\dfrac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/4}$

$1.682\left[\dfrac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/4}$

$1.583\left[\dfrac{Qn}{S_b^{1/2}}\right]^{3/4}$

equiere un área de

(10.36)

. Como $R_h = A/P$, uación 10.36 con

(10.37)

y

$$y_n^2 \frac{A \operatorname{sen} \theta}{2 - \cos \theta} \tag{3}$$

(Para un canal rectangular, $\theta = \pi/2$ y $A = by_n$. La ecuación 3 se vuelve

$$y_n^2 = \frac{by_n}{2} \qquad \text{o} \qquad y_n = \frac{b}{2}$$

como se muestra en la tabla 10.3.)

Para encontrar el ángulo óptimo de la pendiente lateral, diferencie la ecuación 3 con respecto a θ. De tal modo,

$$2y_n \frac{dy_n}{d\theta} = \frac{A \cos \theta}{2 - \cos \theta} + \frac{a \operatorname{sen}^2 \theta}{(2 - \cos \theta)^2} = A\left[\frac{\cos \theta(2 - \cos \theta) - \operatorname{sen}^2 \theta}{(2 - \cos \theta)^2}\right] = 0$$

la cual se reduce a $2 \cos \theta - 1 = 0$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$, o $\theta = 60°$ ← θ

La sustitución en la ecuación 3 produce

$$y_n^2 = \frac{A(\sqrt{3}/2)}{2 - \frac{1}{2}} = A\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{A}{\sqrt{3}} \qquad \text{o} \qquad A = \sqrt{3}y_n^2$$

Por último, la sustitución en la ecuación 1 resulta en

$$\sqrt{3}y_n^2 = by_n + y_n^2 \frac{1}{\sqrt{3}} = by_n + \frac{\sqrt{3}}{3}y_n^2 \qquad \text{o} \qquad b = \frac{2}{3}\sqrt{3}y_n = \frac{2y_n}{\sqrt{3}}$$

por lo que

$$L = \frac{y_n}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{2y_n}{\sqrt{3}} b \qquad L$$

De este modo, el canal trapezoidal óptimo tiene lados y fondo de igual longitud y un ángulo de la pendiente lateral de 60°; éste es la mitad de un hexágono.

10-5.4 Flujo normal crítico

La ecuación 10.35 indica que para una relación de flujo volumétrico dada a través de un canal prismático de rugosidad fija, sólo hay una pendiente de la plantilla para flujo a profundidad normal. Resolviendo la ecuación 10.35 para S_b,

$$S_b = \left[\frac{nQ}{R_h^{2/3}A}\right]^2 \tag{10.38}$$

Si la pendiente de la plantilla del canal es tal que la profundidad normal para una relación de flujo dada es exactamente igual a la profundidad crítica, ella se denomina pendiente crítica. Denotando la pendiente crítica de la plantilla como S_c, entonces

$$S_c = \left[\frac{nQ}{R_{hc}^{2/3}A_c}\right]^2 = \frac{n^2Q^2}{R_{hc}^{4/3}A_c^2} \tag{10.39}$$

De la ecuaci

En consecu

Para un can
en la ecuac

En términc

EJEMPL

Para flujc
grafique l
< 10 m. (
óptimo.

PROBLI

DATO

ENCU

SOLU

Suposi

Para c
la ecu

De la ecuación 10.21, para flujo crítico,

$$\frac{Q^2}{A_c^2} = \frac{gA_c}{b_s}$$

En consecuencia, podemos escribir

$$S_c = \frac{n^2 g A_c}{b_s R_{hc}^{4/3}} \tag{10.40}$$

Para un canal rectangular de ancho b, con $b \gg y_c$, entonces $b_s = b$, $A_c = by_c$ y $R_{hc} = y_c$. Al sustituir en la ecuación 10.40, obtenemos

$$S_c = \frac{n^2 g}{y_c^{1/3}} \tag{10.41}$$

En términos de la profundidad crítica y la pendiente crítica,

si $y_n > y_c$, entonces $S_b < S_c$: la pendiente es moderada (subcrítica)

si $y_n = y_c$, entonces $S_b = S_c$: la pendiente es crítica

si $y_n < y_c$, entonces $S_b > S_c$: la pendiente es pronunciada (supercrítica)

EJEMPLO 10.7 Flujo normal crítico a través de dos formas de canal

Para flujo normal crítico en un canal plano y ancho construido con concreto semielaborado, grafique la pendiente de la plantilla como una función de la profundidad de flujo para 0.01 m $< y <$ 10 m. Compare con la curva correspondiente para flujo normal crítico en un canal rectangular óptimo.

PROBLEMA EJEMPLO 10.7

DATOS: Un flujo normal crítico en *a*) un canal plano ancho y *b*) un canal rectangular óptimo, hecho de concreto semielaborado.

ENCUENTRE: La gráfica de S_c contra y_c en ambos casos.

SOLUCIÓN:

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en una sección
4) Flujo a profundidad crítica

Para concreto semielaborado, la tabla 10.2 indica que $n = 0.015$. En el caso del canal ancho, la ecuación 10.41 se aplica directamente.

Ecuación de cálculo:
$$S_c = \frac{n^2 g}{y_c^{1/3}} \tag{10.41}$$

De tal modo,

$$S_c = (0.015)^2(9.81)y_c^{-1/3} = 0.00221y_c^{-1/3} \tag{1}$$

Para el canal rectangular óptimo, empezamos con la ecuación 10.34 y utilizamos $y_n/b = 0.5$ en condiciones óptimas.

Ecuación de cálculo:
$$V = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} \tag{10.34}$$

Para condiciones óptimas, $P = b + 2y_n = 4y_n$, $A = by_n = 2y_n^2$, y

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{2y_n^2}{4y_n} = 0.5y_n$$

Para flujo normal crítico, $y_n = y_c$, y $V = V_c = \sqrt{gy_c}$. Sustituyendo en la ecuación 10.34,

$$V_c = \sqrt{g y_c} = g^{1/2} y_c^{1/2} = \frac{(0.5y_c)^{2/3} S_c^{1/2}}{n}$$

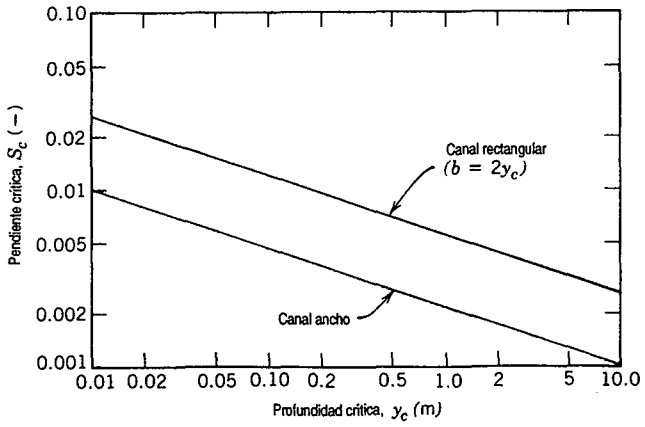
Por tanto,

$$S_c^{1/2} = \frac{n g^{1/2}}{(0.5)^{2/3} y_c^{1/6}} \quad \text{o} \quad S_c = \frac{n^2 g}{(0.5)^{4/3} y_c^{1/3}}$$

y

$$S_c = \frac{(0.015)^2(9.81)}{(0.5)^{4/3}} y_c^{-1/3} = 0.00556y_c^{-1/3} \tag{2}$$

Las pendientes calculadas a partir de las ecuaciones 1 y 2 se muestran en la siguiente figura:



Sólo hay una pendiente de la plantilla para flujo a profundidad normal a una relación de flujo, una geometría del canal y un coeficiente de rugosidad dados. Si la profundidad normal es la crítica, entonces la pendiente es como se dio antes. La comparación de las ecuaciones 1 y 2 muestra que para una profundidad determinada (y, por tanto, la misma relación de flujo por ancho unitario, puesto que $V_c = \sqrt{gy_c}$), la pendiente crítica para el canal rectangular es 2.52 veces más grande que para el canal plano, debido a la fricción adicional de los lados del canal.

10-6 FLUJO CON PROFUNDIDAD QUE VARÍA GRADUALMENTE

Cuando un flujo en canal abierto encuentra un cambio en la pendiente de la plantilla o se aproxima a la profundidad normal, la profundidad de dicho flujo varía gradualmente. El flujo con profundidad que varía gradualmente debe analizarse aplicando la ecuación de la energía a un volumen de control diferencial; el resultado es una ecuación diferencial que relaciona los cambios en la profundidad con respecto a la distancia a lo largo del flujo. La ecuación que resulta puede resolverse numéricamente si uno supone que la pérdida de carga en cada sección es la misma que para flujo a profundidad normal, con la velocidad y el radio hidráulico de la sección. Se supone que la profundidad del agua y la altura de la plantilla del canal cambian lentamente. Con el caso de flujo a profundidad normal, la velocidad se supone uniforme, y la distribución de presión se considera hidrostática en cada sección.

La ecuación de energía (ecuación 10.10) para flujo en canal abierto se aplicó a un volumen de control finito en la sección 10-3. Debemos adaptar esta ecuación al volumen de control diferencial, de longitud dx, mostrado en la figura 10.10. Por tanto,

$$\frac{V^2}{2g} + y + z = \frac{V^2}{2g} + d\left[\frac{V^2}{2g}\right] + y + dy + z + dz + dh_l$$

El cambio en la elevación de la plantilla, dz, puede escribirse en términos de la pendiente como $dz = -S_b dx$. La pérdida de carga, dh_l, puede escribirse en términos de la pendiente de la línea de gradiente de energía como $dh_l = S\,dx$, donde S es positiva debido a que LGE desciende en la dirección del flujo.

De tal modo, la ecuación diferencial de energía puede escribirse como

$$d\left[\frac{V^2}{2g}\right] + dy = (S_b - S)dx$$

o

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left[\frac{V^2}{2g}\right] = S_b - S \tag{10.42}$$

Para flujo en un canal rectangular de ancho b, $Q = Vby$ y $V = Q/by$, por lo que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{V^2}{2g}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{Q^2}{2gb^2y^2}\right] = -2\frac{Q^2}{2gb^2y^3}\frac{dy}{dx} = -\frac{V^2}{gy}\frac{dy}{dx}$$

Puesto que $Fr = V/\sqrt{gy}$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{V^2}{2g}\right] = -Fr^2\frac{dy}{dx}$$

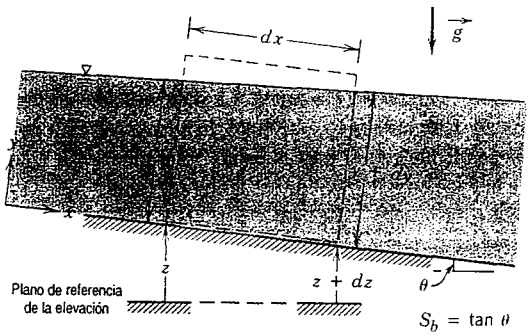


Fig. 10.10 Volumen de control diferencial empleado en el análisis de flujo que varía gradualmente.

Al sustituir en la ecuación 10.42, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_b - S}{1 - Fr^2} \tag{10.43}$$

La pendiente, S, de la línea de gradiente de energía se determina suponiendo que la relación de pérdida de carga en una sección es la misma que para un flujo a profundidad normal, que tiene la velocidad y el radio hidráulico de la sección.

De la ecuación 10.34, para flujo a profundidad normal,

$$V = \frac{R_h^{2/3} S^{1/2}}{n}$$

Al resolver para la pendiente de la línea de gradiente de energía, obtenemos

$$S = \frac{n^2 V^2}{R_h^{4/3}} \tag{10.44}$$

La ecuación 10.43, con S dada por la ecuación 10.44, es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal y de primer orden que describe la variación del perfil superficial del agua para flujos que varían gradualmente. El signo de la pendiente de la superficie del agua depende del flujo, es decir, si éste es subcrítico o supercrítico ($Fr < 1$ o $Fr > 1$) y de las magnitudes relativas de S y S_b.

10-6.1 Clasificación de perfiles superficiales

El comportamiento general de perfiles superficiales puede estudiarse más fácilmente para canales rectangulares anchos; para tales canales $b \gg y$ y $R_h \approx y$. En este caso, el perfil superficial está gobernado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_b - S}{1 - Fr^2} = \frac{S_b \left[1 - \left(\frac{S}{S_b}\right)\right]}{1 - Fr^2}$$

donde

$$S = \frac{n^2V^2}{y^{4/3}} = \frac{n^2Q^2}{b^2y^{10/3}} \tag{10.45}$$

Para una relación de flujo determinada a través de un canal rectangular, de ancho b y rugosidad especificada, la pendiente de la plantilla del canal se relaciona únicamente con la profundidad normal. De la ecuación 10.35,

$$Q = \frac{R_h^{2/3}S_b^{1/2}}{n}A = \frac{y_n^{2/3}S_b^{1/2}}{n}by_n$$

Al resolver para S_b, obtenemos

$$S_b = \frac{n^2Q^2}{b^2y_n^{10/3}} \tag{10.46}$$

(10.43)

Por tanto,

$$\frac{S}{S_b} = \left[\frac{y_n}{y}\right]^{10/3} \tag{10.47}$$

endo que la relación
ad normal, que tiene

El número de Froude puede escribirse en términos de la profundidad crítica. De acuerdo con la ecuación 10.17,

$$Fr = \left[\frac{y_c}{y}\right]^{3/2} \tag{10.17}$$

En ese caso, la pendiente de la superficie del agua para flujo en un canal rectangular ancho puede escribirse como

(10.44)

$$\frac{dy}{dx} = S_b\frac{[1-(y_n/y)^{10/3}]}{[1-(y_c/y)^3]} \tag{10.48}$$

liferencial ordinaria,
agua para flujos que
de del flujo, es decir,
ativas de S y S_b.

La ecuación 10.48 muestra que el signo de dy/dx depende sólo de la relación entre las profundidades y, y_n y y_c. Al discutir el flujo normal crítico (sección 10-5.4), observamos que

si $y_n > y_c$, entonces $S_b < S_c$: la pendiente es moderada (M)

si $y_n = y_c$, entonces $S_b = S_c$: la pendiente es crítica (C)

si $y_n < y_c$, entonces $S_b > S_c$: la pendiente es escalonada (S)

ilmente para canales
perfil superficial está

Además, la plantilla del canal puede ser horizontal (H), en cuyo caso $S_b = 0$, o la pendiente de la plantilla puede ser adversa (A), con $S_b < 0$.

Para una pendiente de la plantilla dada (designada por la letra M, C, S, H o A), la forma del perfil superficial depende de la profundidad real, y, relativa a y_n y y_c. Los números usados para designar las tres posibilidades son:

Curva 1: $y > y_n$ y $y > y_c$

Curva 2: $y_n > y > y_c$ o $y_c > y > y_n$

Curva 3: $y < y_n$ y $y < y_c$

Los perfiles superficiales posibles y sus propiedades para cada una de las cinco posibles pendientes de la plantilla del canal se resumen en la tabla 10.4.

a. Perfiles superficiales en canales con pendiente moderada ($S_b < S_c$)

Para pendientes moderadas de canal, $y_n > y_c$. Para el perfil $M1$, $y > y_n$ y consecuentemente, tanto el numerador como el denominador de la ecuación 10.48 son positivos; en ese caso $dy/dx > 0$. Cuando y aumenta, dy/dx se aproxima a S_b y la superficie libre se acerca a la horizontal. La curva del agua posterior, $M1$, se encuentra por lo general aguas arriba de una presa o estructura de control. Puesto que la superficie del agua real se encuentra arriba de la profundidad normal, pueden ocurrir inundaciones cerca de la presa si esto no se toma en cuenta en el diseño.

Para el perfil $M2$, $y_n > y > y_c$ y el flujo es subcrítico. El numerador de la ecuación 10.48 es negativo y el denominador es positivo; en ese caso, $dy/dx < 0$ y la profundidad disminuye en la dirección del flujo. Cuando y se acerca a y_c, la ecuación 10.48 indica que $dy/dx \rightarrow \infty$, lo cual no es posible. Con una fuerte curvatura superficial, las suposiciones de líneas de corriente rectas y variación de la presión hidrostática (inherentes en la ecuación 10.48) ya no son válidas. En consecuencia, el perfil se muestra con una línea interrumpida cuando la profundidad del flujo se aproxima a la crítica. La curva de trazo hacia abajo, $M2$, puede ocurrir aguas arriba de una sección donde la pendiente del canal cambia de moderada a crítica o supercrítica. Un ejemplo es el flujo sobre la cresta vertiente de vertedor.

Para el perfil $M3$, $y_n > y_c > y$ y el flujo es supercrítico. Tanto el numerador como el denominador de la ecuación 10.48 son negativos, de manera que dy/dx es positiva, y la profundidad aumenta en la dirección del flujo. El perfil $M3$, también una curva del agua posterior, ocurre en flujo supercrítico, esto es, aguas abajo de un vertedor o una compuerta de esclusa. Cuando se aproxima una profundidad de flujo crítica, ocurre una transición repentina de flujo supercrítico a subcrítico. Esta transición repentina es un *salto hidráulico*, el cual se analizará y estudiará con detalle en la sección 10-7.

b. Perfiles superficiales en canales con pendiente pronunciada ($S_b > S_c$)

Para pendientes pronunciadas de canal, $y_n < y_c$. Para el perfil $S1$, $y > y_c$ y por ello, tanto el numerador como el denominador de la ecuación 10.48 son positivos; en ese caso, $dy/dx > 0$. Además, cuando y se vuelve mucho más grande que y_c, entonces $dy/dx \rightarrow S_b$. Consecuentemente, la curva $S1$ se acerca a la horizontal.

El perfil $S2$, con $y_c > y > y_n$, es una curva de trazo hacia abajo con $dy/dx < 0$; el flujo es supercrítico. Conforme y se aproxima a y_c, la pendiente de la curva se aproxima a cero y la profundidad se acerca a la profundidad normal. El perfil $S2$ puede ocurrir aguas abajo de una transición, de moderada a pronunciada, en la pendiente del canal.

Para el perfil $S3$, $y < y_n < y_c$; el flujo es supercrítico, y la pendiente del perfil superficial es positiva. La profundidad aumenta en la dirección del flujo. Cuando y se aproxima a y_n, la pendiente de la superficie se acerca a cero. Esta curva de agua posterior puede resultar aguas abajo de una compuerta de esclusa, si la profundidad del flujo es menor que la profundidad normal en una pendiente pronunciada.

Tabla 10.4 Perfiles superficiales para flujo que varía gradualmente

Perfiles superficiales	Curva	Profundidad	Flujo	Pendiente de la superficie
Pendiente moderada, $S_b < S_c$	$M1$	$y > y_n > y_c$	Subcrítico	Positiva
	$M2$	$y_n > y > y_c$	Subcrítico	Negativa
	$M3$	$y_n > y_c > y$	Supercrítico	Positiva
Pendiente pronunciada, $S_b > S_c$	$S1$	$y > y_c > y_n$	Subcrítico	Positiva
	$S2$	$y_c > y > y_n$	Supercrítico	Negativa
	$S3$	$y_c > y_n > y$	Supercrítico	Positiva
Pendiente crítica, $S_b = S_c$	$C1$	$y > y_c = y_n$	Subcrítico	Positiva
	$C3$	$y < y_c = y_n$	Supercrítico	Positiva
Pendiente horizontal, $S_b = 0$	$H2$	$y > y_c$	Subcrítico	Negativa
	$H3$	$y < y_c$	Supercrítico	Positiva
Pendiente adversa, $S_b < 0$	$A2$	$y > y_c$	Subcrítico	Negativa
	$A3$	$y < y_c$	Supercrítico	Positiva

c. Perfiles superficiales en canales con pendiente crítica ($S_b = S_c$)

Para pendientes de canal críticas, $y_n = y_c$. La pendiente de un perfil superficial es positiva tanto para la curva $C1$ como para la $C3$. Para la curva $C1$, $y > y_c$; el flujo es subcrítico y la pendiente se

aproxima a S_b para valores grandes de y. En consecuencia, la curva $C1$ se acerca a la horizontal. Cuando $y < y_c$, el flujo es supercrítico. Conforme y se aproxima a y_c, mediante la aplicación de la regla de L'Hospital a la ecuación 10.48, puede demostrarse que la pendiente de la curva se aproxima a $\frac{10}{9}$.

No hay curva $C2$ para flujo que varíe gradualmente. Cuando $y = y_n = y_c$, tenemos flujo crítico a profundidad normal.

d. Perfiles superficiales en canales horizontales ($S_b = 0$)

En el caso de flujo en un canal horizontal, $S_b = 0$ y la profundidad normal es infinita. De tal modo, un perfil $H1$ no puede existir. Los perfiles $H2$ y $H3$ corresponden a las curvas $M2$ y $M3$ para $S_b = 0$. La ecuación 10.48 se vuelve indeterminada para $S_b = 0$ y $y_n \to \infty$. La pendiente del perfil puede determinarse a partir de la ecuación 10.43. Para el perfil $H2$, $y > y_c$, el flujo es subcrítico y la pendiente es negativa. Para el perfil $H3$, $y < y_c$, el flujo es supercrítico y la pendiente es positiva. Para ambos perfiles, la ecuación 10.43 predice una pendiente infinita cuando $y \to y_c$ ($Fr \to 1$).

Puesto que el flujo no puede continuar indefinidamente sobre una plantilla horizontal, estos perfiles pueden encontrarse sólo en secciones horizontales de canales más complejos. El perfil de trazo hacia abajo, $H2$, puede encontrarse a través de la parte superior de la cresta vertiente amplia del vertedor (sección 10-8.2) y el perfil $H3$ podría encontrarse sobre el piso plano de un dique tranquilo localizado aguas abajo de un vertedor o debajo de una compuerta de esclusa.

e. Perfiles superficiales en canales con pendiente adversa ($S_b < 0$)

Cuando la plantilla del canal tiene una pendiente adversa, S_b es negativa; no hay valor real de y_n. De la ecuación 10.43, concluimos que los perfiles $A2$ y $A3$ son similares a los perfiles $H2$ y $H3$.

Como en el caso de un canal horizontal, no es posible el flujo sostenido sobre un tramo de pendiente adversa. Un salto hidráulico puede ocurrir cuando se desarrolla el perfil $A3$.

10-6.2 Cálculo de perfiles superficiales

La tabla 10.4 ilustra la naturaleza general de los perfiles superficiales. Para determinar el perfil real para una relación de flujo y condiciones iniciales determinadas, debemos integrar numéricamente la ecuación diferencial gobernante,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left[\frac{V^2}{2g}\right] = S_b - S \tag{10.42}$$

Esta ecuación puede escribirse en término de la energía específica, E, como

$$\frac{dE}{dx} = S_b - S$$

Al escribir la ecuación en forma de diferencia finita, obtenemos

$$\Delta x = \frac{\Delta E}{(S_b - S)_m} = \frac{E(y + \Delta y) - E(y)}{(S_b - S)_m} \tag{10.49}$$

donde el subíndice m denota las propiedades medias sobre un tramo de canal de longitud Δx. La ecuación 10.49 puede emplearse para resolver respecto a la longitud de la sección del canal, Δx, la cual corresponde a una Δy dada o supuesta, siempre que S pueda determinarse. Si suponemos que la pérdida de energía local es igual a la del flujo a profundidad normal, podemos obtener S de la correlación de Manning, ya que S_h para flujo a profundidad normal es igual a S. De acuerdo con la ecuación 10.44,

$$S_m = \frac{n^2 V_m^2}{R_{h_m}^{4/3}} \tag{10.50}$$

donde $V_m = \frac{1}{2}[V(y + \Delta y) + V(y)]$ y $r_{h_m} = \frac{1}{2}[R_h(y + \Delta y) + R_h(y)]$.

El cálculo del perfil superficial debe empezar en un punto donde se conozcan las coordenadas. Los cálculos pueden proceder de aguas arriba o aguas abajo. Para emplear la ecuación 10.49, se supone una profundidad y_2 en un punto adyacente, Δx, alejado del punto inicial. Para la profundidad y_2, la velocidad V_2 se calcula a partir de la continuidad. De la ecuación 10.50 se calculan la velocidad promedio, V_m, y el radio hidráulico, y se determina la pendiente media de la línea del gradiente de energía. La distancia correspondiente, Δx, se calcula después directamente de la ecuación 10.49.

Evidentemente, los cálculos manuales utilizando la ecuación 10.49 serían laboriosos, ya que pequeños incrementos de y deben elegirse para permitir el empleo de las propiedades medias. Los cálculos son sencillos de programar para una solución por computadora; esto permite la evaluación para intervalos pequeños. El denominador de la ecuación 10.49 se anula cuando el flujo se aproxima a su profundidad normal (a profundidad normal, $S = S_b$). En consecuencia, el programa debe incluir una prueba del denominador.

El cálculo de perfiles superficiales se ilustra en el problema ejemplo 10.8.

EJEMPLO 10.8 Cálculo del perfil de superficie libre

Agua fluye en un canal rectangular de 5 m de ancho, hecho de concreto sin pulir y con $n = 0.015$. El canal contiene un tramo largo en el cual S_b es constante en $S_b = 0.020$. En una sección, el flujo se encuentra a una profundidad $y_1 = 1.5$ m, con velocidad $V_1 = 4.0$ m/s. Estime la posición del canal donde el flujo alcanza una profundidad de 0.9 m.

PROBLEMA EJEMPLO 10.8

DATOS: Un flujo de agua en un canal rectangular largo, con $S_b = 0.020$, $n = 0.015$ y $b = 5.0$ m. En la sección (1), $y_1 = 1.5$ m y $V_1 = 4.0$ m/s.

ENCUENTRE: La posición en el canal donde la profundidad del flujo es $y_2 = 0.9$ m.

SOLUCIÓN:

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en una sección

La localización donde $y_2 = 0.9$ m puede estar aguas arriba o aguas abajo de la sección (1), dependiendo de y_1, y_c y y_n.

La tasa de flujo es

$$Q = V_1 b y_1 = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 5\text{ m} \times 1.5\text{ m} = 30\text{ m}^3/\text{s}$$

En condiciones críticas, $V = V_c = \sqrt{g y_c}$, por lo que

$$Q = V_1 b y_1 = V_c b y_c = \sqrt{g y_c}\, b y_c = b \sqrt{g}\, y_c^{3/2}$$

Por tanto,

$$y_c = \left(\frac{Q}{b\sqrt{g}}\right)^{2/3} = \left[30\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{5\text{ m}} \times \frac{\text{s}}{\sqrt{9.81\text{ m}^{1/2}}}\right]^{2/3} = 1.54\text{ m}$$

Como $y < y_c$, el flujo es supercrítico.

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g y_1}} \quad 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\left[9.85\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1.5\text{ m}\right]^{1/2}} = 1.04 > 1$$

La profundidad normal a esta pendiente, la rugosidad y la descarga pueden determinarse de

$$Q = \frac{R_h^{2/3} S_b^{1/2}}{n} A = \frac{\left[\dfrac{y_n}{1 + 2y_n/b}\right]^{2/3} S_b^{1/2}}{n} b y_n = 47.14 y_n \left(\frac{y_n}{1 + 2y_n/b}\right)^{2/3}$$

Por iteración puede encontrarse que $y_n = 0.858$ m.

De tal modo $y_c > y > y_n$, por lo que el flujo se encuentra sobre una curva *S*2. Esperamos que la profundidad *disminuya* en la dirección del flujo; y debe acercarse asintóticamente a $y_n = 0.858$ m.

La ecuación 10.49 puede utilizarse para resolver numéricamente respecto al tramo del canal, Δx, requerido para cambiar el nivel de la superficie en una cantidad supuesta, Δy. De este modo, puesto que S_b = constante, $(S_b - S)_m = S_b - S_m$, y la ecuación 10.49 se transforma en

Ecuación de cálculo:
$$\Delta x = \frac{E(y + \Delta y) - E(y)}{S_b - S_m}$$

Para aplicar esta ecuación debemos expresar E como una función de y y debemos evaluar S_m. Como $V = Q/by$, entonces

$$E = \frac{V^2}{2g} + y = \frac{Q^2}{2g b^2 y^2} + y$$

y

$$S_m = \frac{n^2 V_m^2}{R_{h_m}^{4/3}} \tag{10.50}$$

donde $V_m = \frac{1}{2}[V(y + \Delta y) + V(y)]$, y $R_{h_m} = \frac{1}{2}[R_h(y + \Delta y) + R_h(y)]$.

Al calcular las ecuaciones para la cantidades en términos de y, se obtiene

$$V = \frac{Q}{by} = \frac{V_1 b y_1}{by} = V_1 \frac{y_1}{y} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 1.5\text{ m} \times \frac{1}{y} = \frac{6.000}{y}$$

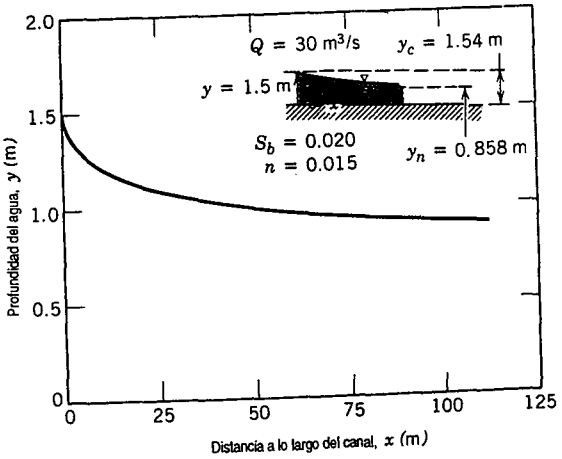
$$E = \frac{Q^2}{2gb^2y^2} + y = \frac{1}{2} \times (30)^2 \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2}{9.807\ \text{m}} \times \frac{1}{(5)^2\ \text{m}} \times \frac{1}{y^2} + y = \frac{1.835}{y^2} + y$$

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{by}{b+2y} = \frac{y}{1+2y/b} = \frac{y}{1+2y \times \dfrac{1}{5\ \text{m}}} = \frac{y}{1+0.4y}$$

Los cálculos pueden tabularse como se muestra en la siguiente tabla. (Se incluyeron cuatro cifras significativas para reducir errores de redondeo.)

y (m)	V (m/s)	E (m)	R_h (m)	R_{h_m} (m)	V_m (m/s)	S_m (–)	Δx (m)	x (m)
1.5	4.000	2.316	0.9375					0.0
				0.9177	4.143	0.004330	1.321	
1.4	4.286	2.336	0.8974					1.32
				0.8766	4.451	0.005132	3.378	
1.3	4.615	2.386	0.8553					4.70
				0.8333	4.808	0.006632	6.624	
1.2	5.000	2.475	0.8108					11.3
				0.7877	5.227	0.008452	12.32	
1.1	5.455	2.617	0.7639					23.6
				0.7394	5.727	0.01104	24.39	
1.0	6.000	2.835	0.7143					48.0
				0.6884	6.333	0.01485	64.15	
0.9	6.667	3.166	0.6618					112.2

A continuación se presenta una gráfica de los resultados. El diagrama muestra que la profundidad del agua desciende rápidamente al principio, para luego aproximarse asintóticamente a $y_n = 0.858$ m, en un punto alejado aguas abajo.



La exactitud de los resultados depende de *a*) la exactitud del modelo matemático y *b*) la técnica utilizada en la integración numérica. Las suposiciones de curvatura despreciable de la línea de corrien-

te (y de distribución de presión hidrostática) son cuestionables entre $y = 1.5$ y $y = 1.3$ m, donde la profundidad cambia rápidamente. Sin embargo, la distancia del canal durante este intervalo es sólo 4.7 m, la cual es una pequeña parte del tramo total. Repitiendo los cálculos con la mitad del intervalo de profundidad ($\Delta y = 0.05$ m), el tramo total aumenta a 117.7 m, es decir, un aumento del cinco por ciento. Véanse [6] y [7] para mayores detalles acerca de los métodos numéricos.

10-7 EL SALTO HIDRÁULICO

Hemos mostrado que el flujo en canal abierto puede ser subcrítico ($Fr < 1$) o supercrítico ($Fr > 1$). Para el flujo subcrítico, las perturbaciones ocasionadas por un cambio en la pendiente de la pantilla o en la sección transversal del flujo, pueden moverse aguas arriba y aguas abajo; el resultado es un suave ajuste del flujo. Cuando el flujo en una sección es supercrítico, y las condiciones aguas abajo requieren un cambio a flujo subcrítico, la necesidad del cambio no puede comunicarse aguas arriba. De manera que un cambio gradual, con una suave transición a través del punto crítico, no es posible. La transición de flujo supercrítico a subcrítico ocurre abruptamente a través de un salto hidráulico. El cambio abrupto en la profundidad implica una pérdida significativa de energía mecánica a través del mezclado turbulento.

Las características generales de un salto hidráulico se bosquejan en la figura 10.11. Analizaremos el fenómeno del salto aplicando las ecuaciones básicas al volumen de control mostrado en el dibujo. Los experimentos indican que el salto ocurre a lo largo de una distancia relativamente corta; la longitud máxima adimensional del salto, L/y_2, es aproximadamente 6.1 [8]. En vista de esta corta longitud, es razonable suponer que las fuerzas de fricción que actúan sobre el volumen de control son despreciables comparadas con las fuerzas de presión. Aunque los saltos hidráulicos pueden ocurrir sobre superficies inclinadas, por simplicidad suponemos una plantilla horizontal y elegimos un volumen de control de ancho b.

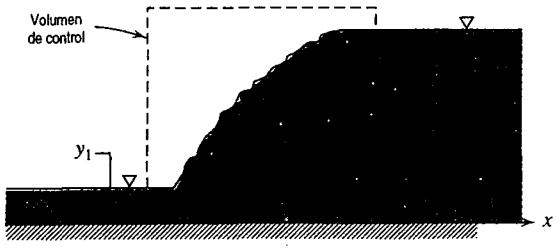


Fig. 10.11 Diagrama esquemático del salto hidráulico; se muestra el volumen de control utilizado para el análisis.

10-7.1 Ecuaciones básicas

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

1.3 m, donde la
ervalo es sólo 4.7
l del intervalo de
cinco por ciento.

upercrítico ($Fr >$
a pendiente de la
/ aguas abajo; el
upercrítico, y las
cambio no puede
ansición a través
irre abruptamente
lica una pérdida

a 10.11. Analiza-
ıtrol mostrado en
cia relativamente
l [8]. En vista de
sobre el volumen
saltos hidráulicos
ıtilla horizontal y

(4.13)

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en una sección
3) Flujo incompresible

Por tanto,

$$0 = \{-|\rho V_1 b y_1|\} + \{|\rho V_2 b y_2|\} \quad \text{o} \quad V_1 y_1 = V_2 y_2 \tag{10.51}$$

b. Ecuación del momento

Ecuación básica: $$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(4)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} u\rho \, d\forall + \int_{SC} u\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposiciones: 4) $F_{B_x} = 0$
5) Distribución de presión hidrostática, por lo que

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g, \text{ y } p = p_{atm} + \rho g(y_s - y)$$

6) Se desprecia la fuerza de fricción, F_f

La ecuación de momento se convierte en

$$\int_0^{y_1} [p_{atm} + \rho g(y_1 - y)] b \, dy - \int_0^{y_2} [p_{atm} + \rho g(y_2 - y)] b \, dy$$

$$+ p_{atm} b(y_2 - y_1) - \cancel{F_f}^{\approx 0(6)} = V_1\{-|\rho V_1 b y_1|\} + V_2\{|\rho V_2 b y_2|\}$$

o

$$p_{atm} b y_1 + \rho g \left(y_1^2 - \frac{y_1^2}{2}\right) b - p_{atm} b y_2 - \rho g \left(y_2^2 - \frac{y_2^2}{2}\right) b$$

$$+ p_{atm} b(y_2 - y_1) = -\rho V_1^2 b y_1 + \rho V_2^2 b y_2$$

Finalmente, después de simplificar y dividir entre $\rho g b$,

$$\frac{V_1^2}{g} y_1 + \frac{y_1^2}{2} = \frac{V_2^2}{g} y_2 + \frac{y_2^2}{2} \tag{10.52}$$

c. Ecuación de energía

La ecuación de energía para flujo en canal abierto se dedujo en la sección 10-3 como

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + z_2 + h_l \tag{10.10}$$

Para el salto hidráulico de la figura 10.11, la plantilla del canal es horizontal, y la ecuación de energía se transforma en

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + h_l \tag{10.53}$$

En términos de la energía específica, la ecuación 10.53 se vuelve

$$E_1 = E_2 + h_l \tag{10.54}$$

Puesto que h_l es positiva, la ecuación 10.54 muestra que el flujo que abandona un salto hidráulico tiene una energía específica menor que la del flujo entrante.

Las ecuaciones de continuidad y momento, ecuaciones 10.51 y 10.52, pueden resolverse para y_2 en términos de las condiciones aguas arriba (sección 10-7.2). De tal modo, la pérdida de carga a través del salto también puede calcularse en términos de las condiciones aguas arriba (sección 10-7.3).

10-7.2 Aumento de la profundidad a través de un salto hidráulico

Para determinar la profundidad aguas abajo o *siguiente* en términos de las condiciones aguas arriba de un salto hidráulico, empezamos eliminando V_2 de la ecuación del momento. De la continuidad, $V_2 = V_1 y_1 / y_2$; por tanto, la ecuación 10.52 puede escribirse como

$$\frac{V_1^2 y_1}{g} + \frac{y_1^2}{2} = \frac{V_1^2 y_1}{g}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) + \frac{y_2^2}{2}$$

Al rearreglar esta ecuación obtenemos

$$y_2^2 - y_1^2 = \frac{2V_1^2 y_1}{g}\left(1 - \frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{2V_1^2 y_1}{g}\left(\frac{y_2 - y_1}{y_2}\right)$$

La división de ambos lados entre el factor común $(y_2 - y_1)$ produce

$$y_2 + y_1 = \frac{2V_1^2 y_1}{g y_2}$$

Multiplicando por y_2/y_1^2,

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{2V_1^2}{g y_1} = 2Fr_1^2$$

Resolviendo para y_2/y_1 y utilizando la fórmula cuadrática (eligiendo la raíz positiva, ya que y_2/y_1 debe ser positiva), encontramos que

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right) \tag{10.55}$$

De tal modo, la razón de las profundidades aguas abajo y aguas arriba a través de un salto hidráulico sólo es función del número de Froude aguas arriba. Las profundidades y_1 y y_2 se conocen como profundidades *conjugadas*. De la ecuación 10.55, vemos que un aumento en la profundidad requiere un número de Froude aguas arriba mayor que uno. La confirmación experimental de la ecuación 10.55 se muestra en la figura 10.12.

Los saltos hidráulicos se emplean a menudo para disipar la energía debajo de vertedores, como un medio de prevenir la erosión del fondo o los lados de canales artificiales o naturales. La pérdida de carga debida a un salto hidráulico se trata en la siguiente sección.

10-7.3 Pérdida de carga a través de un salto hidráulico

La pérdida de carga a través de un salto hidráulico puede calcularse de la ecuación de energía

$$h_l = E_1 - E_2 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 - \left[\frac{V_2^2}{2g} + y_2\right] \tag{10.54}$$

De la continuidad, $V_2 = V_1 y_1 / y_2$; por tanto

$$h_l = \frac{V_1^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right] + (y_1 - y_2)$$

o

$$\frac{h_l}{y_1} = \frac{Fr_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right] + \left[1 - \frac{y_2}{y_1}\right] \tag{10.56}$$

Resolviendo la ecuación 10.55 para Fr_1, en términos de y_2/y_1, y sustituyendo en la ecuación 10.56, obtenemos (después de un considerable manejo algebraico),

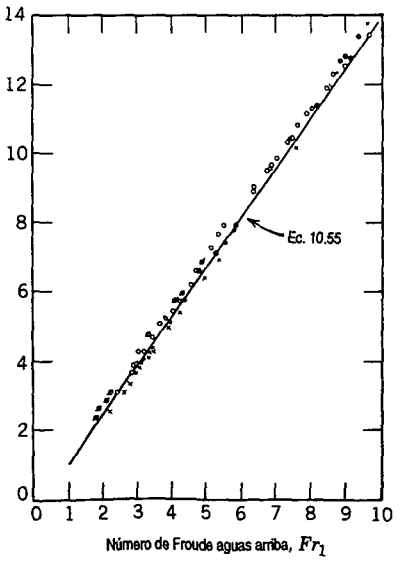


Fig. 10.12 Comparación de resultados teóricos y experimentales para la relación de profundidades a través de un salto hidráulico. (Datos de [8], utilizados con autorización.)

$$\frac{h_l}{y_1} = \frac{1}{4}\frac{\left[\frac{y_2}{y_1} - 1\right]^3}{\frac{y_2}{y_1}} \tag{10.57}$$

Puesto que h_l es positiva, la ecuación 10.57 muestra que y_2/y_1 debe ser mayor que uno.

La energía específica, E_1, puede escribirse como

$$E_1 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = y_1\left[\frac{V_1^2}{2gy_1} + 1\right] = y_1\frac{(Fr_1^2 + 2)}{2}$$

Adimensionalizando h_l en E_1, entonces

$$\frac{h_l}{E_1} = \frac{1}{2}\frac{\left[\frac{y_2}{y_1} - 1\right]^3}{\frac{y_2}{y_1}[Fr_1^2 + 2]} \tag{10.58}$$

La razón de profundidad está dada en términos de Fr_1 por medio de la ecuación 10.55. De tal manera, h_l/E_1 puede escribirse como una función del número de Froude de entrada. El resultado es

$$\frac{h_l}{E_1} = \frac{\left[\sqrt{1 + 8\,Fr_1^2} - 3\right]^3}{8\left[\sqrt{1 + 8\,Fr_1^2} - 1\right][Fr_1^2 + 2]} \tag{10.59}$$

El efecto del número de Froude de entrada sobre la pérdida de carga se muestra en forma adimensional en la figura 10.13. Los datos experimentales se correlacionan bien con la predicción de la ecuación 10.59; la figura 10.13 muestra que más del 70 por ciento de la energía mecánica de la corriente de entrada se disipa en saltos con $Fr_1 > 9$.

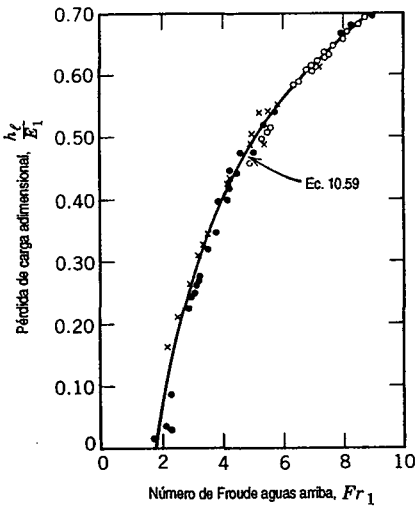


Fig. 10.13 Pérdida de carga a través de un salto hidráulico como una función del número de Froude. (Datos de [8], utilizados con autorización.)

(10.57)

vor que uno.

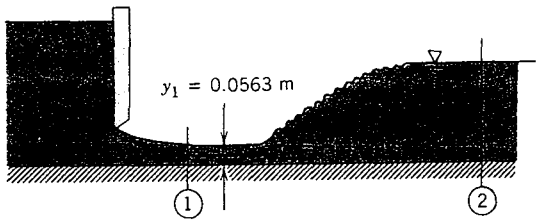
La inspección de la ecuación 10.59 indica que si $Fr_1 = 1$, entonces $h_l = 0$. Se predicen valores imaginarios para $Fr_1 < 1$. Puesto que h_l debe ser positiva en cualquier flujo real, un salto hidráulico sólo puede ocurrir en flujo supercrítico con $Fr > 1$. El flujo aguas abajo de un salto siempre es subcrítico.

EJEMPLO 10.9 Análisis de un salto hidráulico

Un salto hidráulico ocurre sobre una plantilla horizontal inmediatamente aguas abajo de la compuerta de esclusa del problema ejemplo 10.3. Calcule la profundidad siguiente después del salto hidráulico. Evalúe la pérdida de carga a través del salto.

PROBLEMA EJEMPLO 10.9

DATOS: Un flujo bajo una compuerta de esclusa en las condiciones mostradas.



ENCUENTRE: *a*) Calcule la profundidad siguiente aguas abajo.
b) Evalúe la pérdida de carga a través del salto.

SOLUCIÓN:

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo uniforme en las secciones ① y ②

Aplique directamente las ecuaciones 10.55 y 10.59.

Ecuaciones de cálculo:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1\right] \tag{10.55}$$

$$\frac{h_l}{E_1} = \frac{\left[\sqrt{1+8Fr_1^2} - 3\right]^3}{8\left[\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1\right][Fr_1^2 + 2]} \tag{10.59}$$

El número de Froude del flujo que entra al salto es

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = 5.33\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\left[9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.0563\ \text{m}\right]^{1/2}} = 7.17$$

Por tanto,

(10.58)

ecuación 10.55. De tal
e entrada. El resultado

(10.59)

se muestra en forma
bien con la predicción
a energía mecánica de

és de un salto
ición del número de
ıtilizados con

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8(7.17)^2} - 1\right] = 9.65$$

y

$$y_2 = 9.65 y_1 = 9.65 \times 0.0563 \text{ m} = 0.543 \text{ m} \longleftarrow y_2$$

Además,

$$\frac{h_l}{E_1} = \frac{\left[\sqrt{1 + 8(7.17)^2} - 3\right]^3}{8\left[\sqrt{1 + 8(7.17)^2} - 1\right][(7.17)^2 + 2]} = 0.629$$

Como

$$E_1 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{1}{2} \times (5.33)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2}{9.81 \text{ m}} + 0.0563 \text{ m} = 1.50 \text{ m}$$

entonces

$$h_l = 0.629 E_1 = (0.629)1.50 \text{ m} = 0.944 \text{ m} \longleftarrow h_l$$

Este salto hidráulico disipa cerca del 63 por ciento de la energía específica del flujo de entrada.

10-8 MEDICIONES DE FLUJO EN CANAL ABIERTO

Se disponen dos métodos básicos para medir las relaciones de flujo en canales abiertos. En una sección crítica, la velocidad de flujo es igual a la velocidad crítica, así que la relación de flujo puede calcularse a partir de una medición de profundidad. En una obstrucción en un canal (un *vertedor*), la profundidad del flujo se correlaciona con la relación de flujo.

10-8.1 Vertedores de cresta vertiente afilada

El flujo sobre un vertedor de cresta vertiente pronunciada se bosqueja en la figura 10.14. Es tentador aplicar la ecuación de Bernoulli desde un punto lejano, aguas arriba, al flujo en la capa de agua del vertedor. Cerca de la cresta vertiente del vertedor, las líneas de corriente tienen una gran curvatura, lo que hace que sean pobres las suposiciones de flujo uniforme y variación de presión hidrostática. En consecuencia, el cálculo de la relación de flujo sobre un vertedor de cresta vertiente pronunciada requiere el uso de un coeficiente de descarga determinado empíricamente. Se han ejecutado muchos experimentos en una variedad de configuraciones de vertedores. La figura 10.15 ilustra tres tipos principales de vertedores de cresta vertiente pronunciada.

El área de flujo a través de un vertedor horizontal es proporcional a la diferencia de altura, $y_1 - z_w$. De tal modo,

$$A \sim b\left(\frac{L}{b}\right)(y_1 - z_w)$$

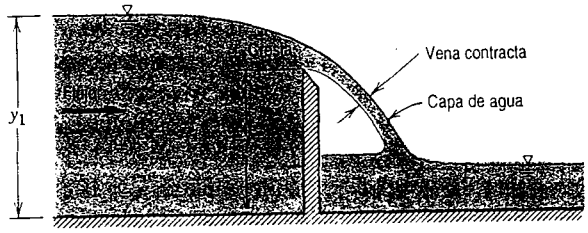


Fig. 10.14 Vista de la sección de flujo sobre un vertedor de cresta vertiente afilada.

Si ignoramos la velocidad aguas arriba, la velocidad a través del vertedor puede determinarse de manera aproximada a partir de la ecuación de Bernoulli como

$$V \approx \sqrt{2g(y_1 - z_w)} \sim \sqrt{g(y_1 - z_w)}$$

La combinación de estas ecuaciones produce

$$Q \sim b\left(\frac{L}{b}\right)\sqrt{g}(y_1 - z_w)^{3/2}$$

Introduciendo el coeficiente de descarga, C_d, determinado empíricamente para explicar la velocidad no uniforme, la contracción de la corriente y los efectos friccionantes, entonces

$$Q = C_d\, b\left(\frac{L}{b}\right)\sqrt{g}(y_1 - z_w)^{3/2} \tag{10.60}$$

Se han sugerido muchas correlaciones para el coeficiente de descarga. Una simple ecuación de la forma

$$C_d = 0.59 + 0.08\left[\frac{y_1}{z_w} - 1\right] \tag{10.61}$$

produce resultados satisfactorios en muchos casos [9, 10].

La capa de agua (figura 10.14) de un vertedor horizontal de ancho máximo debe aerearse

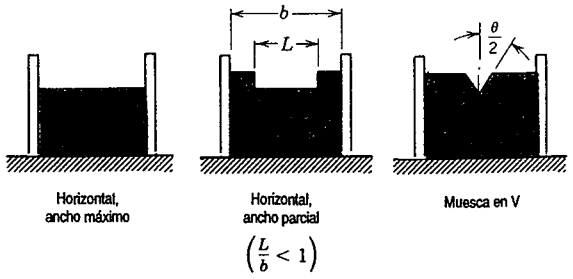


Fig. 10.15 Tipos principales de vertedores de crestas vertientes afiladas.

(ventilarse a la atmósfera). Si esto no sucede, el arrastre forma una región de baja presión, lo que provoca que la descarga aumente para una carga dada.

La aereación es automática cuando el vertedor abarca sólo una parte del canal. Sin embargo, la contracción adicional de la corriente es provocada por los bordes verticales afilados de la cresta vertiente. Para cálculos aproximados [11], la longitud, L, utilizada en la ecuación 10.60 puede reducirse en 0.2 $(y_1 - z_w)$.

El área de flujo sobre la cresta vertiente de muesca en V, es proporcional al cuadrado de la diferencia de altura

$$A \sim (y_1 - z_w)\tan\frac{\theta}{2}(y_1 - z_w) = \tan\frac{\theta}{2}(y_1 - z_w)^2$$

La velocidad se relaciona con $(y_1 - z_w)$ por medio de

$$V \sim \sqrt{g(y_1 - z_w)}$$

lo cual sugiere que

$$Q = C_d \tan\frac{\theta}{2}\sqrt{g}(y_1 - z_w)^{5/2} \tag{10.62}$$

Los experimentos muestran que $C_d \approx 0.44$ para un vertedor de muesca en V [9, 10].

La selección de un vertedor para una situación determinada depende del rango de la relación de flujo que se va a medir, la precisión deseada y de si el vertedor puede calibrarse después de la instalación. Las ecuaciones 10.60 y 10.62 son aplicables sólo para $y_1 - z_w$ mayores que aproximadamente 0.06 m (~ 0.2 pies). Esto sugiere que un vertedor de muesca en V debe elegirse para relaciones de flujo pequeñas. Para la repetibilidad, la cresta vertiente del vertedor debe mantenerse afilada. La limpieza periódica de las incrustaciones o moho es sencilla en el laboratorio pero puede ser más difícil en el campo.

Cuando se calibra en el lugar empleando mediciones de volumen o tanques de peso, la exactitud de un vertedor en uso está limitada sólo por la exactitud de la carga medida. Los errores en esta última pueden reducirse empleando un pozo en el cual el agua no se mueva y un medidor de gancho, como se muestra en la figura 10.16. La superficie puede localizarse con gran precisión observando sobre ella de manera casi horizontal y notando la reflexión del punto del gancho en la superficie.

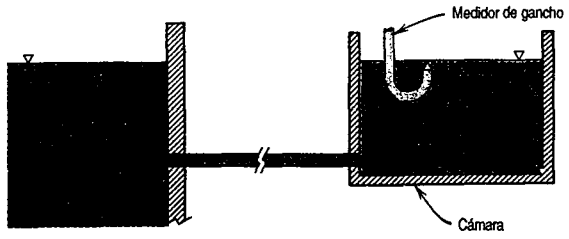


Fig. 10.16 Empleo de una cámara de agua sin movimiento y de un medidor de gancho para mediciones precisas de nivel de líquido.

Las incertidumbres de las mediciones para vertedores dependen de muchos factores. Las relaciones de flujo pueden medirse hasta ±5 por ciento. Consulte las referencias que van de la [9] a la [11] si se requieren resultados más precisos.

EJEMPLO 10.10 Flujo sobre un vertedor de cresta vertiente afilada

Un vertedor horizontal de cresta vertiente afilada y ancho máximo, se va a utilizar en un arreglo de laboratorio para controlar y medir una relación de flujo de agua, que se espera variará entre 200 y 300 gpm. El ancho, b, será tal que el cambio de nivel entre estas relaciones de flujo se mantendrá en 0.10 pies.

PROBLEMA EJEMPLO 10.10

DATOS: Un vertedor horizontal (ancho máximo) y una relación de flujo de agua entre 200 y 300 gpm.

ENCUENTRE: El ancho, b, tal que $\Delta z_{hi} - \Delta z_{lo} < 0.10$ pies.

SOLUCIÓN:
De la sección 10-8.1,

$$Q = C_d b \left(\frac{L}{b}\right) \sqrt{g}(y_1 - z_w)^{3/2} \tag{10.60}$$

y

$$C_d = 0.59 + 0.08\left[\frac{y_1}{z_w} - 1\right] \tag{10.61}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) $L/b = 1$
4) Desprecie el segundo término en la ecuación 10.61, como una primera aproximación, suponiendo que $\Delta z = y_1 - z_w \ll z_w$

En ese caso, $C_d = 0.59$, y de la ecuación 10.60,

$$y_1 - z_w = \Delta z = \left(\frac{Q}{C_d L \sqrt{g}}\right)^{2/3}$$

Por tanto,

$$\Delta z_{hi} - \Delta z_{lo} = \left[\frac{1}{0.59 b \sqrt{g}}\right]^{2/3} [Q_{hi}^{2/3} - Q_{lo}^{2/3}]$$

Por último,

$$b = \frac{1}{0.59\sqrt{g}} \frac{\left[Q_{hi}^{2/3} - Q_{lo}^{2/3}\right]^{3/2}}{\left[\Delta z_{hi} - \Delta z_{lo}\right]^{3/2}}$$

Las relaciones de flujo son

$$Q_{hi} = 300\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48\ \text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} = 0.668\ \text{pie}^3/\text{s}$$

y

$$Q_{lo} = 200\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48\ \text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} = 0.446\ \text{pie}^3/\text{s}$$

Sustituyendo,

$$b = \frac{\text{s}}{0.59(32.2)^{1/2}\ \text{pie}^{1/2}} \frac{[(0.668)^{2/3} - (0.446)^{2/3}]^{1/2}}{(0.10)^{3/2}\ \text{pie}^{3/2}} \frac{\text{pie}^3}{\text{s}} = 0.724\ \text{pies}$$

La ecuación 10.60 es válida si el cambio en la elevación, Δz, es mayor que 0.2 pies. Al resolver para Δz a la relación de flujo más baja, obtenemos

$$\Delta z = \left[\frac{Q}{c_d\, b\, \sqrt{g}}\right]^{2/3} = \left[4.46\ \frac{\text{pie}^3}{\text{s}} \times \frac{1}{0.59} \times \frac{1}{0.724\ \text{pies}} \times \frac{\text{s}}{(32.2)^{1/2}\ \text{pie}^{1/2}}\right]^{2/3}$$

$$\Delta z = 0.34\ \text{pies}$$

la cual satisface el criterio.

Para que el segundo término en la ecuación 10.61 sea despreciable,

$$0.08\left[\frac{y_1}{z_w} - 1\right] = (0.08)\frac{y_1 - z_w}{z_w} = (0.08)\frac{\Delta z}{z_w} < 0.01$$

por lo que z_w debe ser

$$z_w > 8\Delta z = 8 \times 0.324\ \text{pies} = 2.59\ \text{pies}$$

10-8.2 Vertedores de cresta vertiente amplia

El flujo sobre un vertedor de cresta vertiente amplia se bosqueja en la figura 10.17. Cuando el nivel de agua aguas abajo es suficientemente bajo, la profundidad crítica, y_c, se alcanza en algún punto en la parte superior del vertedor. Ahí $Fr = 1$, por lo que

$$V_c = \sqrt{g y_c}$$

Para un canal ancho, la descarga está dada por

$$Q \approx VA = \sqrt{g y_c}\, b y_c = b\sqrt{g}\, y_c^{3/2}$$

o

$$Q = C_d\, b\sqrt{g}\, y_c^{3/2} \qquad (10.63)$$

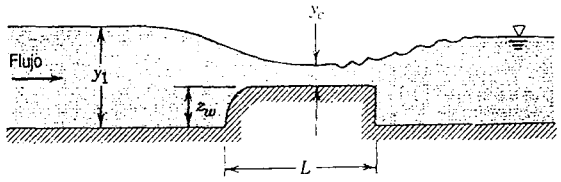


Fig. 10.17 Flujo sobre un vertedor de cresta vertiente ancha.

donde C_d es un coeficiente de descarga empírico. Datos experimentales [9, 10] indican que cuando $(y_1 - z_w)/L > 0.2$, el coeficiente de descarga está entre 0.95 y 0.98.

Cuando un vertedor de cresta vertiente amplia es largo y el nivel del agua es lo suficientemente bajo, ocurre una *caída libre* [11]. Como se muestra en la figura 10.18, la profundidad del agua en el margen, y_b, es menor que la profundidad crítica, y_c. Además, y_c se localiza a cierta distancia, L_c, aguas arriba del margen. Algunos experimentos [11] indican que

$$y_b \approx 0.72y_c \qquad \text{y} \qquad L_c \approx 3.5y_c$$

De tal modo, si se conoce la profundidad del margen, y_b, entonces es posible calcular y_c y la relación de flujo.

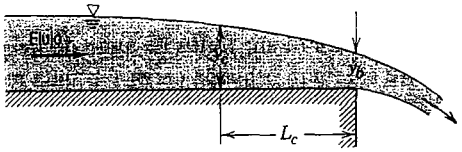


Fig. 10.18 Flujo sobre un vertedor de cresta vertiente ancha con caída libre.

10-8.3 Compuertas de esclusa

Una compuerta de esclusa se emplea a menudo para regular la descarga. El flujo debajo de una compuerta de esclusa típica se muestra en la figura 10.19, tanto para condiciones de nivel de agua bajo como alto.

Para el nivel de agua bajo, como se muestra en la figura 10.19*a*, la vena contracta es la sección de área mínima en la corriente de descarga. Hay líneas de corriente rectas y paralelas, por lo que la distribución de presión es hidrostática. Si suponemos flujo sin fricción, la ecuación de Bernoulli puede aplicarse entre las secciones ① y ②. Introduciendo un coeficiente de descarga empírico, C_d, la relación de flujo puede escribirse

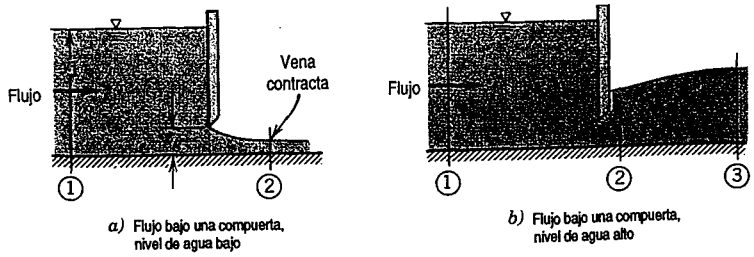


Fig. 10.19 Flujo bajo una compuerta de esclusa.

(10.63)

$$Q = C_d b z_g \sqrt{2 g y_1} \tag{10.64}$$

Los experimentos [11] muestran que $0.6 < C_d < 0.9$.

Para nivel de agua alto, como se muestra en la figura 10.19*b*, el análisis del flujo bajo una compuerta de esclusa es imposible. La forma general de la ecuación 10.64 puede utilizarse con un valor apropiado de C_d, por ejemplo, de [11].

10-8.4 Canales críticos

Es posible efectuar mediciones precisas de flujo utilizando vertedores. Sin embargo, los problemas prácticos que limitan su campo de aplicación incluyen:

- Fallas por cieno o desechos
- Deterioro de los bordes afilados
- Grandes pérdidas de carga

Estos problemas pueden superarse empleando un medidor de flujo crítico, tal como el canal Parshall, mostrado en la figura 10.20.

El canal Parshall se emplea ampliamente para medir flujos de agua de irrigación porque se mantiene limpio por su propio uso, requiere sólo una pequeña carga y brinda resultados razonablemente precisos respecto a un amplio rango de relaciones de flujo [12]. Un canal Parshall está integrado por tres secciones: la sección aguas arriba tiene un piso plano y paredes convergentes, la sección central (o garganta) tiene paredes paralelas y piso con inclinación hacia abajo y, por último, la sección de salida tiene paredes divergentes y piso con inclinación hacia arriba. Las dimensiones reales y la localización de las secciones de medición se basan en el ancho de la garganta, la cual puede variar de 75 mm a muchos metros.

Cuando es bajo el nivel aguas abajo, el flujo es crítico. La relación de flujo puede determinarse a partir de tablas si se conoce y_a. Cuando $y_b > 0.7 y_a$, ambas profundidades deben medirse. Se disponen tablas y diagramas para muchos tamaños de canales Parshall [12].

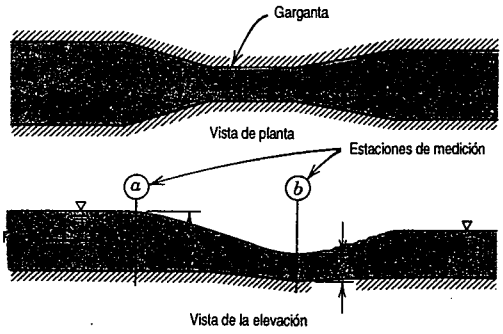


Fig. 10.20 Canal Parshall para medir la relación de flujo en un canal abierto.

10-9 RESUMEN DE

Después d

1. Defir
   núme
   canal
   perín
   radio
   flujo
   celer
   flujo
   flujo
   flujo
   ener
   prof
   flujc
   prof
2. Cal
   de
3. De
   que
4. Ap
   la
5. Ev
   cai
   de
6. De
   es
7. Er
   cc
   cr
8. D
   pı
9. A
   d
   d
10. A
    p
11. I
    v
12. I

REFERENCIAS

1.

(10.64)

s del flujo bajo una
de utilizarse con un

argo, los problemas

, tal como el canal

rrigación porque se
a resultados razona-
a canal Parshall está
redes convergentes,
a hacia abajo y, por
on hacia arriba. Las
a en el ancho de la

puede determinarse
deben medirse. Se

a medir la relación
al abierto.

10-9 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de completar el estudio del capítulo 10, usted será capaz de efectuar lo siguiente:

1. Definir los términos:

número de Froude	línea de gradiente de energía
canal prismático	línea de gradiente hidráulico
perímetro mojado	coeficiente de rugosidad de Manning
radio hidráulico	sección transversal óptima de un canal
flujo secundario	profundidad crítica
celeridad de onda	pendiente moderada
flujo subcrítico	pendiente crítica
flujo crítico	pendiente escalonada
flujo supercrítico	salto hidráulico
energía específica	profundidad siguiente
profundidades alternativas	profundidades conjugadas
flujo uniforme	caída libre
profundidad normal	

2. Calcular el área de la sección transversal, el perímetro mojado y el radio hidráulico para formas comunes de canal abierto.
3. Deducir una ecuación para la velocidad de propagación de una onda de superficie libre aislada y mostrar que para pequeñas amplitudes $c = \sqrt{gy}$.
4. Aplicar la fórmula del volumen de control de la ecuación de energía a flujo en canal abierto. Analizar la variación en la energía específica para flujo sin fricción y para flujo a profundidad normal.
5. Evaluar el efecto de los cambios en el contorno del fondo del canal sobre flujos sin fricción. Dibujar los cambios en el perfil superficial para flujos subcrítico y supercrítico sobre una protuberancia y una depresión en el fondo del canal.
6. Deducir las condiciones requeridas para maximizar la relación de flujo a través de una compuerta de esclusa, suponiendo flujos sin fricción.
7. Emplear la correlación de Manning para la velocidad, con el fin de evaluar la profundidad normal correspondiente a un flujo uniforme sobre una plantilla de pendiente constante. Calcular la pendiente crítica para una relación de flujo determinado.
8. Definir y calcular la sección transversal del canal o la profundidad del flujo óptimas para flujo a profundidad normal.
9. Aplicar las ecuaciones básicas a un volumen de control diferencial para evaluar la relación de cambio del perfil superficial en flujo que varía gradualmente. Clasificar y calcular los perfiles superficiales para diversas pendientes de la plantilla en flujos subcrítico y supercrítico.
10. Analizar el flujo a través de un salto hidráulico para calcular el nivel de la superficie aguas abajo y la pérdida de carga a través del salto.
11. Determinar la relación de flujo volumétrico a partir de mediciones de altura para vertedores de cresta vertiente de borde afilado y amplio, así como para compuertas de esclusa.
12. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionan con el material que usted ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics.* Nueva York: McGraw-Hill, 1959.

2. White, F. M., "Hydrodynamics of Coastal Areas." *Introduction to Ocean Engineering*, H. Schenck, ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1975, pp. 8-42.
3. Todd, D. K., ed., *The Water Encyclopedia*. Port Washington, NY: Water Information Center, 1970.
4. Volt, S. S., "Tsunamis." *Annual Review of Fluid Mechanics, 19*, 1987, pp. 217-236.
5. Varley, E., R. Venkataraman, y E. Cumberbatch, "The Propagation of Large Amplitude Tsunamis across a Basin of Varying Depth. Parte I. Off-Shore Behavior." *J. Fluid Mechanics, 49*, Pt. 4, 29 Octubre 1971, pp. 771-802.
6. Smith, P. D., *BASIC Hydraulics*. Londres: Butterworth Scientific, 1982.
7. Programa de Computadora HEC2, "Water Surface Profiles," The Hydrologic Engineering Center, Water Resources Support Center, U. S. Army Corps of Engineers, 609 Second Street, Davis, CA 95616-4687.
8. Peterka, A. J., "Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators," U. S. Department of the Interior, Bureau of Reclamation, Engineering Monograph No. 25, (Revisado) Julio 1963.
9. Ackers, P., *et al, Weirs and Flumes for Flow Measurement*. Nueva York: Wiley, 1978.
10. Bos, M. G., J. A. Replogle, y A. J. Clemmens, *Flow Measuring Flumes for Open Channel Systems*. Nueva York: Wiley-Interscience, 1984.
11. King, H. W., y E. F. Brater, *Handbook of Hydraulics*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1963.
12. Scott, V. L., y C. E. Houston, "Measuring Irrigation Water," Agricultural Extension Service, University of California, Davis, Circular 473, Enero 1959.
13. Hoerner, S. F., *Fluid Dynamic Drag*, 2a. ed. Midland Park, NJ: Publicado por el autor, 1965.
14. Lynch, D. K., "Tidal Bores," *Scientific American, 247*, 4, Octubre 1982, pp. 146-156.

PROBLEMAS

10.1 Los experimentos muestran que la transición a flujo turbulento, en un canal abierto, inclinado y amplio, ocurre a $Re = yV_{máx}/\nu \approx 200$. Obtenga una expresión para el perfil de velocidad, suponiendo flujo laminar completamente desarrollado. Muestre que para mantener flujo laminar hacia abajo de una superficie inclinada, la relación de flujo por ancho unitario, Q/b, debe ser menor que $800\ \nu$.

‡10.2 Deduzca una expresión para el radio hidráulico de un canal trapezoidal con ancho del fondo b, profundidad del líquido y, y ángulo de la pendiente lateral θ. Verifique la ecuación dada en la tabla 10.1. Grafique la razón $R_h\ y$ para $b = 2$ m con ángulos de la pendiente lateral de 30° y 60° para $0.5 < y < 3$ m.

‡10.3 Verifique la ecuación dada en la tabla 10.1 para el radio hidráulico de un canal circular. Evalúe y grafique la razón R_h/d, para profundidades del líquido entre 0 y D.

10.4 La onda proveniente de un bote que pasa en un lago se observa que viaja a 10 mph. Determine la profundidad aproximada del agua en esta posición.

‡10.5 La solución para las ecuaciones diferenciales completas para el movimiento ondulatorio sin tensión superficial, muestra que la velocidad de la onda está dada por

$$V_w = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)}$$

donde λ es la longitud de onda y y es la profundidad del líquido. Muestre que cuando $\lambda/y << 1$, la

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora simples para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

velocidad de la onda se vuelve proporcional a $\sqrt{\lambda}$. En el límite cuando $\lambda/y \to \infty$, $V_w = \sqrt{gy}$. Determine el valor de λ/y arriba del cual $V_w > 0.99\sqrt{gy}$.

‡**10.6** La solución de las ecuaciones diferenciales completas para el movimiento ondulatorio en líquido tranquilo, incluyendo el efecto de la tensión superficial, muestra que la velocidad de la onda está dada por

$$V_w = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right)\tanh\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)}$$

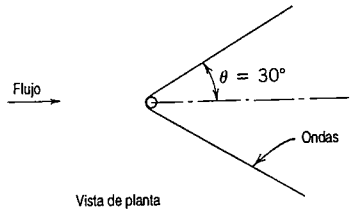
donde λ es la longitud de onda, y es la profundidad del líquido y σ es la tensión superficial. Elabore una gráfica de la velocidad de la onda contra la longitud de onda para el intervalo $1 < \lambda < 100$ mm, para *a*) agua y *b*) mercurio. Suponga que $y = 7$ mm para ambos líquidos.

10.7 Agua fluye en un canal rectangular a una profundidad de 2 pies. Si la velocidad del flujo es *a*) 4 pies/s y *b*) 12 pies/s, calcule los números de Froude correspondientes.

10.8 Un guijarro se deja caer en una corriente de agua que fluye en un canal rectangular de 8 pies de profundidad. En un segundo, el rizo provocado por la piedra se desplaza 20 pies aguas abajo. ¿Cuál es la velocidad del agua que fluye?

10.9 Un guijarro se deja caer en una corriente de agua de profundidad uniforme. Se observa que una onda viaja 5 pies aguas arriba en un segundo y 13 pies aguas abajo en el mismo tiempo. Determine la velocidad de flujo y la profundidad.

10.10 Se producen ondas superficiales por medio de un objeto puntiagudo que apenas toca la superficie libre de una corriente de agua que fluye, formando el patrón de onda mostrado. La profundidad de la corriente es 6 pulg. Determine la velocidad de flujo y el número de Froude.



P10.10 Vista de planta

10.11 El número de Froude caracteriza a flujos con superficie libre. Sobre una gráfica log-log de velocidad contra profundidad para $0.1 < V < 3$ m/s y $0.001 < y < 1$ m, grafique la línea $Fr = 1$ e indique las regiones que correspondan a flujo tranquilo y rápido.

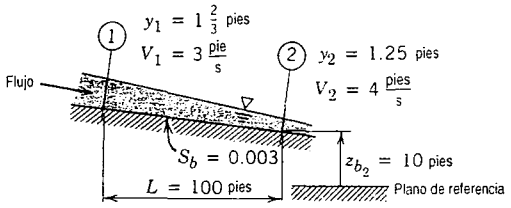
10.12 Un cuerpo sumergido que viaja horizontalmente por debajo de una superficie líquida a un número de Froude (basado en la longitud del cuerpo) cercano a 0.5, produce un intenso patrón de ondas superficiales si se sumerge menos de la mitad de su longitud [13]. (El patrón ondulatorio de un barco también es pronunciado a este número de Froude.) Sobre una gráfica log-log de velocidad contra longitud del cuerpo (o barco) para $1 < V < 30$ m/s y $1 < x < 300$ m, grafique la línea $Fr = 0.5$.

10.13 Un canal rectangular conduce una descarga de 10 pies^3/s por pie de ancho. Determine la energía específica mínima que sea posible para este flujo. Calcule la profundidad y velocidad del flujo correspondientes.

10.14 El flujo en el canal del problema 10.13 ($E_{mín} = 2.19$ pies) va a estar al doble de la energía específica mínima. Calcule las profundidades alternativas para este valor de E.

10.15 Agua fluye en un canal ancho de pendiente uniforme como se muestra. Determine las elevaciones de las líneas de gradiente hidráulico y de energía arriba del plano de referencia para las secciones ① y ②.

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora simples para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.



P10.15

10.16 Considere el flujo en un canal con sección transversal arbitraria. Para velocidad uniforme, muestre que el flujo de energía a través de cada sección está dado por

$$ef = \left(\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gy + gz_b\right)\dot{m}$$

donde y es la profundidad del flujo.

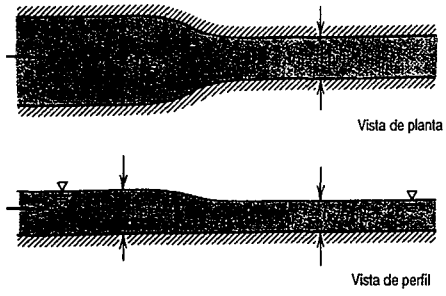
10.17 Se observa que un largo canal rectangular de 10 pies de ancho tiene una superficie ondulada a una profundidad de aproximadamente 6 pies. Estime la relación de descarga.

10.18 Agua fluye a 300 pies/s en un canal trapezoidal con ancho del fondo de 8 pies. Los lados están inclinados a 2:1. Encuentre la profundidad crítica para este canal.

10.19 Para un canal de sección transversal no rectangular, la energía específica puede escribirse en términos del área como en la ecuación 10.12. La profundidad crítica ocurre a una energía específica mínima. Obtenga una ecuación general para la profundidad crítica en un canal triangular, en términos de Q, g y α.

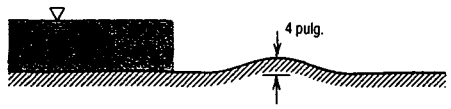
10.20 En un canal de sección transversal no rectangular, la energía específica puede escribirse en términos del área como en la ecuación 10.12. La profundidad crítica ocurre a energía específica mínima. Obtenga una ecuación general para la profundidad crítica en un canal de sección trapezoidal, en términos de Q, g, b y α.

10.21 Considere el canal de Venturi que se muestra. La plantilla es horizontal y el flujo puede considerarse sin fricción. La profundidad aguas arriba es un pie y la profunidad aguas abajo es 0.75 pies. La anchura aguas arriba es de 2 pies y la correspondiente a la garganta es de 1 pie. Estime la relación de flujo a través del canal.



P10.21

10.22 Un canal rectangular de 10 pies de ancho conduce 100 cfs sobre una plantilla horizontal a 1.0 pies de profundidad. Una pequeña protuberancia a través del canal se eleva 4 pulg sobre el fondo del mismo. Encuentre la elevación de la superficie libre de líquido encima de la protuberancia.



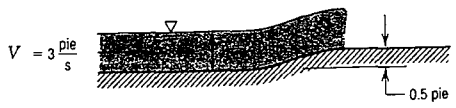
P10.22

10.23 Un canal rectangular de 10 pies de ancho conduce una descarga de 20 pies^3/s a 0.9 pies de profun-

didad. Se coloca una protuberancia lisa de 0.2 pies de altura sobre el piso del canal. Estime el cambio local en la profundidad del flujo ocasionado por la protuberancia.

10.24 En una sección de un canal rectangular de 10 pies de ancho, la profundidad es 0.3 pies para una descarga de 20 pies^3/s. Una protuberancia lisa de 0.1 pies de altura se coloca sobre el piso del canal. Determine el cambio local en la profundidad del flujo provocado por la protuberancia.

10.25 Se aproxima agua, a 3 pies/s y 2 pies de profundidad, a una elevación lisa en un canal ancho. Estime la profundidad de la corriente después de la elevación de 0.5 pies.



P10.25

10.26 Una compuerta de esclusa emite agua a 0.6 m de profundidad. La descarga por ancho unitario es 6.0 m^3/s/m. Estime el nivel del agua en un punto alejado aguas arriba donde la velocidad de flujo es despreciable. Calcule la relación de flujo máxima por ancho unitario que podría entregarse a través de la compuerta de esclusa.

10.27 Un canal rectangular horizontal de 3 pies de ancho contiene una compuerta de esclusa. Aguas arriba de la compuerta, la profundidad es de 6 pies. La profundidad aguas abajo es 0.9 pies. Estime la relación de flujo volumétrico en el canal.

10.28 Una compuerta de esclusa parcialmente abierta en un canal rectangular de 3 m de ancho conduce agua a 8.5 m^3/s. La profundidad aguas arriba es de 2 m. Encuentre la profundidad aguas abajo y el número de Froude.

10.29 Una acequia rectangular de madera, con pendiente de 1 pie por 1000 pies, tiene 6 pies de ancho. El agua fluye a una profundidad normal de 3 pies. Calcule la descarga.

10.30 Una acequia rectangular de madera tiene 3 pies de ancho. La acequia manejará un flujo de 90 pies^3/s a una pronfundidad normal de 6 pies. Determine la pendiente requerida.

10.31 Un canal con sección transversal cuadrada conducirá 20 m^3/s de agua a profundidad normal sobre una pendiente de 0.003. Compare las dimensiones del canal requeridos para *a*) concreto sin pulir y *b*) concreto pulido.

10.32 Agua fluye en un canal trapezoidal a una profundidad normal de 1.2 m. El ancho del fondo es 2.4 m y los lados tienen una inclinación de 1:1 (45°). La relación de flujo es 7.1 m^3/s. El canal se excava en tierra firme y lisa. Encuentre la pendiente del lecho.

10.33 Un canal triangular con ángulos de los lados de 45° conducirá 10 m^3/s a una pendiente de 0.001. El canal es de concreto sin pulir. Encuentre las dimensiones requeridas.

10.34 Un canal semicircular de acero corrugado, con diámetro $D = 1$ m, conduce agua a una profundidad $y_n = 0.25$ m. La pendiente es 0.01. Determine la descarga.

10.35 Encuentre la descarga a la cual el canal del problema 10.34 fluye al máximo.

10.36 El canal rectangular del problema 10.29 se equipa con un nuevo revestimiento de película plástica. Encuentre la nueva profundidad del flujo si la descarga permanece constante a 85.5 pies^3/s.

10.37 La descarga a través del canal del problema 10.32 aumenta a 15 m^3/s. Determine la profundidad normal correspondiente, si la pendiente de la plantilla es 0.00193.

10.38 El canal del problema 10.32 tiene una pendiente de la plantilla de 0.00193. Encuentre la profundidad normal para la descarga dada después de que se instala un nuevo revestimiento plástico.

10.39 Considere otra vez el canal semicircular del problema 10.34. Determine la profundidad normal que corresponde a una descarga de 0.3 m^3/s.

10.40 Considere un canal abierto, simétrico y de sección transversal triangular. Muestre que para un área de flujo dada, el perímetro mojado se minimiza cuando los lados se juntan en un ángulo recto.

10.41 Se va a construir una acequia rectangular de madera por encima del suelo. Para un caída de 10 pies

por milla. ¿cuál será la profundidad y el ancho para la acequia más económica, si va a descargar a 40 cfs?

10.42 Se va a diseñar un canal de irrigación que conducirá agua a 250 m^3/s sobre una pendiente de la plantilla de 0.0004. Calcule las dimensiones requeridas del mejor canal trapezoidal con pendientes de los lados de 45° en tierra lisa. Estime la reducción en la excavación que sería posible si el canal fuera revestido con película plástica.

‡**10.43** Considere un flujo en un canal triangular a profundidad y_n. Obtenga expresiones para A, P y R_h, en términos de y_n y el ángulo lateral α. Graficando P contra α para una A dada, confirme que la configuración óptima del canal tiene $\alpha = 45°$. ¿Qué tan lejos del punto óptimo se encuentran los canales con ángulos laterales de 60°?

10.44 Un canal plano y ancho de concreto sin pulir descarga agua a 20 $pies^3/s$ por pie de ancho. Encuentre la pendiente crítica.

10.45 Un canal rectangular (óptimo) de desagüe, construido con concreto sin pulir, se va a diseñar para conducir una relación de flujo máxima de 100 $pies^3/s$, en condiciones de flujo normal crítico. Determine el ancho y la pendiente del canal.

10.46 Considere un flujo en un canal rectangular. Muestre que para flujo a profundidad crítica y proporción dimensional óptima ($b = 2y$), la relación de flujo volumétrico y la pendiente de la plantilla están dadas por las expresiones:

$$Q = 6.26y_c^{5/2} \qquad \text{y} \qquad S_c = 24.7\frac{n^2}{y_c^{1/3}}$$

10.47 Un canal trapezoidal revestido con ladrillo tiene pendientes de 2:1 y ancho del fondo de 10 pies. El canal conduce 600 $pies^3/s$ a velocidad crítica. Determine la pendiente crítica.

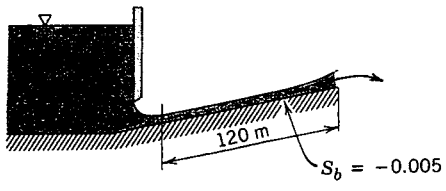
10.48 Agua fluye a 1400 $pies^3/s$ en un canal rectangular de 15 pies de ancho. La pendiente del fondo es constante y la rugosidad del canal es tal que la profundidad normal es 6.0 pies. En cierta sección, la profundidad es 2.8 pies. ¿Cuál será el cambio en la profundidad con respecto a la distancia aguas abajo?

10.49 Clasifique el perfil superficial del agua del problema 10.52. Muestre todos los cálculos necesarios.

10.50 Una acequia rectangular de madera tiene 5 pies de ancho y conduce 60 cfs de agua. La pendiente de la plantilla es 0.0006 y en cierta sección, la profundidad es de 3 pies. Encuentre la distancia (en un tramo) a la sección donde la profundidad es 2.5 pies. ¿Esta sección se encuentra aguas arriba o aguas abajo?

10.51 Suponga que la pendiente de la acequia en el problema 10.50 se cambia de modo que, con la misma relación de flujo, la profundidad varía de 3 pies en una sección a 4 pies en otra, localizada 1000 pies aguas abajo. Usando un solo tramo, estime la nueva pendiente de la plantilla de la acequia. Bosqueje la acequia y la superficie del agua para asegurar que la respuesta sea razonable.

10.52 Se descarga agua bajo una compuerta sobre un canal ancho de pendiente adversa. La profundidad en la vena contracta es 0.6 m y la velocidad igual a 12 m/s. Para una rugosidad de canal de 0.015, estime la profundidad en el extremo aguas abajo de la pendiente adversa. Emplee un solo tramo.



P10.52

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora simples para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

‡**10.53** Considere un canal rectangular de 15 pies de ancho construido con concreto sin pulir. La profundidad normal del flujo de agua en el canal es 3 pies a un número de Froude de 2. En una sección en el canal, la profundidad es 4.5 pies. Estime la longitud del canal requerida para que la profundidad de flujo cambie a 3.1 pies. ¿El cambio ocurre aguas arriba o aguas abajo de la sección con 4.5 pies de profundidad?

10.54 Una acequia horizontal de madera tiene 5 m de ancho y 300 m de largo. La profundidad de flujo en la salida de la acequia es 2.0 m. Si la descarga es 40 m^3/s, estime la profundidad del flujo en la entrada de la acequia.

‡**10.55** Una presa restringe parcialmente el flujo de un pequeño río. Suponga que el río puede modelarse como un canal ancho con $S_b = 0.001$ y $n = 0.025$. La relación de flujo por ancho unitario es 3 $m^3/s/m$ y la profundidad del agua, inmediatamente aguas arriba de la presa, es 5 m. Encuentre la distancia aguas arriba en la posición donde $y = 2$ m.

‡**10.56** Agua sale de una compuerta de esclusa sobre un ancho piso horizontal de concreto sin pulir. La profundidad es 0.6 m y la descarga por ancho unitario es 6 m^2/s. Estime la distancia a la posición aguas abajo donde la profundidad del flujo alcanza 1.2 m. (Suponga que no ocurre salto hidráulico.)

‡**10.57** Agua fluye a 40 m^3/s en un canal rectangular de 5 m de ancho. La pendiente del fondo es constante y la rugosidad es $n = 0.017$; la profundidad normal es $y_n = 2.0$ m. En cierta sección, la profundidad es de 0.9 m. Evalúe S_b. Estime la longitud del canal necesaria para elevar la profundidad del agua a 1.6 m.

10.58 Considere las condiciones de flujo del salto hidráulico del problema ejemplo 10.9. Calcule el aumento en la temperatura del agua que resultaría si toda la pérdida de carga debida al salto se convirtiera en energía térmica. ¿Sería práctico medir la pérdida de carga del salto con un termómetro?

10.59 Un canal ancho conduce 20 $pies^3/s$ por pie de ancho a una profundidad de 1 pie en la parte inferior de un salto hidráulico. Determine la profundidad siguiente del salto y la pérdida de carga a través de él.

10.60 Un salto hidráulico ocurre en un canal horizontal ancho. Si la descarga es de 30 $pies^3/s$ por pie de ancho y la profundidad aguas arriba es 1.3 pies, determine la profundidad siguiente para el salto.

10.61 Un salto hidráulico ocurre en un canal rectangular. La relación de flujo es 200 $pies^3/s$ y la profundidad antes del salto es 1.2 pies. Determine la profundidad detrás del salto y la pérdida de carga, si el ancho del canal es 10 pies.

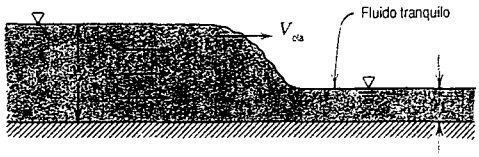
10.62 El salto hidráulico puede utilizarse como un medidor burdo de flujo. Suponga que en un canal rectangular y horizontal de 5 pies de ancho, las profundidades observadas antes y después de un salto hidráulico son 0.66 y 3.0 pies, respectivamente. Determine la relación de flujo y la pérdida de carga.

10.63 Un salto hidráulico ocurre sobre una superficie de descarga horizontal localizada aguas abajo del vertedor ancho, en una posición donde la profundidad es 0.9 m y la velocidad es 25 m/s. Estime la profundidad y la velocidad aguas abajo del salto. Compare la energía específica aguas abajo del salto con la correspondiente aguas arriba.

10.64 Un salto hidráulico ocurre en un canal rectangular. La relación de flujo es 6.5 m^3/s y la profundidad antes del salto es 0.4 m. Determine la profundidad detrás del salto y la pérdida de carga, si el ancho del canal es 1 m.

10.65 Una ola positiva, o salto hidráulico en movimiento, puede producirse en el laboratorio abriendo repentinamente una compuerta de esclusa. Considere una ola de profundidad y_2 avanzando dentro de un canal tranquilo de ancho y_1. Obtenga una expresión para la velocidad de la ola en términos de y_1 y y_2.

‡ Es posible que usted desee utilizar programas de computadora simples para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.



P10.65

10.66 Una marejada —una onda que se desplaza abruptamente o salto hidráulico en movimiento— con frecuencia se forma cuando una fuerte marea fluye hacia el ancho estero de un río [14]. En un caso, se observa que una marea tiene una altura de 12 pies sobre el nivel no perturbado del río cuya profundidad es 8 pies. La fuerte marea viaja aguas arriba a 18 mph. Determine la velocidad aproximada de la corriente del río imperturbado.

10.67 La cresta vertiente de un vertedor está 1 pie debajo del nivel de un depósito aguas arriba, donde la profundidad del agua es 8 pies. ¿Cuál es la relación de flujo máximo por ancho unitario que podría pasar por el vertedor?

10.68 Agua fluye sobre un vertedor horizontal de cresta vertiente afilada de 5 pies de ancho en un canal de 10 pies de ancho. La altura del vertedor es de 3 pies en la cresta vertiente. Aguas arriba del mismo, la profundidad del flujo es 4 pies. Determine la relación de flujo.

10.69 Agua fluye sobre un vertedor de muesca en V de 60°. La diferencial de altura es $y_1 - z_w = 0.6$ pies. Determine la descarga.

10.70 Agua fluye bajo una compuerta de esclusa desde un depósito, donde la profundidad es 8 pies. La compuerta se levanta 1.5 pies por arriba del piso del canal. Estime la relación de flujo por ancho unitario si $C_d = 0.8$.

Capítulo 11

Maquinaria hidráulica

Desde la antigüedad, el hombre ha buscado controlar la naturaleza. Nuestros primeros antepasados transportaban el agua en baldes; cuando se formaron grandes grupos, este proceso se mecanizó. De tal modo, las primeras máquinas hidráulicas se desarrollaron como ruedas de cubetas y bombas de hélice para elevar agua. Los romanos introdujeron las ruedas de paletas alrededor del año 70 A.C. para obtener energía de las corrientes [1]. Después se desarrollaron los molinos de viento para aprovechar la potencia del mismo, pero la baja densidad de potencia de este recurso natural limitaba la salida a unos cuantos cientos de caballos de potencia. El desarrollo de las ruedas hidráulicas hizo posible la extracción de miles de caballos de potencia en un solo sitio.

Hoy en día, por fortuna, contamos con muchas máquinas hidráulicas. En un día normal sacamos agua presurizada del grifo, usamos un soplador para secar nuestro cabello, manejamos un automóvil en el que las máquinas hidráulicas operan los sistemas de lubricación, enfriamiento y servodirección y trabajamos en un ambiente confortable proporcionado por la circulación del aire. La lista se podría extender indefinidamente.

El propósito de este capítulo es presentar los conceptos necesarios para analizar, diseñar y aplicar la maquinaria hidráulica. Nuestro estudio trata casi exclusivamente con flujos incompresibles. El principal énfasis se hace en los dispositivos que absorben trabajo (bombas y ventiladores), pues ellos son los que se encuentran con mayor frecuencia en los sistemas de fluidos.

Primero, se va a introducir la terminología del campo y las máquinas se clasificarán por el principio de operación y las características físicas. En lugar de intentar un tratamiento del campo completo, el enfoque estará basado en las máquinas en las que la energía se transfiere a o del fluido a través de un elemento rotatorio. Se revisarán las ecuaciones básicas y después serán simplificadas a formas útiles para el análisis de maquinaria hidráulica. Se considerarán las características de funcionamiento de máquinas típicas. Además, se brindarán ejemplos de aplicaciones de bombas y turbinas en sistemas comunes. El capítulo concluirá con problemas que varían desde aplicaciones simples hasta el diseño de sistemas.

11-1 INTRODUCCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE MAQUINARIA HIDRÁULICA

La maquinaria hidráulica puede clasificarse de manera general ya sea como de *desplazamiento positivo* o *dinámicas*. En las máquinas de desplazamiento positivo, la transferencia de energía se acompaña de cambios de volumen que ocurren mientras el fluido se encuentra confinado por completo dentro de una cámara o conducto. Los dispositivos que manejan fluidos y que dirigen el

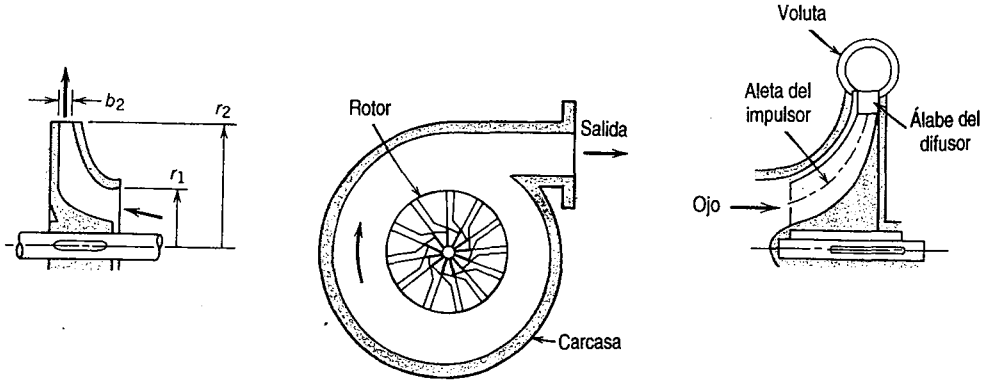
flujo con aspas o paletas atadas a un miembro rotatorio, reciben el nombre de *turbomáquinas*. En contraste con la maquinaria de desplazamiento positivo, el fluido nunca está confinado por completo en una turbomáquina. Todas las interacciones de trabajo en una turbomáquina resultan de efectos dinámicos del rotor sobre la corriente de fluido. En este capítulo se dará mayor importancia a las máquinas dinámicas.

Una distinción adicional entre los tipos de turbomáquinas se basa en la geometría de la trayectoria del flujo. En máquinas de *flujo radial*, la trayectoria del flujo es esencialmente radial, con cambios importantes en el radio, de la entrada a la salida. (Tales máquinas en ocasiones se llaman *centrífugas*.) En las máquinas de *flujo axial*, la trayectoria de flujo es casi paralela a la línea central de la máquina, y el radio de la trayectoria de flujo no varía de manera significativa. En máquinas de *flujo mixto*, el radio de la trayectoria de flujo cambia sólo moderadamente. De la figura 11.1 a la figura 11.13 se presentan diagramas esquemáticos de algunas turbomáquinas típicas.

Las máquinas que añaden energía a la corriente del fluido se llaman *bombas* cuando el flujo es líquido o lodo, y *ventiladores*, *sopladores* o *compresores* para unidades que manejan gas o vapor, dependiendo del aumento de presión. Los ventiladores suelen tener un pequeño aumento de presión (menor que 1 pulgada de agua) y los sopladores tienen aumento moderado de presión (tal vez una pulgada de mercurio); las bombas y los compresores pueden tener aumentos muy altos de presión. Los sistemas industriales actuales operan a presiones hasta de 150 000 psi (10^4 atmósferas).

El elemento rotatorio de una bomba a menudo recibe el nombre de *impulsor*; el impulsor está contenido dentro de la *carcasa* o *caja* de la bomba. El eje que transfiere la energía mecánica al impulsor usualmente debe penetrar la caja; un sistema de cojinetes y sellos se requiere para completar el diseño mecánico de la unidad.

En la figura 11.1 se muestran tres máquinas centrífugas típicas. El flujo entra a cada máquina casi axialmente a través del *ojo* del rotor, diagrama *a*), a un pequeño radio r_1. El flujo se desvía y sale a través de la descarga del impulsor a un radio r_2, donde el ancho es b_2. El flujo que sale del impulsor se recoge en la *espiral* o *voluta*, que gradualmente aumenta en área a medida que se acerca a la salida de la máquina, diagrama *b*). El impulsor suele tener paletas; puede estar *protegido* (encerrado) como se muestra en el diagrama *a*), o *abierto* como se muestra en el diagrama *c*). Las paletas del impulsor pueden ser relativamente rectas o tener cierta curvatura para volverse no radiales en la salida. El diagrama *c*) muestra que puede haber un difusor entre la descarga y la voluta del impulsor. Este difusor *radial* puede o no tener paletas.



a) Bomba centrífuga *b*) Soplador centrífugo *c*) Compresor centrífugo

Fig. 11.1 Diagramas esquemáticos de turbomáquinas típicas de flujo centrífugo, adaptados de [2].

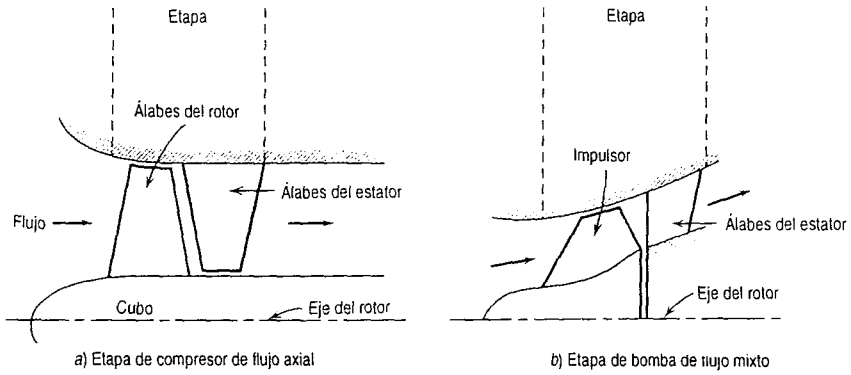


Fig. 11.2 Diagramas esquemáticos de turbomáquinas típicas de flujo axial y flujo mixto, adaptados de [2].

En la figura 11.2 se muestran esquemáticamente turbomáquinas típicas de flujo axial y de flujo mixto. El diagrama *a*) muestra una *etapa* típica de compresor de flujo axial.[1] El flujo entra casi paralelo al eje del rotor y mantiene aproximadamente el mismo radio a lo largo de la etapa. La bomba de flujo mixto en el diagrama *b*) muestra que el flujo gira radialmente y que se mueve a un radio mayor cuando pasa a través de la etapa.

El aumento de presión que puede alcanzarse eficientemente en una sola etapa está limitado, dependiendo del tipo de máquina. Sin embargo, las etapas pueden combinarse para producir máquinas de etapas múltiples, virtualmente sin límite de aumento de presión. Los compresores de flujo axial, como los que se encuentran comúnmente en los motores turbojet, son ejemplos de compresores de etapas múltiples. Las bombas centrífugas con frecuencia se construyen con etapas múltiples en una sola voluta.

Los ventiladores, sopladores, compresores y bombas se encuentran en muchos tamaños y tipos, que van desde las simples unidades domésticas hasta las complejas unidades industriales de gran capacidad. Los requerimientos de momento de torsión y potencia para bombas y turbosopladores idealizados pueden analizarse aplicando el principio del momento angular, utilizando un volumen de control apropiado.

Las propelas son esencialmente dispositivos de flujo axial que operan sin una voluta exterior. Pueden diseñarse para operar con gases o líquidos. Como usted podría esperar, las propelas

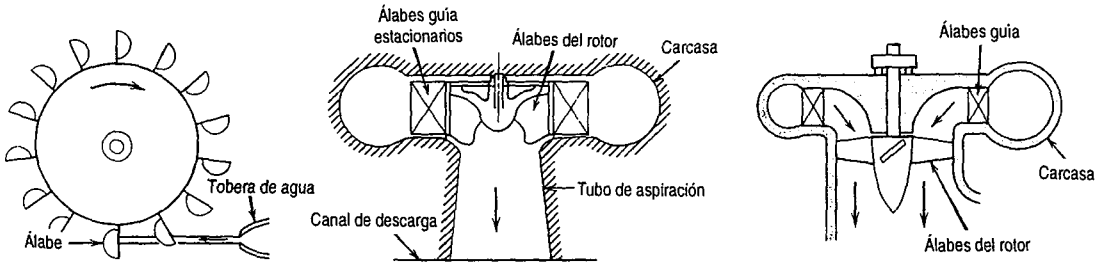


Fig. 11.3 Diagramas esquemáticos de turbinas hidráulicas típicas, adaptadas de [2].

[1] La combinación de una hilera de álabes estacionarios y una hilera de álabes móviles se denomina un *paso*. (Los álabes estacionarios pueden ser álabes guía colocados antes del rotor; es más común que sean *álabes antiturbulencia* colocados después del rotor.)

diseñadas para una aplicación determinada son muy diferentes que las diseñadas para otra. Las propelas marinas tienden a tener hojas anchas comparadas con su radio, brindando una elevada *solidez*, mientras que las propelas de los aviones tienden a tener hojas largas y delgadas con una solidez relativamente baja.

Las máquinas que extraen energía de una corriente de fluido se llaman *turbinas*. El arreglo de *paletas, aspas* o *cubetas* unidas al eje de la turbina recibe el nombre de *rotor*, *rueda* o *rodete*. En las *turbinas hidráulicas* el fluido de trabajo es agua, por lo que el flujo es incompresible. En las *turbinas de gas* y en las *turbinas de vapor* la densidad del fluido de trabajo puede cambiar significativamente.

Las dos clasificaciones más generales de turbinas son las de turbinas de *impulso* y de *reacción*. Las turbinas de impulso son accionadas por uno o más chorros libres de alta velocidad. Cada chorro es acelerado en una tobera externa hasta la rueda de la turbina. Si la fricción y la gravedad se desprecian, ni la presión del fluido ni su velocidad relativa a la rueda cambian conforme pasa sobre las cubetas de la turbina. De tal manera, para una turbina de impulso, la expansión del fluido de alta a baja presión toma lugar en toberas externas a las álabes, y el rodete no gira lleno de fluido.

Varias turbinas hidráulicas típicas se muestran esquemáticamente en la figura 11.3. El diagrama *a*) presenta una turbina de impulso accionada por un chorro, el cual se encuentra en el plano del rodete de la turbina. El agua del chorro golpea cada paleta en forma sucesiva, se desvía y se aleja de la paleta con velocidad relativa casi opuesta a la que tenía antes de incidir sobre la paleta. El agua que se utiliza cae dentro del *canal de descarga* (no se muestra).

En las turbinas de reacción, parte del cambio de la presión del fluido ocurre externamente y parte toma lugar dentro de los álabes móviles. La aceleración externa ocurre y el flujo se desvía para entrar a la rueda en la dirección apropiada, cuando pasa por toberas o aspas estacionarias denominadas *álabes guía* o *álabes distribuidores*. Se presenta una aceleración adicional del fluido relativa al rotor dentro de los álabes móviles, de modo que tanto la velocidad relativa como la presión de la corriente cambian a través de la rueda. Debido a que las turbinas de reacción operan llenas de fluido, por lo general pueden producir más potencia para un tamaño total determinado que las turbinas de impulso.

Una turbina de reacción del tipo Francis se muestra en la figura 11.3b. El agua entrante fluye circunferencialmente a través de la carcasa de la turbina, entra a la periferia exterior de los álabes guía estacionarios y fluye hacia la rueda. En la sección transversal, ingresa a la rueda casi radialmente y se desvía hacia abajo para salir casi axialmente; el patrón de flujo puede considerarse como el de una bomba centrífuga inversa. El agua que abandona el rodete fluye a través de un difusor, conocido como *tubo de aspiración*, antes de entrar al canal de descarga.

El diagrama *c*) muestra una turbina de propela del tipo Kaplan. La entrada de agua es similiar a la de la turbina Francis que acaba de describirse. Sin embargo, el flujo se desvía casi axialmente antes de encontrarse con la rueda de la turbina. El flujo que sale de la rueda puede pasar a través de un tubo de aspiración.

De tal modo, las turbinas varían desde los simples molinos de viento hasta las complejas turbinas de gas y vapor con muchas etapas de álabes diseñados cuidadosamente. Estos dispositivos también pueden analizarse en forma idealizada aplicando el principio del momento angular.

Los parámetros adimensionales tales como la *velocidad específica, el coeficiente de flujo, el coeficiente de momento de torsión, el coeficiente de potencia* y *el coeficiente de presión* se emplean con frecuencia para caracterizar el desempeño de las turbomáquinas. Estos parámetros se presentaron en el capítulo 7; su desarrollo y empleo se considerará con mayor detalle al final de este capítulo.

11-2 ALCANCE DEL MATERIAL DEL CAPÍTULO

Cerca de la tercera parte de la energía consumida en los Estados Unidos es empleada por la industria. Se estima que entre 40 y 50 por ciento de la energía industrial se utiliza para accionar bombas y compresores [3]. El diseño, la construcción, selección y aplicación adecuados de bombas y compresores tienen una gran importancia económica.

El diseño de las máquinas reales implica un conocimiento técnico diverso, que abarca la mecánica de fluidos, materiales, cojinetes, sellos y vibraciones. Estos temas se cubren en numerosos textos especializados. Nuestro objetivo aquí es presentar únicamente el detalle suficiente para ilustrar las bases analíticas del diseño de flujo de fluidos y para analizar brevemente las limitaciones de los resultados obtenidos a partir de métodos analíticos sencillos. Para obtener más información detallada de diseño consulte las referencias.

Las aplicaciones, o ingeniería de "sistema", requieren un cúmulo de experiencia. Mucha de esta experiencia debe ganarse trabajando con otros ingenieros en el campo. Nuestra cobertura no pretende ser de gran extensión; en vez de ello analizaremos sólo las consideraciones más importantes para la aplicación exitosa de sistemas de bombas, compresores y turbinas.

Como se señaló antes en este capítulo, nuestro estudio trata exclusivamente con flujos incompresibles. Incluso con esta limitación, el material presentado en el capítulo 11 es intrínsecamente más difícil que los temas fundamentales considerados en los capítulos anteriores, debido a que mucha parte de él implica la integración de información empírica con la teoría. En consecuencia, ninguna presentación de maquinaria para fluidos puede ser tan clara o directa como los capítulos anteriores que tratan los fundamentos.

11-3 ANÁLISIS DE TURBOMAQUINARIA

El método de análisis utilizado para turbomaquinaria se elige de acuerdo con la información que se busca. Si se desea información general acerca de la relación de flujo, el cambio de presión, el momento de torsión y la potencia, entonces debe utilizarse un análisis de volumen de control finito. Si se desea información detallada acerca de los ángulos de los álabes o de los perfiles de velocidad, es necesario analizar elementos de álabe individuales utilizando un volumen de control infinitesimal u otro procedimiento detallado. En este libro, nosotros consideraremos sólo procesos de flujo idealizados, por lo que nos concentraremos en el enfoque del volumen de control finito, aplicando el principio del momento angular.

11-3.1 El principio del momento angular

El principio del momento angular se aplicó a volúmenes de control finito en el capítulo 4. El resultado fue la ecuación 4.47,

$$\vec{r} \times \vec{F}_S + \int_{VC} \vec{r} \times \vec{g}\, \rho d\forall + \vec{T}_{eje} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho d\forall + \int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho\, \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.47}$$

En la siguiente sección la ecuación 4.47 se simplifica para el análisis de turbomaquinaria.

11-3.2 La ecuación de Euler para turbomáquinas

En el análisis de turbomaquinaria, conviene elegir un volumen de control fijo que encierre al rotor para evaluar el momento de torsión del eje. Como una primera aproximación, los momentos de torsión debidos a fuerzas de superficie pueden ignorarse y la contribución de la fuerza másica puede despreciarse por simetría. Por tanto, para flujo estable, la ecuación 4.47 se convierte en

$$\vec{T}_{\text{eje}} = \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \; \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{11.1a}$$

Vamos a escribir esta ecuación en forma escalar e ilustrar su aplicación a máquinas de flujo axial y radial.

Como se muestra en la figura 11.4, elegimos un volumen de control *fijo* que encierra un rotor de turbomáquina generalizado. El sistema de coordenadas fijo se elige con el eje z alineado con el eje de rotación de la máquina. Las componentes de velocidad idealizadas se muestran en la figura. Se supone que el fluido entra al rotor en la posición radial r_1, con velocidad absoluta uniforme $\vec{V}_1$; el fluido abandona el rotor en la posición radial r_2, con velocidad absoluta uniforme $\vec{V}_2$.

El término en el lado derecho de la ecuación 11.1a es el producto de $\vec{r} \times \vec{V}$, con la relación de flujo másico en cada sección. Para flujo uniforme dentro del rotor en la sección ①, y fuera del rotor en la sección ②, la ecuación 11.1a se vuelve

$$T_{\text{eje}}\,\hat{k} = (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1})\dot{m}\hat{k} \tag{11.1b}$$

o en forma escalar,

$$T_{\text{eje}} = (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1})\,\dot{m} \tag{11.1c}$$

La ecuación 11.1c es la relación básica entre el momento de torsión y el momento angular para todas las turbomáquinas. A menudo recibe el nombre de *ecuación de Euler para las turbomáquinas*.

Las velocidades que aparecen en la ecuación 11.1c son las componentes tangenciales de la velocidad absoluta del fluido que cruza la superficie de control. Las velocidades tangenciales se eligen positivas cuando están en la misma dirección que la velocidad del álabe, U. Esta convención

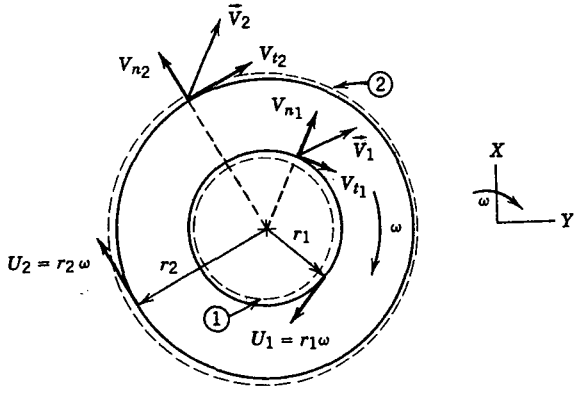


Fig. 11.4 Volumen de control finito y componentes de velocidad absoluta para el análisis del momento angular.

de signos produce $T_{eje} > 0$ para bombas, ventiladores, sopladores y compresores, y $T_{eje} < 0$ para turbinas.

La relación de trabajo efectuado sobre el rotor de la turbomáquina (la *potencia mecánica*, $\dot{W}_m$) está dada por el producto punto de la velocidad angular del rotor, $\vec{\omega}$, y el momento de torsión aplicado, $\vec{T}_{eje}$. Empleando la ecuación 11.1b, obtenemos

$$\dot{W}_m = \vec{\omega} \cdot \vec{T}_{eje} = \omega \hat{k} \cdot T_{eje}\hat{k} = \omega \hat{k} \cdot (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1})\dot{m}\hat{k}$$

o

$$\dot{W}_m = \omega T_{eje} = \omega (r_2 V_{t_2} - r_1 V_{t_1})\dot{m} \tag{11.2a}$$

De acuerdo con la ecuación 11.2a, el momento angular del fluido se incrementa por la adición de trabajo del eje. Para una bomba, $\dot{W}_m > 0$ y el momento angular del fluido debe aumentar. Para una turbina, $\dot{W}_m < 0$ y el momento angular del fluido debe disminuir.

La ecuación 11.2a puede escribirse en otras dos formas útiles. Introduciendo $U = r\omega$, donde U es la velocidad tangencial del rotor en el radio r, entonces

$$\dot{W}_m = (U_2 V_{t_2} - U_1 V_{t_2})\dot{m} \tag{11.2b}$$

Dividiendo la ecuación 11.2b entre $\dot{m}g$, obtenemos una cantidad con dimensiones de longitud, denominada a menudo la *carga añadida al flujo*.[2]

$$H = \frac{\dot{W}_m}{\dot{m}g} = \frac{1}{g}(U_2 V_{t_2} - U_1 V_{t_1}) \tag{11.2c}$$

Las ecuaciones 11.1 y 11.2 son formas simplificadas de la ecuación del momento angular para un volumen de control. Todas ellas se escriben para un volumen de control fijo bajo las suposiciones de flujo uniforme y estable en cada sección. Las ecuaciones muestran que sólo la diferencia en el producto rV_t o UV_t, entre las secciones de salida y entrada, es importante al determinar el momento de torsión aplicado al rotor o la transferencia de energía al fluido. Ninguna restricción se ha hecho sobre la geometría; el fluido puede entrar y salir al mismo radio o a uno diferente.

Si uno aplica la primera ley de la termodinámica para flujo incompresible a través de una bomba (o turbina), la relación de adición de energía a (o extracción de) la corriente del fluido en el caso ideal es $\dot{W}_h = \dot{m}\,\Delta p/\rho = \dot{m}gH = \rho QgH$; $\dot{W}_h$ se conoce como la *potencia hidráulica*. Cuando se ignoran la fricción y las pérdidas de flujo, la potencia hidráulica es igual a la potencia mecánica, $\dot{W}_m = T\omega$. Cuando se incluyen la fricción y las pérdidas de flujo, la potencia hidráulica se relaciona con la potencia mecánica mediante la *eficiencia*.

Para bombas, la eficiencia se define como $\eta_p = \dot{W}_h/\dot{W}_m$. En consecuencia,

$$\eta_p = \frac{\dot{W}_h}{\dot{W}_m} = \frac{\rho Q g H}{\omega T} \tag{11.3a}$$

Para turbinas hidráulicas, la eficiencia se define como $\eta_t = \dot{W}_m/\dot{W}_h$. Por tanto,

$$\eta_t = \frac{\dot{W}_m}{\dot{W}_h} = \frac{\omega T}{\rho Q g H} \tag{11.3b}$$

[2] Puesto que $\dot{W}_m$ es la energía por unidad de tiempo y $\dot{m}g$ es el flujo del peso por unidad de tiempo, la *carga* es en realidad energía por unidad de peso del fluido que fluye.

11-3.3 Análisis del polígono de velocidad

Las ecuaciones que hemos obtenido también sugieren la importancia de definir claramente las componentes de velocidad del fluido y el rotor en las secciones de entrada y salida. Con este fin, es útil construir los *polígonos de velocidad* para los flujos de entrada y salida. La figura 11.5 muestra los polígonos de velocidad y presenta la notación para los ángulos del álabe y el flujo.

En una situación idealizada en el diseño, se supone que el flujo relativo al rotor entra y sale tangente al perfil del álabe en cada sección. (Esta condición de entrada idealizada algunas veces se llama flujo de entrada *sin impacto.*) Los ángulos del álabe, β, se miden relativos a la dirección circunferencial, como se muestra en la figura 11.5a. El ángulo del álabe de entrada, β_1, fija la dirección de la velocidad de entrada relativa a las condiciones de diseño.

La velocidad de la rueda en la entrada es $U_1 = \omega R_1$, y por tanto está especificada por la geometría del impulsor y la velocidad de operación de la máquina. La velocidad absoluta del fluido es la suma vectorial de la velocidad del impulsor y la velocidad del flujo relativa al álabe. La velocidad absoluta de entrada puede determinarse gráficamente, como se muestra en la figura 11.5b. El ángulo de la velocidad absoluta de fluido, α_1, se mide desde la dirección normal, como se muestra.[3] La componente tangencial de la velocidad absoluta, V_{t_1}, y la componente normal al área de flujo, V_{n_1}, se muestran también en la figura 11.5b. Observe de la geometría de la figura que en cada sección la componente normal de la velocidad *absoluta*, V_n, y la componente normal de la velocidad *relativa al álabe*, V_{rb_n}, son iguales.

Cuando el flujo de entrada no tiene turbulencia, la velocidad de entrada absoluta será puramente radial. El ángulo de entrada del álabe puede especificarse para la relación de flujo de diseño y la velocidad de la bomba, para brindar flujo de entrada sin impacto. La preturbulencia, la cual puede presentarse en el flujo de entrada, o ser introducida por los *álabes guía de entrada*, ocasiona que la dirección absoluta del flujo de entrada difiera de la radial.

Los polígonos de velocidad se construyen de manera similiar en la sección de salida. La velocidad de la rueda en la salida es $U_2 = \omega R_2$, la cual otra vez se conoce a partir de la geometría y velocidad de operación de la turbomáquina. Se supone que el flujo relativo sale del impulsor tangente a los álabes, como se muestra en la figura 11.5*c*. Esta suposición idealizada de guía perfecta fija la dirección del flujo de salida relativo a las condiciones de diseño.

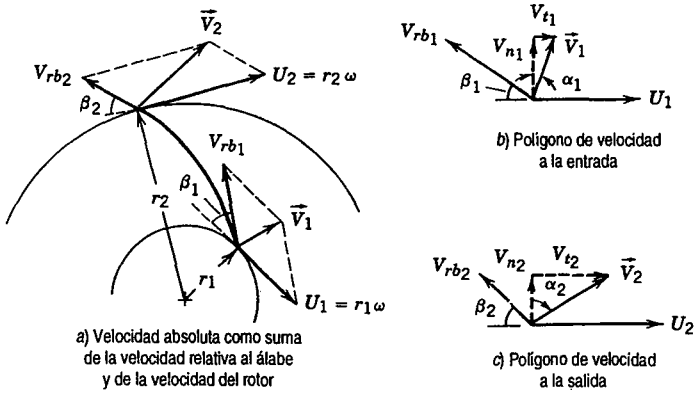


Fig. 11.5 Geometría y notación empleadas para desarrollar polígonos de velocidad de máquinas típicas de flujo radial.

[3] La notación varía de libro a libro, de modo que hay que tener cuidado cuando se comparan las referencias.

En una bomba centrífuga o en una turbina de reacción, la velocidad relativa al álabe cambia generalmente en magnitud, de la entrada a la salida. La ecuación de continuidad debe aplicarse, utilizando la geometría del impulsor, para determinar la componente normal de la velocidad en cada sección. La componente normal, junto con el ángulo del álabe de salida, es suficiente para establecer la velocidad relativa al álabe en la salida del impulsor para una máquina de flujo radial. El polígono de velocidad se completa por medio de la adición vectorial de la velocidad relativa al álabe y la velocidad de la rueda, como se indica en la figura 11.5c.

Los polígonos de velocidad de entrada y de salida brindan toda la información necesaria para calcular el momento de torsión o la potencia ideales, absorbidos o entregados por el impulsor, utilizando las ecuaciones 11.1 u 11.2. Los resultados representan el funcionamiento de una turbomáquina bajo condiciones idealizadas en el punto de operación de diseño, ya que hemos supuesto que todos los flujos son uniformes en cada sección y que entran y salen del rotor tangentes a los álabes. Estos resultados idealizados representan los límites superiores de funcionamiento para una turbomáquina.

El funcionamiento de una máquina real puede estimarse empleando el mismo enfoque básico, pero tomando en cuenta las variaciones en las propiedades del flujo a través del tramo del álabe en las secciones de entrada y salida, así como las desviaciones entre los ángulos del álabe y las direcciones del flujo. Estos cálculos detallados se encuentran más allá del alcance de este libro.

La alternativa es medir el funcionamiento completo de una máquina sobre una base de prueba adecuada. Los datos de los fabricantes son ejemplo de información de funcionamiento medida.

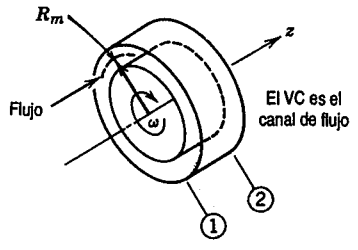
En el problema ejemplo 11.1, aplicamos los resultados idealizados que hemos desarrollado a un ventilador de flujo axial. El tema del problema ejemplo 11.2 es una bomba centrífuga idealizada.

EJEMPLO 11.1 Ventilador de flujo axial idealizado

Un ventilador de flujo axial opera a 1200 rpm. El diámetro de la punta del álabe es 1.1 m y el diámetro del cubo es 0.8 m. Los ángulos de entrada y salida del álabe son 30° y 60°, respectivamente. Los álabes guía de la entrada producen el flujo absoluto que entra a la primera etapa a un ángulo de 30°. El fluido es aire en condiciones estándar y el flujo puede considerarse incompresible. No hay cambio en la componente axial de la velocidad a lo largo del rotor. Suponga que el flujo relativo entra y sale del rotor a los ángulos de álabe geométricos y emplee las propiedades en el radio medio del álabe para los cálculos. Para estas condiciones idealizadas, dibuje el polígono de velocidad de entrada, determine la relación de flujo volumétrico del ventilador y bosqueje las formas de los álabes del rotor. Utilizando los datos obtenidos de esta manera, dibuje el polígono de velocidad de salida y calcule el momento de torsión y la potencia mínimos necesarios para accionar el ventilador.

PROBLEMA EJEMPLO 11.1

DATOS: Un flujo a través del rotor de un ventilador de flujo axial.
Diámetro de la punta: 1.1 m
Diámetro del cubo: 0.8 m
Velocidad de operación: 1200 rpm
Ángulo de entrada absoluta: 30°
Ángulo de entrada del álabe: 30°
Ángulo de salida del álabe: 60°



Ángulo de salida del álabe: 60°
El fluido es aire en condiciones estándar.
Emplee las propiedades a diámetro medio de los álabes.

ENCUENTRE: *a*) El polígono de la velocidad de entrada
b) La relación de flujo volumétrico.
c) La forma del álabe del rotor.
d) El polígono de la velocidad de salida.
e) El momento de torsión del rotor.
f) La potencia requerida.

SOLUCIÓN: Aplique la ecuación del momento angular a un volumen de control fijo.

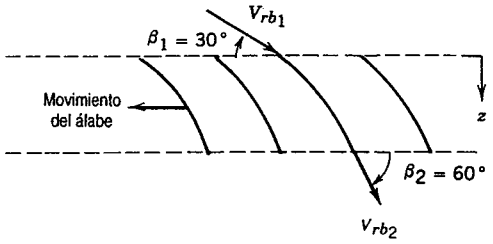
Ecuaciones de cálculo:

$$\vec{T}_{\text{eje}} = \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (11.1a)$$

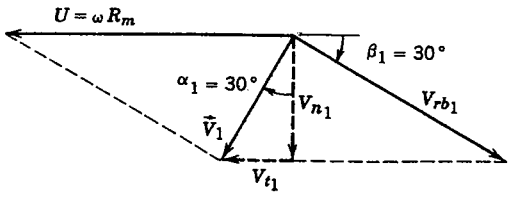
$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall}_{=0(2)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Ignore los momentos de torsión debidos a fuerzas másicas o de superficie
2) Flujo estable
3) Flujo uniforme en las secciones de entrada y salida
4) Flujo incompresible
5) Ningún cambio en el área de flujo axial
6) Empleo del radio medio de los álabes del rotor, R_m

Las formas del álabe son



El polígono de la velocidad de entrada es



De la continuidad,

$$0 = \{-|\rho V_{n_1} A_1|\} + \{|\rho V_{n_2} A_2|\}$$

control fijo.

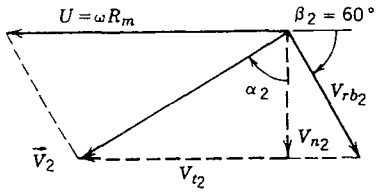
(11.1a)

as o de superficie

o

$$Q = V_{n_1} A_1 = V_{n_2} A_2$$

Como $A_1 = A_2$, entonces $V_{n_1} = V_{n_2}$, y el polígono de la velocidad de salida es como se muestra en la siguiente figura:



En el radio medio del álabe,

$$U = R_m \omega = \frac{D_m}{2} \omega$$

$$U = \frac{\frac{1}{2}(1.1 + 0.8)\text{m}}{2} \times 1200 \frac{rev}{\text{min}} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} = 59.7\ \text{m/s}$$

De la geometría del polígono de la velocidad de entrada,

$$U = V_{n_1}(\tan\alpha_1 + \cot\beta_1)$$

por lo que

$$V_{n1} = \frac{U}{\tan\alpha_1 + \cot\beta_1} = 59.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\tan 30° + \cot 30°} = 25.9\ \text{m/s}$$

Consecuentemente, 25.9

$$V_1 = \frac{V_{n_1}}{\cos\alpha_1} = 25.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\cos 30°} = 29.9\ \text{m/s}$$

$$V_{t1} = V_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \operatorname{sen} 30° = 15.0\ \text{m/s}$$

y

$$V_{rb_1} = \frac{V_{n_1}}{\operatorname{sen}\beta_1} = 25.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\operatorname{sen} 30°} = 51.8\ \text{m/s}$$

La relación de flujo volumétrico es

$$Q = V_{n_1} A_1 = \frac{\pi}{4} V_{n_1}(D_t^2 - D_h^2) = \frac{\pi}{4} \times 25.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} [(1.1)^2 - (0.8)^2]\ \text{m}^2$$

$$Q = 11.6\ \text{m}^3/\text{s} \longleftarrow Q$$

De la geometría del polígono de la velocidad de salida,

$$\tan\alpha_2 = \frac{V_{t_2}}{V_{n_2}} = \frac{U - V_{n_2}\cot\beta_2}{V_{n_2}} = \frac{U - V_{n_1}\cot\beta_2}{V_{n_1}}$$

o

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left[\frac{59.7\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 25.9\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cot 60^\circ}{25.9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right] = 59.9^\circ$$

y

$$V_2 = \frac{V_{n_2}}{\cos \alpha_2} = \frac{V_{n_1}}{\cos \alpha_2} = 25.9\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{\cos 59.9^\circ} = 51.6\ \text{m/s}$$

Por último,

$$V_{t_2} = V_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = 51.6\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \operatorname{sen} 59.9^\circ = 44.6\ \text{m/s}$$

La ecuación del momento angular se convierte en

$$\vec{T} = T_z \hat{k} = \int_{SC} \vec{R}_m \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \hat{k} \int_{SC} R_m V_t \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

de modo que para flujo uniforme

$$T_z = R_m V_{t_1}\{-|\rho V_{n_1} A_1|\} + R_m V_{t_2}\{|\rho V_{n_2} A_2|\} = \rho Q R_m (V_{t_2} - V_{t_1})$$

$$= 1.23\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 11.6\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times \frac{0.95\ \text{m}}{2} \times (44.6 - 15.0)\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$T_z = 201\ \text{N} \cdot \text{m} \longleftarrow T_z$$

Así, el momento de torsión *sobre* el VC está en el mismo sentido que $\vec{\omega}$. La potencia requerida es

$$\dot{W}_m = \vec{\omega} \cdot \vec{T} = \omega_z T_z = 1200\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times 201\ \text{N} \cdot \text{m} \times \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{N} \cdot \text{m}}$$

$$\dot{W}_m = 25.3\ \text{kW} \longleftarrow \dot{W}_m$$

Este problema ilustra la construcción de polígonos de velocidad y la ecuación del momento angular para un volumen de control fijo a una máquina de flujo axial bajo condiciones ideales.

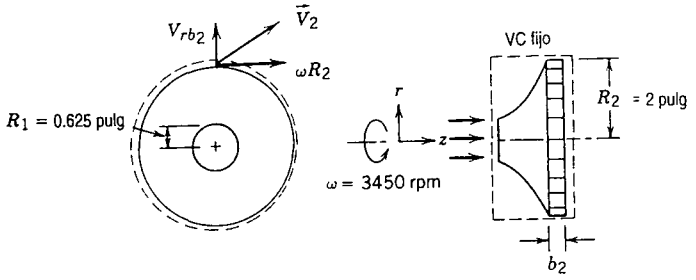
EJEMPLO 11.2 Bomba centrífuga idealizada

Agua entra axialmente a 150 gpm al impulsor de una bomba centrífuga, a través de una entrada de 1.25 pulg de diámetro. La velocidad de entrada es axial y uniforme. El diámetro de salida del impulsor es de 4 pulg. El flujo abandona el impulsor a 10 pies/s con respecto a los álabes radiales. La velocidad del impulsor es 3450 rpm. Determine el ancho de la salida del impulsor, b_2, el momento de torsión de entrada al impulsor y la potencia mínima requerida.

PROBLEMA EJEMPLO 11.2

DATOS: El flujo que se muestra en la siguiente figura: $V_{rb_2} = 10$ pies/s, $Q = 150$ gpm.

ENCUENTRE: *a*) b_2
b) T_{eje}
c) $\dot{W}_m$.



SOLUCIÓN: Se aplica la ecuación del momento angular a un volumen de control fijo.

Ecuaciones de cálculo:

$$\vec{T}_{eje} = \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (11.1a)$$

$$= 0(2)$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Se ignoran los momentos de torsión debidos a las fuerzas másicas y superficiales
2) Flujo estable
3) Flujo uniforme en las secciones de entrada y de salida
4) Flujo incompresible

Por tanto, de la continuidad,

$$0 = \{-|\rho V_1 \pi R_1^2|\} + \{|\rho V_{rb_2} 2\pi R_2 b_2|\}$$

o

$$\rho Q = \rho V_{rb_2} 2\pi R_2 b_2$$

por lo que

$$b_2 = \frac{Q}{2\pi R_2 V_{rb_2}} = \frac{1}{2\pi} \times 150 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{1}{2 \text{ pulg}} \times \frac{\text{s}}{10 \text{ pies}} \times \frac{\text{pies}^3}{7.48 \text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times 12 \frac{\text{pulg}}{\text{pie}}$$

$b_2 = 0.0319$ pie o 0.383 pulg ← b_2

El flujo de entrada axial no tiene componente z de momento angular. De la ecuación del momento angular, con flujo de salida uniforme,

$$\hat{k} T_{eje} = \vec{r}_2 \times \vec{V}_2 \ \{|\rho Q|\}$$

En la sección ②,

$$\vec{r}_2 = R_2 \hat{e}_r$$

$$\vec{V}_2 = V_{rb_2} \hat{e}_r + \omega R_2 \hat{e}_\theta$$

por lo que

$$\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 = R_2(\omega R_2)\hat{k} = \omega R_2^2 \hat{k}$$

De tal modo.

$$T_{eje} = \omega R_2^2 \rho Q = \frac{3450 \text{ rev}}{\text{min}} \times (2)^2 \text{ pulg}^2 \times \frac{1.94 \text{ slug}}{\text{pie}^3} \times \frac{150 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}^2}{3600 \text{ s}^2} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48 \text{ gal}} \times \frac{\text{pie}^2}{144 \text{ pulg}^2} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}}$$

$$T_{eje} = 6.51 \text{ pie} \cdot \text{lbf} \longleftarrow T_{eje}$$

y

$$\dot{W}_m = \omega T_{eje} = \frac{3450 \text{ rev}}{\text{min}} \times 6.51 \text{ pie} \cdot \text{lbf} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pie} \cdot \text{lbf}}$$

$$\dot{W}_m = 4.28 \text{ hp} \longleftarrow \dot{W}_m$$

Este problema ilustra la aplicación de la ecuación del momento angular para un volumen de control fijo a una máquina de flujo centrífugo bajo condiciones idealizadas y suponiendo conducción perfecta. El momento de torsión de entrada y los requerimientos de potencia reales pueden ser más grandes que los predichos por el análisis teórico. Sin embargo, el aumento de carga predicho tal vez no se alcance debido a la conducción imperfecta del flujo que sale del impulsor.

La figura 11.5 representa el flujo a través de un impulsor sencillo de una bomba centrífuga. Si el fluido entra al impulsor con una velocidad absoluta puramente radial, entonces dicho fluido no tiene momento angular y V_{t_1} es idénticamente cero.

Con $V_{t_1} = 0$, el aumento en la carga (de la ecuación 11.2c) está dado por

$$H = \frac{U_2 V_{t_2}}{g} \tag{11.4}$$

De acuerdo con el triángulo de la velocidad de salida de la figura 11.5c,

$$V_{t_2} = U_2 - V_{rb_2} \cos \beta_2 = U_2 - \frac{V_{n_2}}{\text{sen } \beta_2} \cos \beta_2 = U_2 - V_{n_2} \cot \beta_2 \tag{11.5}$$

Por tanto,

$$H = \frac{U_2^2 - U_2 V_{n_2} \cot \beta_2}{g} \tag{11.6}$$

Para un impulsor de ancho w, la relación de flujo volumétrico es

$$Q = \pi D_2 w V_{n_2} \tag{11.7}$$

Para expresar el aumento en la carga en términos de la relación de flujo volumétrico, sustituimos V_{n_2} en términos de Q de acuerdo con la ecuación 11.7. De tal modo,

$$H = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2 \cot \beta_2}{\pi D_2 w g} Q \tag{11.8a}$$

La ecuación 11.8a es de la forma

$$H = C_1 - C_2 Q \tag{11.8b}$$

donde las constantes C_1 y C_2 son funciones de la geometría y velocidad de la máquina,

$$C_1 = \frac{U_2^2}{g} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{U_2 \cot \beta}{\pi D_2 w g}$$

De esta manera, la ecuación 11.8a predice una variación lineal de la carga, H, con respecto a la relación de flujo volumétrico, Q.

La constante $C_1 = U_2^2/g$ representa la carga ideal desarrollada por la bomba para relación de flujo cero; lo anterior se conoce como la *carga de válvula cerrada*. La pendiente de la curva de la carga contra la relación de flujo (la curva $H - Q$) depende del signo y magnitud de C_2.

Para álabes de salida radial, $\beta_2 = 90°$ y $C_2 = 0$. La componente tangencial de la velocidad absoluta en la salida es igual a la velocidad de la rueda y es independiente de la relación de flujo. De la ecuación 11.8a, la carga ideal es independiente de la relación de flujo. Esta curva característica $H - Q$ se grafica en la figura 11.6.

Si los álabes se *curvan hacia atrás* (como se muestra en la figura 11.5a), $\beta_2 < 90°$ y $C_2 > 0$. En ese caso, la velocidad de salida absoluta es menor que la velocidad de la rueda y disminuye en proporción a la relación de flujo. De la ecuación 11.8a, la carga ideal disminuye linealmente con respecto a la relación de flujo creciente. La curva $H - Q$ correspondiente se grafica en la figura 11.6.

Si los álabes se *curvan hacia adelante*, entonces $\beta_2 > 90°$ y $C_2 < 0$. La velocidad absoluta de un fluido en la salida es mayor que la velocidad de la rueda y aumenta a medida que la relación de flujo se incrementa. De la ecuación 11.8a, la carga ideal aumenta linealmente con la relación de flujo creciente. La curva $H - Q$ correspondiente se grafica en la figura 11.6.

Las características de una máquina de flujo radial pueden alterarse cambiando el ángulo del álabe de salida; el modelo idealizado predice las tendencias cuando se cambia el ángulo del álabe de salida.

Las predicciones de la teoría idealizada del momento angular para una bomba centrífuga se resumen en la figura 11.6. Las pérdidas de flujo internas y las desviaciones de la conducción

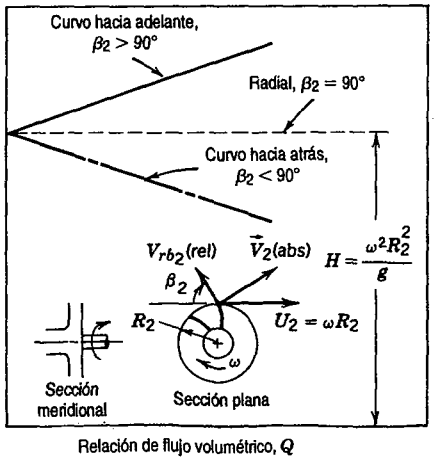


Fig. 11.6 Relación idealizada entre la carga y la relación de flujo volumétrico para una bomba centrífuga con álabes del impulsor curvados hacia adelante, radiales y curvados hacia atrás.

perfecta que ocurren en una máquina real, reducen la carga real comparada con las predicciones ideales. Las tendencias predichas por la teoría idealizada se comparan con los resultados experimentales en la siguiente sección.

11-4 CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONAMIENTO

Para especificar las máquinas hidráulicas para sistemas de flujo, el diseñador debe conocer el aumento de presión (o carga), el momento de torsión, el requerimiento de potencia y la eficiencia de una máquina. Para una máquina dada, cada una de estas características es una función de la relación de flujo; las características para máquinas similares dependen del tamaño y de la velocidad de operación. En esta sección definimos las características de funcionamiento para bombas y turbinas y revisamos experimentalmente las tendencias medidas para máquinas típicas. Analizamos parámetros adimensionales para ilustrar las similitudes entre familias de máquinas y las tendencias en las características de diseño como funciones de la relación de flujo y el aumento de carga. Revisaremos las leyes de escalamiento y presentaremos ejemplos para ilustrar su uso. La sección concluye con un análisis de la cavitación y de la carga neta que debe estar disponible en la entrada de una bomba para asegurar una operación libre de cavitación.

11-4.1 Parámetros de funcionamiento

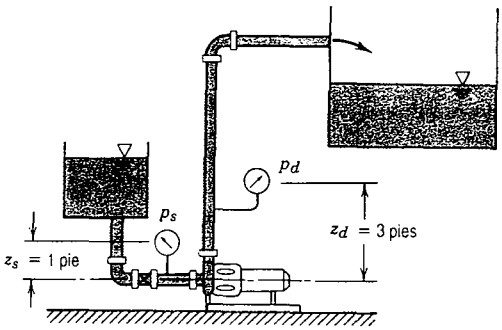
Los análisis idealizados que se presentaron en la sección 11-3 son útiles para predecir tendencias y aproximar el funcionamiento del punto de diseño de una máquina que absorbe o produce energía. Sin embargo, el funcionamiento completo de una máquina real, incluso la operación en condiciones fuera de diseño, debe determinarse experimentalmente.

Para determinar el funcionamiento de una bomba, ventilador, soplador o compresor deben instalarse sobre un banco de pruebas instrumentado con la capacidad de medir la relación de flujo, velocidad, momento de torsión de entrada y aumento de presión. La prueba debe efectuarse de acuerdo con un procedimiento estandarizado correspondiente a la máquina que se está probando [4, 5]. Las mediciones se efectúan conforme la relación de flujo varía desde el valor a válvula cerrada (flujo cero) hasta el caudal máximo. La entrada de potencia en la máquina se determina a partir de un motor calibrado o se calcula con base en la velocidad y el momento de torsión medidos, y luego la eficiencia se calcula como se ilustra en el problema ejemplo 11.3. Finalmente, las características calculadas se grafican en las unidades de ingeniería deseadas, o adimensionalmente. Si resulta conveniente, pueden trazarse curvas continuas a través de los puntos graficados o efectuarse ajustes de curvas para los resultados, como se ilustra en el problema ejemplo 11.4.

EJEMPLO 11.3 Cálculo de las características de una bomba a partir de datos de prueba

Se muestra el sistema de flujo utilizado para probar una bomba centrífuga a una velocidad nominal de 1750 rpm. El líquido es agua a 80 F y los diámetros de los tubos de succión y de descarga son de 6 pulg. Los datos medidos durante la prueba se proporcionan en la tabla. El motor es alimentado a 460 V, es trifásico, tiene un factor de potencia de 0.875 y una eficiencia constante de 90 por ciento.

Relación de flujo (gpm)	Presión de succión (psig)	Presión de descarga (psig)	Corriente del motor (amp)	Velocidad de la bomba (rpm)
0	–3.7	53.3	18.0	1750
500	–4.2	48.3	26.2	1745
800	–4.7	42.3	31.0	1749
1000	–5.7	34.3	36.0	1750
1100	–6.2	31.3	37.0	1747
1200	–6.7	27.3	37.3	1752
1400	–7.7	15.3	39.0	1750
1500	–8.4	7.3	41.5	1753



Calcule la carga neta entregada y la eficiencia de la bomba a una relación de flujo volumétrico de 1000 gpm. Grafique la carga, potencia y eficiencia de la bomba como funciones de la relación de flujo volumétrico.

PROBLEMA EJEMPLO 11.3

DATOS: El sistema de flujo y los datos de prueba de una bomba que se muestran.

ENCUENTRE: *a*) La carga y eficiencia de la bomba a $Q = 1000$ gpm.
b) La gráfica de la carga, la entrada de potencia y la eficiencia de la bomba contra la relación de flujo volumétrico.

SOLUCIÓN: Aplique la ecuación de energía para determinar la potencia entregada al fluido. Considere el caso ideal ($\dot{Q} = 0$, $u_2 = u_1$).

Ecuación básica: $\dot{Q}^{=0(1)} - \dot{W}_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\,\rho\,d\forall + \int_{SC}\left(e + \frac{p}{\rho}\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A};\ e = u + \frac{V^2}{2} + gz$ $^{=0(2)}$

Suposiciones:
1) $\dot{Q} = 0$
2) Flujo estable
3) Flujo uniforme en cada sección
4) $u_2 = u_1$
5) $\bar{V}_2 = \bar{V}_1$
6) Se corrigen todas las cargas a la misma elevación

Por consiguiente,

$$-\dot{W}_s = \dot{m}\left[\left(\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) - \left(\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right)\right] = \dot{m}\frac{\Delta p}{\rho} = \rho Q\frac{\Delta p}{\rho} = Q\,\Delta p$$

Las presiones estáticas medidas correctamente para la línea central de la bomba (deje que el subíndice *s* represente la succión de la bomba y el subíndice *d*, la descarga de la misma):

$$p_1 = p_s + \rho g z_s$$

$$p_1 = \frac{-5.70 \text{ lbf}}{\text{pulg}^2} + 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times 32.2 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \times 1.0 \text{ pies} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}} \times \frac{\text{pie}^2}{144 \text{ pulg}^2} = -5.27 \text{ psig}$$

y

$$p_2 = p_d + \rho g z_d$$

$$p_2 = \frac{34.3 \text{ lbf}}{\text{pulg}^2} + 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times 32.2 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2} \times 3.0 \text{ pies} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}} \times \frac{\text{pie}^2}{144 \text{ pulg}^2} = 35.6 \text{ psig}$$

Se calcula la potencia mecánica entregada al fluido:

$$\dot{W}_{\text{en}} = -\dot{W}_S = Q\Delta p$$

$$= 100 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times [35.6 - (-5.27)] \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48 \text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pie} \cdot \text{lbf}}$$

$$\dot{W}_{\text{en}} = 23.8 \text{ hp}$$

Se calcula la salida de potencia del motor (potencia de entrada de la bomba) a partir de la información eléctrica:

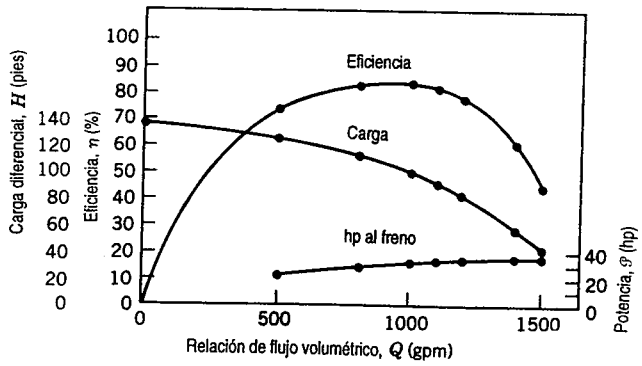
$$\mathcal{P}_{\text{en}} = \eta \sqrt{3}(PF)EI$$

$$\mathcal{P}_{\text{en}} = 0.90 \times \sqrt{3} \times 0.875 \times 460 \text{ V} \times 36.0 \text{ A} \times \frac{\text{W}}{\text{VA}} \times \frac{\text{hp}}{746 \text{ W}} = 30.3 \text{ hp}$$

La eficiencia correspondiente de la bomba es

$$\eta_p = \frac{\dot{W}_{\text{en}}}{\mathcal{P}_{\text{en}}} = \frac{23.8 \text{ hp}}{30.3 \text{ hp}} = 0.785 \quad \text{o} \quad 78.5 \text{ por ciento}$$

Los resultados de cálculos similares a otras relaciones de flujo volumétrico se grafican a continuación:



A $Q = 1000$ gpm, la carga neta de succión positiva (véase la sección 11-4.4) se calcula como la diferencia entre la presión absoluta de estancamiento en la entrada y la presión de vapor del líquido que se está bombeando.

La presión de estancamiento absoluta en la entrada es

$$p_{01} = p_{\text{atm}} + p_{1,\text{manométrica}} + \frac{1}{2}\rho \bar{V}_1^2$$

Si suponemos $D = 6$ pulg, entonces

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = 1000\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48\ \text{gal}} \times \frac{4}{\pi(6)^2\ \text{pulg}^2} \times \frac{144\ \text{pulg}^2}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} = 11.3\ \text{pies/s}$$

y

$$\frac{1}{2}\rho \bar{V}_1^2 = \frac{1}{2} \times 1.94\ \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} \times (11.3)^2\ \frac{\text{pie}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{pie}} \times \frac{\text{pie}^2}{144\ \text{pulg}^2} = 0.860\ \text{lbf/pulg}^2$$

De esta manera, con la sustitución,

$$p_{01} = (14.7 - 5.27 + 0.860)\ \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} = 10.3\ \text{psia}$$

De las tablas de vapor, a 80 F, $p_v = 0.947$ psia, de modo que

$$NPSH = \frac{p_{01} - p_v}{\rho g} = (10.3 - 0.947)\ \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\text{pie}^3}{1.94\ \text{slug}} \times \frac{\text{s}^2}{32.2\ \text{pies}} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{pie}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2} \times 144\ \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2}$$

$NPSH = 21.6$ pies *NPSH*

Este problema ilustra la reducción de los datos medidos para obtener una curva de funcionamiento para una bomba. La máxima eficiencia para esta bomba ocurre entre 675 y 1150 gpm.

El procedimiento básico utilizado para calcular el funcionamiento de la máquina se ilustró para una bomba centrífuga en el problema ejemplo 11.3. La diferencia en las presiones estáticas entre la succión y la descarga de la bomba se empleó para calcular el aumento de carga producido por la misma. En el caso de bombas, la presión dinámica por lo general es una pequeña fracción del aumento de carga desarrollado por la bomba, por lo que puede ignorarse al compararla con el aumento de carga.

Los procedimientos de prueba y reducción de datos para ventiladores, sopladores y compresores son básicamente los mismos que para las bombas centrífugas. Sin embargo, los sopladores, y especialmente los ventiladores, añaden cantidades relativamente pequeñas de carga estática a los flujos de gas o vapor. Para estas máquinas, la carga dinámica puede incrementarse de la entrada a la descarga, y puede ser apreciable si se compara con el aumento de carga estática. Por estas razones, es importante establecer claramente las bases sobre las cuales se efectúan los cálculos de funcionamiento. Se cuenta con definiciones estándar para la eficiencia de máquinas, basadas en el aumento de presión estática a estática o el aumento de presión estática a total [6].

EJEMPLO 11.4 Ajuste de curva para los datos de funcionamiento de una bomba

En el problema ejemplo 11.3 se brindaron los datos de prueba de una bomba y se calculó su funcionamiento. Ajuste una curva parabólica, $H = H_0 - AQ^2$, a estos resultados calculados de funcionamiento de la bomba y compare la curva ajustada con los datos medidos.

PROBLEMA EJEMPLO 11.4

DATOS: Los datos de prueba y el funcionamiento calculado de la bomba del problema ejemplo 11.3.

ENCUENTRE: *a*) Ajuste una curva parabólica, $H = H_0 - AQ^2$, a los datos de funcionamiento de la bomba.

b) Compare el ajuste de la curva con el funcionamiento calculado.

SOLUCIÓN:
El ajuste de la curva puede obtenerse adaptando una curva lineal para H contra Q^2. Tabulando,

Del funcionamiento calculado:			Del ajuste de la curva:	
Q (gpm)	Q^2 (gpm^2)	H (pies)	H (pies)	Error (%)
0	0	133	133	0
500	25×10^4	123	125	1.2
800	64×10^4	110	109	−1.4
1000	100×10^4	94.2	93.7	−0.5
1200	144×10^4	80.4	75.6	−5.9
1400	196×10^4	55.0	54.3	−1.3
1500	225×10^4	38.2	42.4	10.9

Empleando el método de mínimos cuadrados, la ecuación para la curva ajustada se obtiene como

$$H[\text{pie}] = 135 - 4.11 \times 10^5\,[Q\,(\text{gpm})]^2$$

con coeficiente de determinación $r^2 = 0.993$.

El coeficiente de determinación, $r^2 = 0.993$, indica un ajuste muy bueno a los datos medidos. Como se muestra en la tabla, los errores porcentuales son pequeños, excepto en los puntos de 1200 y 1500 gpm. Las diferencias entre la curva ajustada y los valores calculados no serían notables sobre una gráfica.

Las curvas características típicas para una bomba centrífuga probada a velocidad constante se mostraron en forma cualitativa en la figura 7.4;[4] la curva de la carga contra la capacidad se reproduce en la figura 11.7 para compararla con las características predichas por el análisis idealizado. La figura 11.7 muestra que la carga a cualquier relación de flujo en la máquina real puede ser bastante menor que la predicha por el análisis idealizado. Algunas de las causas son:

1. A relaciones de flujo muy bajas una parte del fluido se recircula en el impulsor.
2. Tanto las pérdidas de fricción como las de fuga aumentan con la relación de flujo.
3. Se producen "pérdidas de impacto" por el desacoplamiento entre la velocidad relativa y la hoja del impulsor en la entrada.[5]

Curvas como las de las figuras 7.4 y 11.7 se miden a velocidad constante con un solo diámetro del impulsor. Es una práctica común variar la capacidad de la bomba cambiando el tamaño del impulsor en una voluta dada. Para presentar la información de manera compacta, es deseable incluir datos de pruebas de varios diámetros de impulsor en una sola gráfica, como se muestra en la figura 11.8. Como antes, para cada diámetro, se grafica la carga contra la relación de flujo; cada curva se etiqueta con el diámetro correspondiente. Los perfiles de eficiencia se grafican uniendo los puntos

[4] La única característica importante de la bomba, no mostrada en la figura 7.4, es la carga neta de succión positiva (*NPSH*) requerida para evitar la cavitación. La cavitación y la *NPSH* se tratarán en la sección 11-4.4.
[5] Esta pérdida es más grande a relaciones de flujo altas y bajas; disminuye esencialmente a cero cuando casi se alcanzan las condiciones óptimas de operación [8].

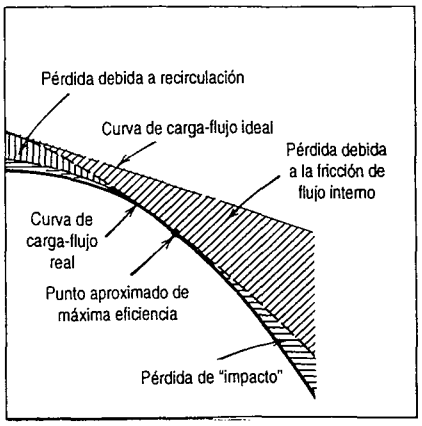


Fig. 11.7 Comparación de las curvas de carga-flujo ideal y real para una bomba centrífuga con álabes del impulsor curvados hacia atrás [7].

que tienen la misma eficiencia constante. También se grafican los perfiles de requerimiento de eficiencia. Por último, los requerimientos de carga de succión positiva (*NPSH*, por sus siglas en inglés) se muestran para los diámetros extremos; en la figura 11.8, la curva del impulsor de 8 pulg yacería entre las curvas de impulsor de 6 pulg y 10 pulg.

Para esta máquina típica, la carga es un máximo a válvula cerrada, y disminuye continuamente a medida que aumenta la relación de flujo. La potencia de entrada es mínima a válvula cerrada y aumenta conforme se incrementa el caudal. En consecuencia, para minimizar la carga inicial, tal vez sea aconsejable arrancar la bomba con la válvula de salida cerrada. (Sin embargo, la válvula puede no dejarse cerrada durante mucho tiempo, para que la bomba no se sobrecaliente cuando la energía disipada por la fricción se transfiera al agua en la caja.) La eficiencia de la bomba aumenta con la capacidad hasta que se alcanza el *punto de máxima eficiencia* (PME), y después disminuye

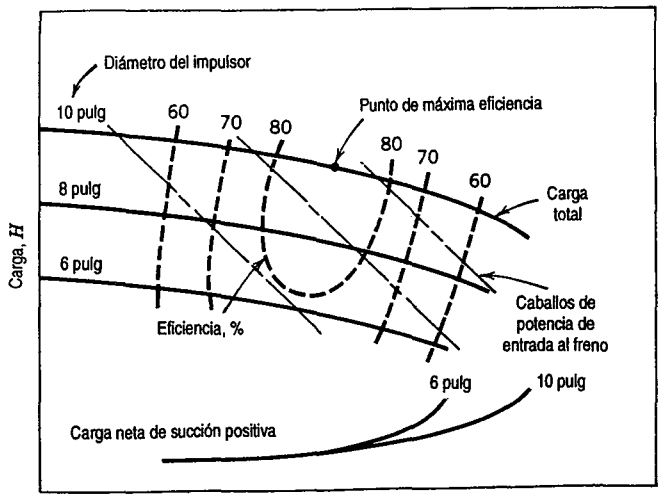


Fig. 11.8 Curvas típicas de funcionamiento de bomba a partir de pruebas con tres diámetros de impulsor a velocidad constante [7].

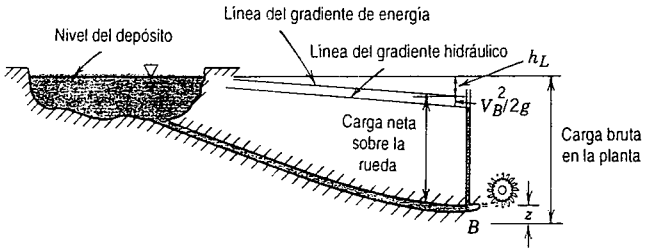


Fig. 11.9 Esquema de la instalación de una turbina de impulso, donde se muestran las definiciones de cargas bruta y neta [8].

conforme aumenta la relación de flujo. Para un consumo de energía mínimo, es deseable operar lo más cerca posible del PME.

Las bombas centrífugas pueden combinarse en paralelo para entregar un flujo mayor, o en serie para entregar una carga más alta. Varios fabricantes construyen bombas de etapas múltiples, las cuales son en esencia varias bombas arregladas en serie en un solo empaque. Las bombas y los sopladores suelen probarse a varias velocidades constantes. La práctica común es accionar las máquinas con motores eléctricos a velocidad casi constante, pero en algunas aplicaciones de sistemas pueden producirse notables ahorros de energía con la operación de velocidad variable. Estos temas de aplicación de bombas se estudian en la sección 11-5.

Los procedimientos de prueba para turbinas son similares a los de bombas, excepto en que un dinamómetro se utiliza para absorber la salida de potencia de la turbina mientras se miden la velocidad y el momento de torsión. Las turbinas suelen proponerse para operar a una velocidad constante, que es una fracción o un múltiplo de la frecuencia de la potencia eléctrica. Por ello, las pruebas de turbina se ejecutan a velocidad constante bajo carga variable, en tanto se mide el consumo de agua y se calcula la eficiencia.

La turbina de impulso es una turbomáquina relativamente simple, de manera que la usaremos para ilustrar los resultados de prueba típicos. Las turbinas de impulso se eligen cuando la carga disponible supera cerca de 300 m. La mayor parte de las turbinas de impulso empleadas hoy en día son versiones mejoradas de la *rueda de Pelton* desarrollada en la década de 1880 por el ingeniero de minas estadounidense, Lester Pelton [9]. Una turbina de impulso se alimenta con agua bajo carga elevada a través de un largo conducto denominado *tubo de carga*. El agua se acelera a través de una tobera y se descarga como un chorro libre de alta velocidad a la presión atmosférica. El chorro incide desviando a los cangilones unidos al aro de una rueda rotatoria (figura 11.3*a*). Su energía cinética se entrega cuando lo desvían los cangilones. La salida de la turbina es controlada a velocidad de chorro esencialmente constante, cambiando la relación de flujo del agua que incide sobre los cangilones. Una tobera de área variable puede utilizarse para efectuar cambios pequeños y graduables en la salida de la turbina. Cambios mayores o más rápidos deben conseguirse mediante deflectores de chorro, o toberas auxiliares, para evitar cambios repentinos en la velocidad de flujo y las altas presiones que resultan en la larga columna de agua en el tubo de carga. El agua descargada sobre la rueda a velocidad relativamente baja, cae en el canal de descarga. El nivel de éste se ajusta para evitar que la rueda se sumerja durante las condiciones de inundación. Cuando se disponen grandes cantidades de agua, puede obtenerse potencia adicional conectando dos ruedas a un solo eje o arreglando dos o más chorros para que incidan sobre una sola rueda.

La figura 11.9 ilustra una instalación de turbina de impulso y las definiciones de carga bruta y neta [8]. La *carga bruta* disponible es la diferencia entre los niveles en el depósito de alimentación y el canal de descarga. La *carga neta* o efectiva, H, utilizada para calcular la eficiencia, se toma

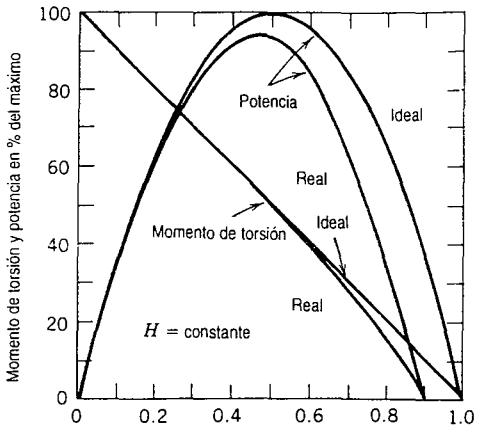


Fig. 11.10 Funcionamiento de velocidad variable ideal y real para una turbina de impulso [10].

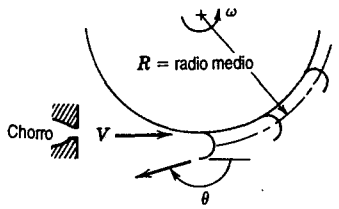
como la diferencia entre la carga total en la entrada de la tobera y la elevación de la línea central de la tobera [8]. De tal modo, la turbina de impulso se carga con la pérdida en la tobera y con cualquier energía cinética residual del agua que cae en el canal de descarga. Sin embargo, no se carga con la elevación de la tobera arriba del canal de descarga. (En instalaciones de alta carga esta corrección es un pequeño porcentaje de la carga bruta.) En la práctica, el tubo de carga suele dimensionarse de manera que a la potencia nominal, la carga neta sea 85 − 95 por ciento de la carga bruta.

Además de la pérdida de la tobera, las pérdidas de rozamiento con el aire, la fricción de los cojinetes y la fricción superficial entre el chorro y el cangilón reducen el funcionamiento en comparación con el caso ideal, sin fricción. La figura 11.10 muestra los resultados típicos de las pruebas efectuadas a carga constante.

La eficiencia pico de la turbina de impulso corresponde a la potencia pico, puesto que las pruebas se efectúan a carga y relación de flujo constantes. Para la turbina ideal, como se muestra en el problema ejemplo 11.5, esto ocurre cuando la velocidad de la rueda es la mitad de la velocidad del chorro. En las instalaciones reales, la eficiencia pico ocurre a una velocidad de rueda sólo ligeramente menor que la velocidad del chorro. Esta condición fija la velocidad de la rueda una vez que la velocidad del chorro se establece para una instalación determinada. En el caso de grandes unidades, la eficiencia total puede ser tan alta como el 88 por ciento [11].

EJEMPLO 11.5 Velocidad óptima para una turbina de impulso

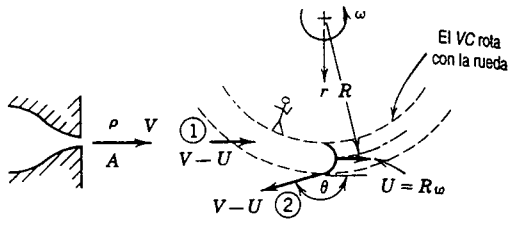
Una rueda de Pelton es una forma de turbina de impulso adaptada a situaciones de alta carga y baja relación de flujo. Considere la rueda de Pelton y el arreglo simple del chorro que se muestra, en la cual la corriente del mismo incide tangencialmente sobre el cangilón y se desvía un ángulo θ. Obtenga una expresión para el momento de torsión ejercido por la corriente de agua sobre la rueda y la salida de potencia correspondiente. Muestre que la potencia es un máximo cuando la velocidad del cangilón, $U = R\,\omega$, es la mitad de la velocidad del chorro, V.



PROBLEMA EJEMPLO 11.5

DATOS: Una rueda de Pelton y el chorro simple mostrados.

ENCUENTRE: *a*) Una expresión para el momento de torsión ejercido sobre la rueda.
b) Una expresión para la salida de potencia.
c) Muestre que la potencia es un máximo cuando $U = V/2$.



SOLUCIÓN:
Aplique la ecuación del momento angular al *VC* mostrado.

Ecuación básica:

$$\vec{r}\times\vec{F}_s + \int_{VC}\vec{r}\times\vec{g}\rho d\forall + \vec{T}_{eje} - \int_{VC}\vec{r}\times[2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}]\rho d\forall$$

(1) (2) (3)

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho d\forall + \int_{SC}\vec{r}\times\vec{V}_{xyz}\rho\vec{V}_{xyz}\cdot d\vec{A} \qquad (4.53)$$

(4)

Suposiciones:
1) Se desprecia el momento de torsión debido a fuerzas superficiales
2) Se desprecia el momento de torsión debido a las fuerzas másicas
3) Se desprecia la masa de agua sobre la rueda
4) Flujo estable respecto a la rueda
5) Toda el agua que se emite desde la tobera actúa sobre los cangilones
6) La altura del cangilón es pequeña comparada con *R*, por lo que $r_1 \approx r_2 \approx R$
7) Flujo uniforme en cada sección
8) Ningún cambio en la velocidad del chorro relativa al cangilón

Por tanto, puesto que toda el agua del chorro pasa por los cangilones,

$$\vec{T}_{eje} = \vec{r}_1\times\vec{V}_1\ \{-|\rho VA|\} + \vec{r}_2\times\vec{V}_2\ \{+|\rho VA|\}.$$

$$\vec{r}_1 = R\hat{e}_r \qquad \vec{r}_2 = R\hat{e}_r$$

$$\vec{V}_1 = (V-U)\hat{e}_\theta \qquad \vec{V}_2 = (V-U)\cos\theta\,\hat{e}_\theta + (V-U)\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_r$$

$$T_{eje}\hat{k} = R(V-U)\hat{k}(-\rho VA) + R(V-U)\cos\theta\,\hat{k}(\rho VA)$$

por lo que, finalmente,

$$T_{eje}\hat{k} = -R(1-\cos\theta)\rho V A(V-U)\hat{k}$$

Éste es el momento de torsión externo del eje sobre el volumen de control, esto es, sobre la rueda. El momento de torsión ejercido por el agua sobre la rueda es igual y opuesto,

$$\vec{T}_{\text{salida}} = -\vec{T}_{\text{eje}} = R(1 - \cos\theta)\rho V A(V - U)\hat{k} = \rho QR(V - U)(1 - \cos\theta)\hat{k} \longleftarrow \vec{T}_{\text{salida}}$$

La salida de potencia correspondiente es

$$\dot{W}_{\text{salida}} = \vec{\omega} \cdot \vec{T}_{\text{salida}} = R\omega(1 - \cos\theta)\rho V A(V - U) = \rho Q\, U(V - U)(1 - \cos\theta \longleftarrow \dot{W}_{\text{salida}}$$

Para encontrar la condición de potencia máxima, diferencie la expresión para la potencia con respecto a la velocidad de la rueda, U, e iguale a cero el resultado. Por consiguiente,

$$\frac{d\dot{W}}{dU} = \rho Q(V - U)(1 - \cos\theta) + \rho Q\, U(-1)(1 - \cos\theta) = 0$$

$$\therefore (V - U) - U = V - 2U = 0$$

De modo que para la potencia máxima, $U = V/2$.

Nota: La desviación del flujo en un ángulo $\theta = 180°$ brindaría la potencia máxima con $U = V/2$. En la práctica, es posible desviar la corriente de chorro hasta ángulos de 165°. Con $\theta = 165°$, $1 - \cos\theta \approx 1.97$, o aproximadamente 1.5 por ciento debajo del valor para la potencia máxima.

El propósito de este problema fue aplicar el principio del momento angular a un volumen de control rotatorio y mostrar que, para una turbina de impulso ideal, la potencia pico ocurre cuando la velocidad de la rueda es la mitad de la velocidad del chorro.

En la práctica, las turbinas hidráulicas suelen operar a velocidad constante, y la salida se varía cambiando el área de la abertura de la tobera del chorro con una válvula de aguja. Las pérdidas en la tobera se incrementan ligeramente y las pérdidas mecánicas se vuelven una fracción más grande de la salida cuando la válvula está cerrada, por lo que la eficiencia cae rápidamente a baja carga, como se muestra en la figura 11.11; para esta rueda de Pelton, la eficiencia permanece arriba de 85 por ciento del 40 al 110 por ciento de la carga completa.

A cargas menores, las turbinas de reacción brindan mejor eficiencia que las turbinas de impulso. En contraste con el flujo en una bomba centrífuga, el de una turbina de reacción entra al rotor en la sección radial más grande (exterior) y se descarga en la más pequeña (interior), después de transferir la mayor parte de su energía al rotor. Las turbinas de reacción tienden a ser máquinas de baja carga y alto flujo. Una instalación de turbina de reacción típica se muestra en forma esquemática en la figura 11.12, donde se indica la terminología utilizada para definir las cargas.

El flujo de agua llena por completo a las turbinas de reacción. En consecuencia, es posible utilizar un difusor o un tubo de aspiración para recuperar una fracción de la energía cinética que permanece constante en el agua que deja al rotor. El tubo de drenaje forma una parte integral del diseño de la instalación. Como se muestra en la figura 11.12, la *carga bruta* disponible es la diferencia entre la carga del depósito de suministro y la carga del canal de descarga. La *carga efectiva* o *carga neta*, H, utilizada para calcular la eficiencia, es la diferencia entre la elevación de la línea de gradiente de energía justo aguas arriba de la turbina y la del canal de descarga; el beneficio que se obtendrá del tubo de aspiración en la reducción de la velocidad de descarga es aparente. Visto de otra manera, el efecto del tubo de arrastre es dismimuir la presión en la descarga de la turbina; esto aumenta el cambio en la carga de presión a través de la turbina, arriba del que habría sin el tubo de aspiración.

Un rodete eficiente de flujo mixto fue desarrollado por James B. Francis durante una cuidadosa serie de experimentos en Lowell, Massachusetts durante los años de 1840 [9]. Una turbina eficiente de propela de flujo axial, con paletas ajustables, fue desarrollada por el profesor alemán Victor

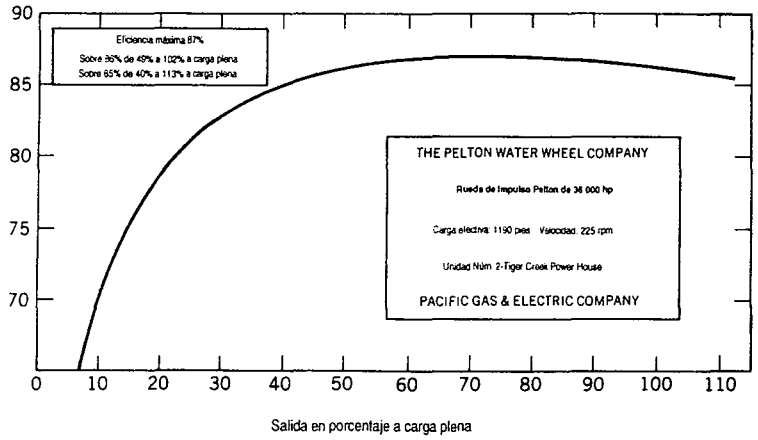


Fig. 11.11 Relación entre eficiencia y salida para una turbina hidráulica típica de Pelton (adaptada de [11]).

Kaplan entre 1910 y 1924. La *turbina Francis* (Fig. 11.3*b*) suele elegirse cuando $15 \leq H \leq 300$ m, y la *turbina Kaplan* (Fig. 11.3*c*) se prefiere a menudo para cargas de 15 m o menos. El funcionamiento de las turbinas de reacción puede medirse de la misma manera que el funcionamiento de la turbina de impulso. Sin embargo, debido a que las cargas brutas son menores, cualquier cambio en el nivel del agua durante la operación es más significativo. Por consiguiente, las mediciones deben efectuarse a una serie de cargas para definir completamente el funcionamiento de la turbina de reacción.

Un ejemplo de la presentación de datos para una turbina de reacción se brinda en la figura 11.13, donde se muestra la eficiencia a diversas potencias de salida para una serie de cargas constantes [10]. La turbina de reacción tiene una eficiencia más alta que la turbina de impulso, pero la eficiencia varía de manera más pronunciada con la carga.

Como un lector observador, usted habrá notado que la figura 11.13 contiene tanto resultados de prueba de modelos (eficiencias esperadas) como resultados a escala natural. Usted se preguntará, "¿Cómo se diseñan y conducen las pruebas de modelos, y cómo se escalan los resultados de prueba para predecir el funcionamiento del prototipo?" Para responder estas interrogantes, continúe la lectura.

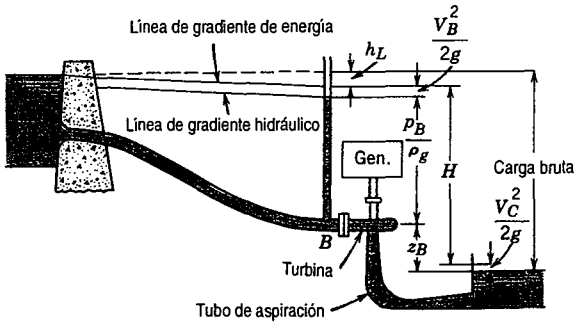


Fig. 11.12 Diagrama esquemático de la instalación de una turbina de reacción típica, donde se muestran las definiciones de la terminología de carga [8].

11-4.2 Análisi

El
los
los
La

co
pri
tur
co

el

do
se
rea
cer

(ec

m

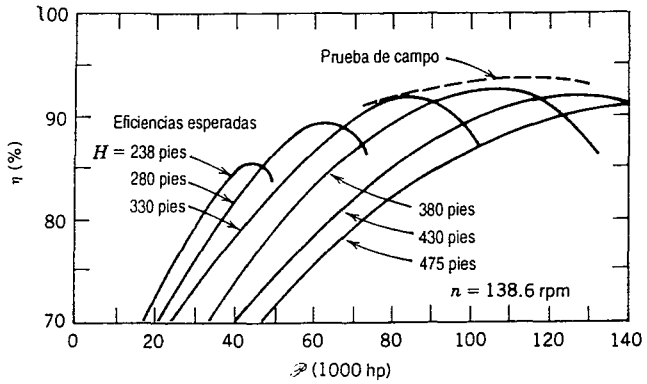


Fig. 11.13 Funcionamiento de una turbina de reacción típica de acuerdo con las predicciones de las pruebas de modelo (eficiencias esperadas) y confirmadas por las pruebas de campo [10].

11-4.2 Análisis dimensional y velocidad específica

El análisis dimensional para turbomáquinas se presentó en el capítulo 7, donde el flujo, la carga y los coeficientes de potencia adimensionales se obtuvieron en forma generalizada. Se mostró que los parámetros independientes fueron el coeficiente de flujo y una forma del número de Reynolds. La carga y los coeficientes de potencia fueron los parámetros dependientes.

Nuestro objetivo aquí es desarrollar las formas de los coeficientes adimensionales de uso común, y brindar ejemplos que ilustren su uso al seleccionar un tipo de máquina, al diseñar las pruebas de modelos y al escalar los resultados. Puesto que desarrollamos una teoría idealizada para turbomáquinas en la sección 11-3, podemos conseguir información física adicional desarrollando coeficientes adimensionales directamente de las ecuaciones de cálculo que resulten.

El *coeficiente de flujo*, Φ, se define normalizando la relación de flujo volumétrico, empleando el área de la salida y la velocidad de la rueda a la salida. De tal modo,

$$\Phi = \frac{Q}{A_2 U_2} = \frac{V_{n_2}}{U_2} \tag{11.9}$$

donde V_{n_2} es la componente de velocidad perpendicular al área de salida. Esta componente también se conoce como la *velocidad meridional* en el plano de salida de la rueda. Aparece en la proyección real en el *plano meridional*, el cual es cualquier sección transversal radial que atraviese la línea central de la máquina.

Es posible obtener un *coeficiente de carga* adimensional, Ψ, normalizando la carga, H, (ecuación 11.2*c*) con U_2^2/g. De esta manera,

$$\Psi = \frac{gH}{U_2^2} \tag{11.10}$$

Un *coeficiente de momento de torsión* adimensional, τ, puede obtenerse normalizando el momento de torsión, T (ecuación 11.1c) con $\rho A_2 U_2^2 R_2$. En consecuencia,

$$\tau = \frac{T}{\rho A_2 U_2^2 R_2} \tag{11.11}$$

Finalmente, el *coeficiente de potencia* adimensional, Π, se obtiene normalizando la potencia $\dot{W}$, (la ecuación 11.2b) con $\dot{m}U_2^2 = \rho Q U_2^2$. Así,

$$\Pi = \frac{\dot{W}}{\rho Q U_2^2} = \frac{\dot{W}}{\rho \omega^2 Q R_2^2} \tag{11.12}$$

En el caso de bombas, la potencia de entrada mecánica excede la potencia hidráulica, y la eficiencia se define como $\eta_p = \dot{W}_h/\dot{W}_m$ (ecuación 11.3a). Por consiguiente,

$$\dot{W}_m = T\omega = \frac{1}{\eta_p}\dot{W}_h = \frac{\rho Q g H}{\eta_p} \tag{11.13}$$

Al introducir los coeficientes adimensionales Φ (ecuación 11.9), Ψ (ecuación 11.10) y τ (ecuación 11.11) en la ecuación 11.13, obtenemos una relación análoga entre los coeficientes como

$$\tau = \frac{\Psi\Phi}{\eta_p} \tag{11.14}$$

En el caso de turbinas, la potencia de salida mecánica es menor que la potencia hidráulica, y la eficiencia se define como $\eta_t = \dot{W}_m/\dot{W}_h$ (ecuación 11.3b). Por tanto,

$$\dot{W}_m = T\omega = \eta_t \dot{W}_h = \eta_t \rho Q g H \tag{11.15}$$

Con la introducción de los coeficientes adimensionales Φ, Ψ y τ en la ecuación 11.15, obtenemos una relación análoga entre los coeficientes adimensionales como

$$\tau = \eta_t \Psi\Phi \tag{11.16}$$

Los coeficientes adimensionales forman las bases para diseñar pruebas de modelos y escalar los resultados. Como se muestra en el capítulo 7, el coeficiente de flujo se trata como el parámetro independiente. En ese caso, si los efectos viscosos se ignoran, los coeficientes de carga, momento de torsión y potencia se tratan como parámetros dependientes múltiples. Bajo estas suposiciones, la similitud dinámica se alcanza cuando el coeficiente de flujo se iguala entre las máquinas modelo y prototipo.

Como se discutió en el capítulo 7, un parámetro útil denominado *velocidad específica* puede obtenerse combinando los coeficientes de flujo y de carga y eliminando el tamaño de la máquina (ecuación 7.6). El resultado fue

$$N_s = \frac{\omega Q^{1/2}}{H^{3/4}} \tag{11.17}$$

Cuando la carga se expresa como energía por masa unitaria (es decir, con dimensiones equivalentes a L^2/t^2, o g veces la carga en altura de líquido), y ω se expresa en radianes por segundo, la velocidad específica definida por la ecuación 11.17 es adimensional.

Aunque la velocidad específica es un parámetro adimensional, es una práctica común emplear un conjunto de unidades conveniente pero inconsistente para especificar las variables, ω, Q y H. Cuando se hace esto, la velocidad específica no es un parámetro sin unidades y la magnitud de la

velocidad específica depende de las unidades utilizadas para calcularla. Las unidades típicas empleadas en la práctica ingenieril de los Estados Unidos para bombas son rpm para ω, gpm para Q y pies (energía por peso unitario) para H. Los valores de la velocidad específica adimensional, N_s (ecuación 11.17), deben multiplicarse por 2733 para obtener los valores de la velocidad específica correspondiente a este comúnmente utilizado pero inconsistente conjunto de unidades (véase el problema ejemplo 11.6).

La salida de potencia de una turbina hidráulica es proporcional al producto de la relación de flujo volumétrico y la carga, $\mathcal{P} \propto QH$; de tal manera, las dimensiones de Q son $\mathcal{P}/H$. Cuando se escribe en términos de la salida de potencia de la turbina, la velocidad específica se convierte en

$$N_S = \frac{\omega \mathcal{P}^{1/2}}{H^{5/4}}$$

Las unidades típicas utilizadas en la práctica ingenieril en los Estados Unidos para turbinas hidráulicas son rpm para ω, caballos de potencia para $\mathcal{P}$ y pies para H.

La velocidad específica puede considerarse como la velocidad de operación a la cual una máquina produce una carga unitaria a una relación de flujo volumétrico unitaria. Manteniendo constante la velocidad específica se describen todas las condiciones de operación de máquinas geométricamente similares con condiciones de flujo similares.

Se acostumbra caracterizar una máquina por medio de su velocidad específica en el punto de diseño. Esta velocidad específica se ha determinado para diferenciar las características hidráulicas de diseño de una máquina. Se producen velocidades específicas bajas de manera eficiente mediante máquinas de flujo radial, en tanto que las de flujo axial producen velocidades específicas altas. Para una carga especificada y una relación de flujo, puede elegirse una máquina ya sea de velocidad específica baja (que opera a baja velocidad) o de velocidad específica alta (la cual opera a una velocidad mayor).

Las proporciones típicas para diseños de bombas comerciales y su variación con respecto a la velocidad específica adimensional se muestran en la figura 11.14. En esta figura, el tamaño de cada máquina se ha ajustado para producir la misma carga y relación de flujo cuando gira a una velocidad que corresponde a la específica. De esta manera puede verse que si el tamaño y el peso de la máquina son críticos, uno debe elegir una velocidad específica más alta.

Las tendencias de eficiencia correspondientes para bombas típicas se muestran en la figura 11.15. La figura 11.14 muestra la tendencia de geometría radial (bombas puramente centrífugas), pasando por flujo mixto, a geometrías de flujo axial cuando aumenta la velocidad específica. La figura 11.15 muestra que la capacidad de la bomba se incrementa por lo general cuando aumenta la velocidad específica; la figura muestra también que a cualquier velocidad específica dada, la eficiencia es mayor para bombas grandes que para pequeñas. Físicamente este *efecto de escala*

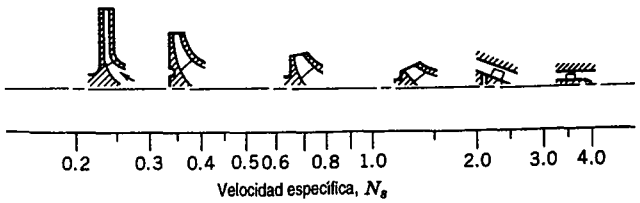


Fig. 11.14 Proporciones geométricas típicas de bombas comerciales conforme varían con la velocidad específica adimensional [12].

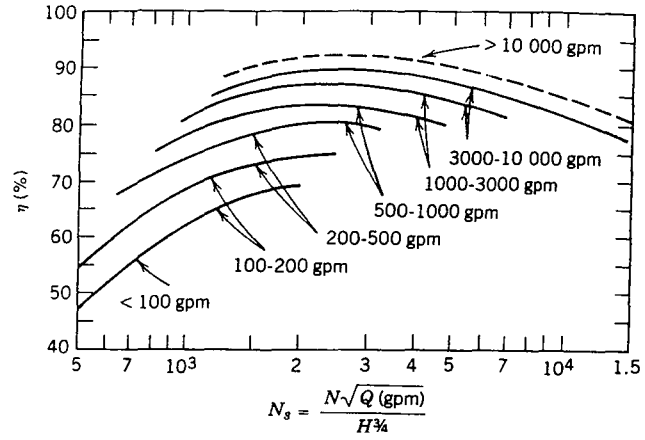


Fig. 11.15 Eficiencias promedio de bombas comerciales conforme varían con la velocidad específica y el tamaño de la bomba [10]. (Observe que el parámetro de la velocidad específica se calcula en unidades usuales de los E.U. de rpm, gpm y pies, por lo que *no* es adimensional.)

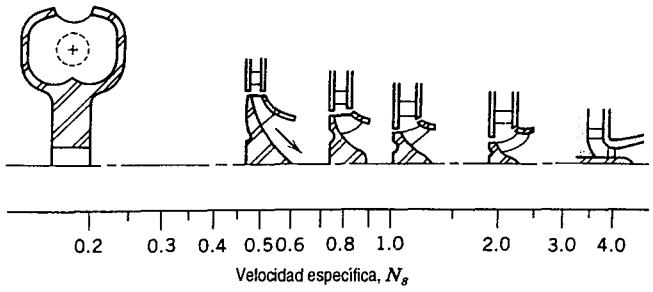


Fig. 11.16 Proporciones geométricas típicas de turbinas hidráulicas comerciales conforme varían con la velocidad específica adimensional [12].

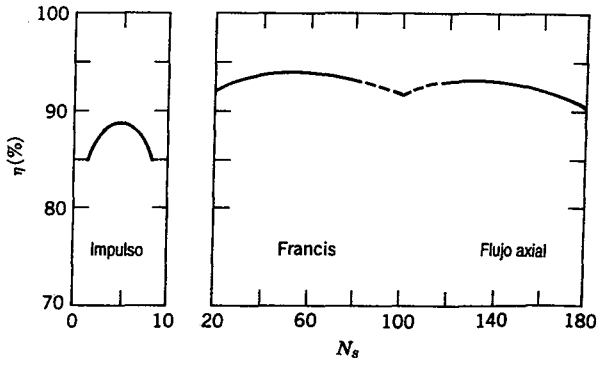


Fig. 11.17 Eficiencias promedio de turbinas hidráulicas comerciales conforme varían con la velocidad específica [10]. (Observe que el parámetro de la velocidad específica se calcula en unidades usuales de los E.U. de rpm, hp y pies, por lo que *no* es adimensional.)

significa que las p
bomba.

Las proporci
velocidad especif
la máquina se ha
en carga unitaria.
correspondiente

Diversas var
ingeniería, se em
empleadas más c

EJEMPLO 11.

En el punto de r
produce $H = 2$
correspondiente
m^3/s, m^2/s^2), y
relacionen las v

PROBLEMA

DATOS: U
rís

ENCUENTR

SOLUCIÓN

Ecuación de

De la inform

N_S (EU) =

Convierta

$\omega = 117$

$Q = 300$

$H = 21.$

La energí

$gH = 9$

significa que las pérdidas viscosas se vuelven menos importantes cuando aumenta el tamaño de la bomba.

Las proporciones características de turbinas hidráulicas también se correlacionan mediante la velocidad específica, como se muestra en la figura 11.16. Como en la figura 11.14, el tamaño de la máquina se ha escalado en esta ilustración para entregar aproximadamente la misma potencia en carga unitaria, cuando gira a una velocidad igual a la específica. Las tendencias de eficiencia correspondiente para tipos típicos de turbinas se muestran en la figura 11.17.

Diversas variaciones de velocidad específica, calculadas directamente a partir de unidades de ingeniería, se emplean ampliamente en la práctica. Las formas de velocidad específica para bombas empleadas más comúnmente se definen y comparan en el problema ejemplo 11.6.

EJEMPLO 11.6 Comparación de las definiciones de velocidad específica

En el punto de máxima eficiencia, una bomba centrífuga, con diámetro del impulsor $D = 8$ pulg, produce $H = 21.9$ pies a $Q = 300$ gpm con $\omega = 1170$ rpm. Calcule las velocidades específicas correspondientes utilizando: *a*) unidades usuales de Estados Unidos, *b*) unidades del SI (rad/s, m^3/s, m^2/s^2), y *c*) unidades europeas (rev/s, m^3/s, m^2/s^2). Determine factores de conversión que relacionen las velocidades específicas.

PROBLEMA EJEMPLO 11.6

DATOS: Una bomba centrífuga en el punto de máxima eficiencia (PME). Suponga que las características de la bomba son $H = 21.9$ pies, $Q = 300$ gpm y $\omega = 1170$ rpm.

ENCUENTRE: *a*) Evalúe la velocidad específica en unidades usuales de los Estados Unidos.
b) Calcule la velocidad específica en unidades del SI.
c) Calcule la velocidad específica en unidades europeas.
d) Determine factores de conversión para relacionar las velocidades específicas.

SOLUCIÓN:

Ecuación de cálculo: $N_s = \dfrac{\omega Q^{1/2}}{H^{3/4}}$

De la información proporcionada, la velocidad específica en unidades usuales de los Estados Unidos es

$$N_S\,(\text{EU}) = 1170\ \text{rpm} \times (300)^{1/2}\ \text{gpm}^{1/2} \times \frac{1}{(21.9)^{3/4}\ \text{pies}^{3/4}} = 2000 \longleftarrow N_s(\text{EU})$$

Convierta la información a unidades del SI:

$$\omega = 1170\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} = 123\ \text{rad/s}$$

$$Q = 300\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{pie}^3}{7.48\ \text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times (0.305)^3\ \frac{\text{m}^3}{\text{pie}^3} = 0.0190\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$H = 21.9\ \text{pie} \times 0.305\ \frac{\text{m}}{\text{pie}} = 6.68\ \text{m}$$

La energía por unidad de masa es

$$gH = 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 6.68\ \text{m} = 65.5\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

La velocidad específica en unidades del SI es

$$N_s(\text{SI}) = 123\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times (0.0190)^{1/2}\ \frac{\text{m}^{3/2}}{\text{s}^{1/2}} \times \frac{(\text{s}^2)^{3/4}}{(65.5)^{3/4}\,(\text{m}^2)^{3/4}} = 0.736 \longleftarrow N_S(\text{SI})$$

Convierta la velocidad de operación a hertz:

$$\omega = 1170\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times \frac{\text{Hz} \cdot \text{s}}{\text{rev}} = 19.5\ \text{Hz}$$

Por último, la velocidad específica en unidades europeas es

$$N_s(\text{Eur}) = 19.5\ \text{Hz} \times (0.0190)^{1/2}\ \frac{\text{m}^{3/2}}{\text{s}^{1/2}} \times \frac{(\text{s}^2)^{3/4}}{(65.5)^{3/4}\,(\text{m}^2)^{3/4}} = 0.117 \longleftarrow N_s(\text{Eur})$$

Para relacionar las velocidades específicas, forme los cocientes

$$\frac{N_s(\text{US})}{N_s(\text{Eur})} = \frac{2000}{0.117} = 17\ 100$$

$$\frac{N_s(\text{US})}{N_s(\text{SI})} = \frac{2000}{0.736} = 2720$$

El propósito de este problema es demostrar el método empleado para calcular la velocidad específica para bombas, a partir de cada una de las tres definiciones empleadas comúnmente, y comparar los resultados. (Se han utilizado tres cifras significativas en todos los cálculos en este ejemplo. Podrían obtenerse valores numéricos un poco diferentes si se llevaran más cifras significativas en cálculos intermedios.)

11-4.3 Reglas de similitud

Los fabricantes de bombas ofrecen un número limitado de tamaños y diseños de volutas. Con frecuencia, las volutas de diferentes tamaños se desarrollan a partir de un diseño común, incrementando o disminuyendo todas las dimensiones por la misma razón de escala. Puede obtenerse una variación adicional en las curvas características variando la velocidad de operación o cambiando el tamaño del impulsor dentro de un empaque de bomba determinado. Los parámetros adimensionales desarrollados en el capítulo 7 forman la base para predecir los cambios en el funcionamiento que resultan de los cambios en el tamaño de la bomba, la velocidad de operación o el diámetro del impulsor.

Para alcanzar la similitud dinámica se requiere similitud geométrica y cinemática. Suponiendo bombas y campos de flujo similares, y despreciando los efectos viscosos, como se mostró en el capítulo 7, se obtiene similitud dinámica cuando el coeficiente de flujo adimensional se mantiene constante. Se supone la operación dinámicamente similar cuando dos condiciones de flujo satisfacen la relación

$$\frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} \tag{11.18a}$$

Los coeficientes de carga y potencia adimensionales dependen sólo del coeficiente de flujo, esto es,

$$\frac{H}{\omega^2 D^2} = f_1\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\mathcal{P}}{\rho\omega^3 D^5} = f_2\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)$$

Cuando esto es cierto, como se mostró en el problema ejemplo 7.6, las características de la bomba en una nueva condición (subíndice 2) pueden relacionarse con los de la vieja condición (subíndice 1) por medio de

$$\frac{H_1}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{H_2}{\omega_2^2 D_2^2} \tag{11.18b}$$

y

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1 \omega_1^3 D_1^5} = \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2 \omega_2^3 D_2^5} \tag{11.18c}$$

Estas relaciones de escalamiento pueden utilizarse para predecir los efectos de cambios en la velocidad de operación de la bomba, su tamaño o el diámetro del impulsor dentro de una voluta determinada.

La situación más simple es cuando sólo cambia la velocidad de la bomba. En ese caso se asegura la similitud geométrica. La similitud cinemática se cumple si no hay cavitación; los flujos son entonces dinámicamente similares cuando se igualan los coeficientes de flujo. Para este caso de cambio de velocidad con diámetro fijo, la ecuación 11.18 se transforma en

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{11.19a}$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \tag{11.19b}$$

$$\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 \tag{11.19c}$$

En el problema ejemplo 11.4 se mostró que una curva de funcionamiento de una bomba puede modelarse con precisión de ingeniería mediante la relación parabólica, $H = H_0 - AQ^2$. Como esta representación contiene dos parámetros, la curva de la bomba para las nuevas condiciones de operación puede obtenerse escalando cualesquiera dos puntos a partir de la curva de funcionamiento medida en la condición de operación original. Usualmente, la condición a válvula cerrada y el

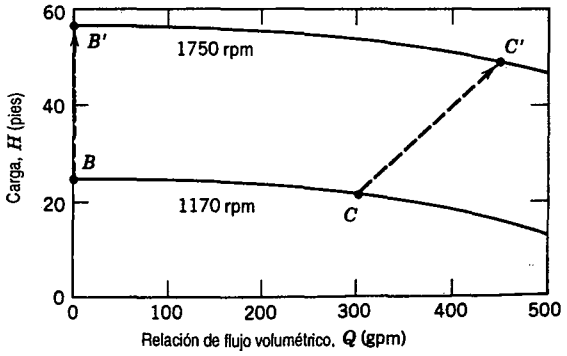


Fig. 11.18 Diagrama esquemático de una curva de funcionamiento de una bomba, que ilustra el efecto de un cambio en su velocidad de operación.

punto de máxima eficiencia se eligen para el escalamiento. Estos puntos se representan por medio de B y C en la figura 11.18.

Como se mostró por medio de la ecuación 11.19a, la relación de flujo aumenta por la razón de velocidades de operación, por lo que

$$Q_{B'} = \frac{\omega_2}{\omega_1} Q_B = 0 \quad \text{y} \quad Q_{C'} = \frac{\omega_2}{\omega_1} Q_C$$

De tal modo, el punto B' se localiza directamente arriba del punto B, y el punto C' se mueve a la derecha del punto C.

La carga aumenta por el cuadrado de la razón de velocidades, por lo que

$$H_{B'} = H_B \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \quad \text{y} \quad H_{C'} = H_C \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2$$

Los puntos C y C', donde las condiciones de flujo dinámicamente similares están presentes, reciben el nombre de puntos *homólogos* para la bomba.

Es sencillo de mostrar (véase el problema ejemplo 11.7) que la curva de funcionamiento resultante está dada por

$$H' = H'_0 - AQ^2 \tag{11.20}$$

donde A es la constante de la curva original.

La eficiencia permanece relativamente constante entre puntos de operación dinámicamente similares cuando sólo cambia la velocidad de operación de la bomba. La aplicación de estas ideas se ilustra en el problema ejemplo 11.7.

EJEMPLO 11.7 Escalamiento de curvas de funcionamiento de bombas

Cuando se opera a $\omega = 1170$ rpm, una bomba centrífuga, con diámetro del impulsor $D = 8$ pulg, tiene carga de válvula cerrada $H_0 = 25.0$ pies de agua. A la misma velocidad de operación, la máxima eficiencia ocurre a $Q = 300$ gpm, donde la carga es $H = 21.9$ pies de agua. Desarrolle un ajuste para la curva de la bomba a 1170 rpm. Escale los resultados a una nueva velocidad de operación de 1750 rpm. Grafique y compare los resultados del ajuste de la curva.

PROBLEMA EJEMPLO 11.7

DATOS: Una bomba centrífuga (con diámetro del impulsor, $D = 8$ pulg) operada a $\omega = 1170$ rpm.

Q (gpm)	0	300
H (pies de agua)	25.0	21.9

ENCUENTRE: *a*) Desarrolle un ajuste de curva para las características de la bomba a 1170 rpm.
b) Escale el ajuste de la curva a una nueva velocidad de operación de 1750 rpm.
c) Grafique y compare los resultados de ajuste de la curva.

SOLUCIÓN: Suponga una variación parabólica en la carga de la bomba, de la forma $H = H_0 - AQ^2$. Resolviendo para A.

$$A = \frac{H_0 - H}{Q^2} = (25.0 - 2.19) \text{ pies} \times \frac{1}{(300)^2 \text{ (gpm)}^2} = 3.44 \times 10^{-5} \text{ pie/(gpm)}^2$$

La ecuación de la curva ajustada es

$$H \text{ (pie)} = 25.0 - 3.44 \times 10^{-5} [Q \text{ (gpm)}]^2$$

La bomba permanece igual, de modo que las dos condiciones de flujo son geométricamente similares. Suponiendo que no ocurre cavitación, los dos flujos son también cinemáticamente similares. En ese caso, la similitud dinámica se obtendrá cuando se igualen los dos coeficientes de flujo. Denotando la condición de 1170 rpm mediante el subíndice 1 y la condición de 1750 rpm por medio del subíndice 2, entonces

$$\frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} = \frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} \quad \text{o} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

puesto que $D_2 = D_1$. Para la condición de válvula cerrada,

$$Q_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} Q_1 = \frac{1750 \text{ rpm}}{1170 \text{ rpm}} \times 0 \text{ gpm} = 0 \text{ gpm}$$

Del punto de mejor eficiencia, la nueva relación de flujo es

$$Q_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} Q_1 = \frac{1750 \text{ rpm}}{1170 \text{ rpm}} \times 300 \text{ gpm} = 449 \text{ gpm}$$

Las cargas de las bombas se relacionan por medio de

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\omega_2^2 D_2^2}{\omega_1^2 D_1^2} \quad \text{o} \quad \frac{H_2}{H_1} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2$$

como $D_2 = D_1$. Para la condición de válvula cerrada,

$$H_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 H_1 = \left(\frac{1750 \text{ rpm}}{1170 \text{ rpm}}\right)^2 25.0 \text{ pies} = 55.9 \text{ pies}$$

En el punto de máxima eficiencia,

$$H_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 H_1 = \left(\frac{1750 \text{ rpm}}{1170 \text{ rpm}}\right)^2 21.9 \text{ pies} = 49.0 \text{ pies}$$

Después de esto, los parámetros del ajuste de curva a 1750 rpm pueden determinarse. Resolviendo para A,

$$A_2 = \frac{H_{02} - H_2}{Q_2^2} = (55.9 - 49.0) \text{ pies} \times \frac{1}{(449)^2 \text{ (gpm)}^2} = 3.44 \times 10^{-5} \text{ pies/(gpm)}^2$$

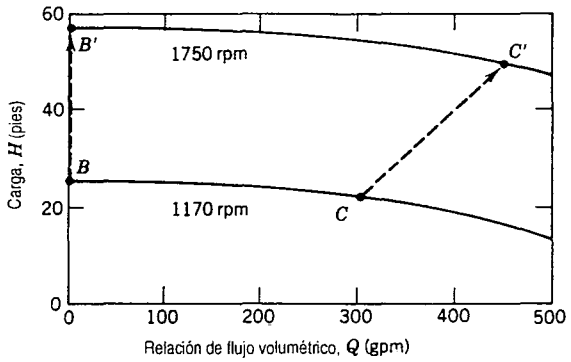
Observe que A_2 a 1750 rpm es la misma que A_1 a 1170 rpm. De tal manera, el coeficiente A en la ecuación de la curva ajustada no cambia cuando se modifica la velocidad de la bomba. Las dos ecuaciones del ajuste de la curva son

$$H_1 = 25.0 - 3.44 \times 10^{-5}[Q \text{ (gpm)}]^2 \qquad \text{(a 1170 rpm)}$$

y

$$H_2 = 55.9 - 3.44 \times 10^{-5}[Q \text{ (gpm)}]^2 \qquad \text{(a 1750 rpm)}$$

Las curvas de la bomba se comparan en la siguiente gráfica:



El propósito de este problema fue ilustrar el procedimiento para el escalamiento para curvas de bombas, de una velocidad a otra.

En principio, la similitud geométrica se mantendría cuando bombas de la misma geometría, difiriendo en el tamaño sólo por una razón de escala, se probaran a la misma velocidad de operación. Se prediciría que el flujo y la potencia variarían con el tamaño de la bomba como

$$Q_2 = Q_1\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3, \quad H_2 = H_1\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2, \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \tag{11.21}$$

No es posible comparar directamente las eficiencias en las dos condiciones de operación. Sin embargo, los efectos viscosos deben volverse relativamente menos importantes cuando el tamaño de la bomba aumenta. De este modo, la eficiencia debe mejorar ligeramente cuando se incrementa el diámetro.

Moody [13] sugiere una ecuación empírica que puede emplearse para estimar la eficiencia máxima de una bomba prototipo, basada en datos de prueba de un modelo geométricamente similar de la bomba prototipo. Su ecuación se escribe

$$\frac{1-\eta_p}{1-\eta_m} = \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{11.22}$$

Para desarrollar la ecuación 11.22, Moody consideró que sólo la resistencia superficial cambia con la escala del modelo, por lo que las pérdidas en los pasajes de la misma rugosidad varían como $1/D^5$. Desafortunadamente, resulta difícil mantener la misma rugosidad relativa entre las bombas modelo y prototipo. Además, el modelo de Moody no explica cualquier diferencia en las pérdidas mecánicas entre el modelo y el prototipo, ni permite determinar las eficiencias fuera del valor máximo. No obstante, el escalamiento del punto de eficiencia máximo es útil para obtener un conocimiento general de la curva de eficiencia de la bomba prototipo.

El caso final es cuando el diámetro del impulsor cambia dentro de una voluta de geometría fija. La similitud geométrica no se preserva estrictamente en este caso, ya que cambian las dimensiones del espaciamiento entre el impulsor y la voluta de la bomba. Sin embargo, el análisis de similitud basado en un simple cambio de escala puede incluso brindar una estimación útil del funcionamiento si el cambio en el tamaño del impulsor no es demasiado drástico [14].

11-4.4 Cavitació

La c
presi
líqui
flujo
pasa
de l
inest

rápic
Ade
de v
men
men

imp
cavi
aum

la p
posi
succ
esta
en e

entr
vap
pos
líqu
es,
NP
Los
mo
vol
má

ma
y e
ell
de
flu
fin
si

[6] L
es
mi

11-4.4 Cavitación y carga neta de succión positiva

La cavitación puede ocurrir en cualquier máquina en que se manejen líquidos siempre que la presión estática local caiga por debajo de la presión de vapor del líquido. Cuando esto ocurre, el líquido puede evaporarse localmente, formando una cavidad de vapor y cambiando el patrón de flujo a partir de la condición de no cavitación. La cavidad del vapor cambia la forma efectiva del pasaje del flujo, alterando de ese modo el campo de presión local. Puesto que el tamaño y la forma de la cavidad del vapor son afectados por el campo de presión local, el flujo puede volverse inestable. La falta de estabilidad puede provocar que todo el flujo oscile y que la máquina vibre.

Cuando se inicia la cavitación, el efecto es reducir el funcionamiento de la bomba o turbina rápidamente. Por ello, la cavitación debe evitarse para mantener la operación estable y eficiente. Además, las presiones superficiales locales pueden volverse elevadas cuando se colapsa la cavidad de vapor, provocando daño por erosión o picaduras superficiales. El daño puede ser lo suficientemente severo para destruir una máquina hecha de un material frágil de baja resistencia. Evidentemente, la cavitación también debe evitarse para asegurar una larga vida de servicio de la máquina.

En una bomba, la cavitación tiende a empezar en la sección donde el flujo se acelera hacia el impulsor. La cavitación en una turbina comienza donde la presión es más baja. La tendencia a cavitar aumenta cuando las velocidades de flujo locales se incrementan; esto ocurre siempre que aumentan la relación de flujo o la velocidad de operación de la máquina.

La cavitación puede evitarse si la presión en cualquier punto de la máquina se mantiene sobre la presión del vapor del líquido de operación. A velocidad constante, esto requiere que una presión positiva —mayor que la presión de vapor del líquido— se mantenga en la entrada de la bomba (la *succión*). Debido a las pérdidas de presión en la tubería de entrada, la presión de succión puede estar abajo de la atmosférica. Por ello, es importante limitar cuidadosamente la caída de presión en el sistema de tuberías de entrada.

La *carga neta de succión positiva* (*NPSH*, por sus siglas en inglés) se define como la diferencia entre la presión de estancamiento absoluta en el flujo en la succión de la bomba y la presión de vapor del líquido, expresada como la carga del líquido circulante [17].[6] La *carga neta de succión positiva requerida* (*NPSHR*) por una bomba específica para suprimir la cavitación varía con el líquido bombeado y con la temperatura del líquido, así como con la condición de la bomba (esto es, cuando las características geométricas críticas de la bomba son afectadas por el desgaste). La *NPSHR* puede medirse en una instalación de pruebas de bombas controlando la presión de entrada. Los resultados se grafican sobre una curva de funcionamiento de bombas. En la figura 11.8 se mostraron curvas características de bombas típicas para tres impulsores probados en la misma voluta. Las curvas de la *NPSHR* determinadas experimentalmente para impulsores del diámetro más grande y más pequeño se grafican cerca de la parte inferior de la figura.

La *carga neta de succión positiva disponible (NPSHD)* en la entrada de la bomba debe ser mayor que la *NPSHR*, para eliminar la cavitación. Las caídas de presión en las tuberías de entrada y en la entrada de la bomba aumentan cuando se incrementa la relación de flujo volumétrico. Por ello, para cualquier sistema, la *NPSHD* disminuye cuando se eleva la relación de flujo. La *NPSHR* de la bomba aumenta cuando se incrementa la relación de flujo. Por tanto, cuando la relación de flujo del sistema se incrementa, las curvas para la *NPSHD* y *NPSHR* contra la relación de flujo al final se cruzan. Para cualquier sistema de entrada, hay una relación de flujo que no puede superarse si el flujo que circula por la bomba va a mantenerse libre de cavitación. La pérdida de presión de

[6] La *NPSH* puede expresarse en cualesquiera unidades de medida convenientes, tales como la altura del líquido que fluye, es decir, pies de agua (de ahí el término *carga de succión*), psia o kPa (abs). Cuando se expresa como *carga*, la *NPSH* se mide relativa a la línea central del impulsor de la bomba.

entrada puede reducirse aumentando el diámetro de la tubería de entrada; por esta razón, muchas bombas centrífugas tienen bridas o acoplamientos más grandes en la entrada que en la salida.

11-5 APLICACIONES EN SISTEMAS DE FLUJOS

Definimos un *sistema de flujo* como la combinación de una máquina hidráulica y una red de tuberías o canales que conducen el fluido. La aplicación ingenieril de las máquinas hidráulicas en un sistema real requiere acoplar las características de la máquina y el sistema, en tanto se satisfacen las restricciones de eficiencia de energía, economía de capital y durabilidad. Hemos aludido a la vasta clasificación de dispositivos ofrecidos por los proveedores que compiten en el mercado; esta variedad constata la importancia comercial de la maquinaria para fluidos en los sistemas modernos de la ingeniería.

Casi siempre es más económico especificar una máquina de producción que una unidad de consumo, debido a que los productos de vendedores establecidos tienen características de funcionamiento publicadas y conocidas, y deben ser durables para sobrevivir en el mercado. La ingeniería de aplicación consiste en hacer la mejor selección de los catálogos de los productos disponibles. Además de las curvas de características de las máquinas, todos los fabricantes brindan una gran cantidad de datos dimensionales, configuraciones alternativas y esquemas de montaje, así como boletines de información técnica para proporcionar de manera inteligente las aplicaciones de sus productos.

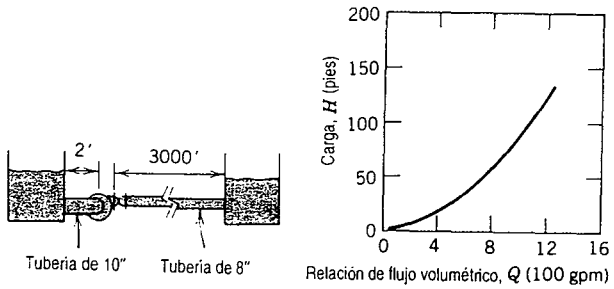
Esta sección incluye un breve repaso de la teoría relevante, seguida por aplicaciones de ejemplo empleando datos tomados de información escrita de fabricantes. Dos subsecciones tratan sobre máquinas que absorben trabajo (bombas, ventiladores, sopladores, compresores y propelas) y máquinas que generan trabajo (turbinas y molinos de viento). Las curvas de funcionamiento seleccionadas para bombas centrífugas y ventiladores se presentan en el apéndice D. Éstas pueden estudiarse como ejemplos típicos de datos de funcionamiento proporcionados por los fabricantes. Las curvas también pueden utilizarse para ayudar a resolver la selección de equipo y los problemas de diseño de sistemas al final del capítulo.

11-5.1 Máquinas que absorben trabajo

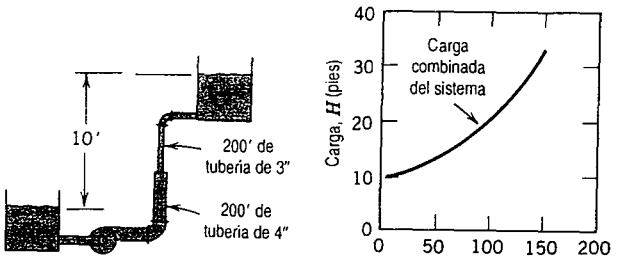
La curva de presión-flujo del sistema representa la relación entre la presión aplicada al sistema y la relación de flujo. El sistema operará a la combinación de carga y relación de flujo a la cual el funcionamiento de la máquina corresponde exactamente a los requerimientos del sistema. Gráficamente, la curva de presión-flujo del sistema y la curva de presión-flujo de la máquina pueden superponerse.[7] Entonces, la intersección de la curva presión-flujo del sistema con la curva de presión-capacidad de la máquina define el punto de operación de la máquina y el sistema.

El requerimiento de presión del sistema a una relación de flujo dada se compone de una caída de presión por fricción (las pérdidas mayores debidas a la fricción en las secciones rectas de área constante y pérdidas menores debidas a entradas, sellos, válvulas y salidas) y de los cambios de presión debidos a la gravedad (la elevación estática puede ser positiva o negativa). Es útil analizar los dos casos límite de la fricción y la elevación puras antes de considerar su combinación.

[7] Con fines ilustrativos empleamos la noción de la superposición gráfica de curvas. El acoplamiento del sistema también puede hacerse analítica o numéricamente, empleando ajustes de curvas para la curva de presión flujo del sistema y para la curva característica de la máquina.



a) Caída de presión puramente friccionante



b) Combinación de los cambios de presión por fricción y de gravedad

Fig. 11.19 Diagramas esquemáticos que ilustran los tipos básicos de curvas carga-flujo del sistema (adaptados de [7]).

La curva de presión-flujo del sistema con *fricción*, sin elevación estática, comienza a flujo y carga cero, como se muestra en la figura 11.19*a*. La caída de presión por fricción en flujo turbulento (el régimen de flujo usual en sistemas de ingeniería) varía como la relación de flujo elevada a una potencia entre 1.75 y 2, por lo que esta curva del sistema es casi parabólica. La curva del sistema con fricción pura se vuelve más inclinada conforme aumenta la relación de flujo. Para desarrollar la curva de fricción, las pérdidas se calculan a diversas relaciones de flujo y después se grafican.

El cambio de presión debido a la diferencia de elevación es independiente de la relación de flujo. Por consiguiente, la curva de presión flujo del sistema de *elevación pura* es una línea recta horizontal. La presión de la gravedad se evalúa a partir del cambio en la elevación del sistema.

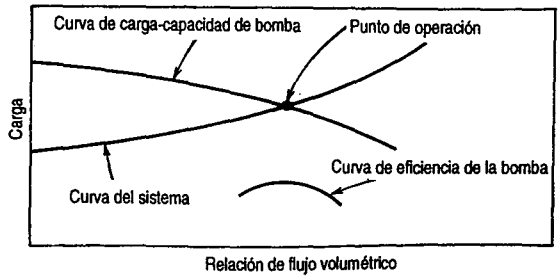


Fig. 11.20 Curvas superpuestas de carga-flujo del sistema y de carga-capacidad de bomba.

Todos los sistemas de flujo reales tienen cierta caída de presión por fricción y cierto cambio en la elevación. Por ello, todas las curvas de presión-flujo del sistema pueden tratarse como la suma de una componente por fricción y de una componente de elevación estática. La caída de presión para el sistema completo a cualquier relación de flujo es la suma de las presiones por fricción y de elevación. La curva de presión flujo del sistema se grafica en la figura 11.19b.

El que la curva resultante del sistema sea *inclinada* o *plana* depende de la importancia relativa de la fricción y la gravedad. La caída de fricción puede ser relativamente poco importante en el suministro de agua para un edificio de gran altura (por ejemplo, la Torre Sears en Chicago, la cual alcanza casi 400 m de altura) y la elevación de la gravedad puede ser despreciable en un sistema de acondicionamiento de aire para un edificio de un piso.

a. Bombas

El punto de operación de una bomba se define superponiendo la curva del sistema y la curva de funcionamiento de la bomba, como se muestra en la figura 11.20. El punto de intersección es la única condición en la que la bomba y las relaciones de flujo del sistema son iguales, y las presiones de la bomba y el sistema son simultáneamente iguales. El procedimiento utilizado para determinar el punto de igualación para el sistema de bombeo se ilustra en el problema ejemplo 11.8.

EJEMPLO 11.8 Determinación del punto de operación para un sistema de bombeo

La bomba del problema ejemplo 11.7, operando a 1750 rpm, se emplea para bombear agua a través del sistema de tubería de la figura 11.19a. Desarrolle una expresión algebraica para la forma general de la curva de resistencia del sistema. Calcule y grafique la curva de resistencia del sistema. Resuelva gráficamente para el punto de operación del sistema. Obtenga una expresión analítica aproximada para la curva de resistencia del sistema. Resuelva analíticamente para el punto de operación del sistema.

PROBLEMA EJEMPLO 11.8

DATOS: La bomba del problema ejemplo 11.7, operando a 1750 rpm, con $H = H_0 - AQ^2$, donde $H_0 = 55.9$ pies y $A = 3.44 \times 10^{-5}$ pies/(gpm)^2. El sistema de la figura 11.19a, donde $L_1 = 2$ pies de tubería de $D_1 = 10$ pulg y $L_2 = 3000$ pies de tubería de $D_2 = 8$ pulg, que conduce agua entre dos grandes depósitos cuyas superficies se encuentran al mismo nivel.

ENCUENTRE: *a*) Desarrolle una expresión algebraica general para la curva de resistencia del sistema.

b) Calcule y grafique la curva de resistencia del sistema.

c) Resuelva gráficamente para el punto de operación del sistema.

d) Obtenga una expresión analítica aproximada para la curva de resistencia del sistema.

e) Résuelva analíticamente para el punto de operación del sistema.

SOLUCIÓN:

Aplique la ecuación de energía para flujo estable y completamente desarrollado en una tubería.

Se calculan las ecuaciones:

$$\frac{p_0}{\rho} + \alpha_0 \frac{\bar{V}_0^2}{2} + g z_0 - \left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1 \right) = h_{lT_{01}}$$

$$\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+g\cancel{z_2}-\left(\frac{p_3}{\rho}+\alpha_3\frac{\bar{V}_3^2}{2}+gz_3\right)=h_{lT_{23}}$$

donde los puntos ① y ② se localizan justo aguas arriba y aguas abajo de la bomba, respectivamente, y z_0 y z_3 son las elevaciones de la superficie de los depósitos de suministro y alimentación, respectivamente.

Suposiciones: 1) $p_0 = p_3 = p_{atm}$
2) $V_0 = V_3 = 0$
3) Flujo uniforme en cada sección

Sumando, obtenemos

$$\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_0-\frac{p_1}{\rho}-\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}-gz_3=h_{lT_{01}}+h_{lT_{23}}$$

El aumento de presión a través de la bomba es entonces

$$\frac{\Delta p}{\rho}=\frac{p_2-p_1}{\rho}=\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}-\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+g(z_3-z_0)+h_{lT_{01}}+h_{lT_{23}}$$

Convierta a elevación de carga dividiendo entre g

$$H=\frac{\Delta p}{\rho g}=\frac{\alpha_1\bar{V}_1^2-\alpha_2\bar{V}_2^2}{2g}+z_3-z_0+\frac{h_{lT_{01}}}{g}+\frac{h_{lT_{23}}}{g}$$

Las pérdidas de carga total son la suma de las pérdidas mayores y menores, de modo que

$$h_{lT_{01}}=K_{ent}\frac{\bar{V}_1^2}{2}+f_1\frac{L_1}{D_1}\frac{\bar{V}_1^2}{2}=\left(K_{ent}+f_1\frac{L_1}{D_1}\right)\frac{\bar{V}_1^2}{2}$$

$$h_{lT_{23}}=f_2\frac{L_2}{D_2}\frac{\bar{V}_2^2}{2}+K_{salida}\frac{\bar{V}_2^2}{2}=\left(f_2\frac{L_2}{D_2}+K_{salida}\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

De la continuidad, $\bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2$, por lo que $\bar{V}_1=\bar{V}_2\frac{A_2}{A_1}=\bar{V}_2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$.

Al sustituir,

$$H=\frac{\alpha_1\bar{V}_2^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4-\alpha_2\bar{V}_2^2}{2g}+\left(K_{ent}+f_1\frac{L_1}{D_1}\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2g}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4+\left(f_2\frac{L_2}{D_2}+K_{salida}\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2g}+z_3-z_0$$

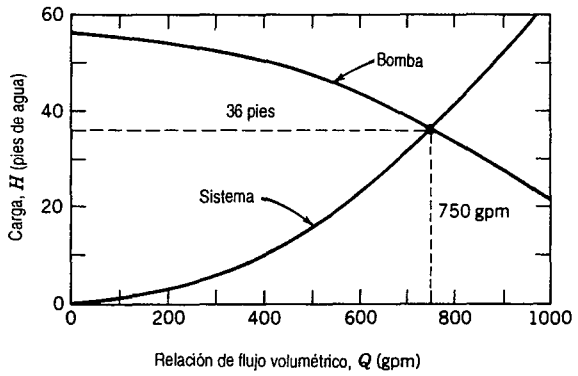
o, al simplificar,

$$H=\left[\alpha_1\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4-\alpha_2+\left(K_{ent}+f_1\frac{L_1}{D_1}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4+f_2\frac{L_2}{D_2}+K_{salida}\right]\frac{\bar{V}_2^2}{2g}+z_3-z_0 \longleftarrow H$$

Esta es la relación general para la curva de resistencia del sistema. Con el cálculo y la tabulación a varias relaciones de flujo volumétrico (con $z_3 = z_0$):

Q (gpm)	$\bar{V}_1$ (pies/s)	Re_1 (1000)	f_1 (−)	$\bar{V}_2$ (pies/s)	Re_2 (1000)	f_2 (−)	H (pie)
0	0.00	0	0.000	0.00	0	0.000	0
100	0.41	32	0.026	0.64	40	0.026	1
200	0.82	63	0.023	1.28	79	0.024	3
300	1.23	95	0.022	1.91	119	0.023	6
400	1.63	127	0.022	2.55	158	0.022	10
500	2.04	158	0.021	3.19	198	0.022	16
600	2.45	190	0.021	3.83	238	0.022	23
700	2.86	222	0.021	4.47	277	0.022	31
800	3.27	253	0.021	5.11	317	0.022	40
900	3.68	285	0.021	5.74	356	0.022	51
1000	4.09	317	0.021	6.38	396	0.022	62
1100	4.49	348	0.021	7.02	435	0.021	75
1200	4.90	380	0.021	7.66	475	0.021	89
1300	5.31	412	0.020	8.30	515	0.021	105
1400	5.72	443	0.020	8.94	554	0.021	121
1500	6.13	475	0.020	9.57	594	0.021	139

La curva de la bomba y la curva de resistencia del sistema se grafican a continuación:



La solución gráfica se muestra sobre el diagrama. En el punto de operación, $H \approx 36$ pies y $Q \approx 750$ gpm (los resultados gráficos son precisos cuando mucho hasta dos cifras significativas).

La expresión analítica aproximada para la curva de resistencia del sistema se desarrolla como sigue. Si el flujo está a un número de Reynolds alto, se encontrará en un régimen de flujo completamente rugoso. En ese caso, los factores de fricción serán constantes y

$$H = Z_0 + CQ^2$$

donde $Z_0 = z_3 - z_0$ y $C = 2/\pi D_2^2 g$ veces el término en paréntesis cuadrados en la ecuación general para H, indicada anteriormente. Para este flujo, $Z_0 = 0$ y $C = 6.17 \times 10^{-5}$ pies/(gpm)^2. De tal modo, la expresión analítica para la curva del sistema es

$$H = 6.17 \times 10^{-5} \text{ pies/(gpm)}^2[Q \text{ (gpm)}]^2 \qquad H$$

La ecuación de la curva de la bomba y la ecuación de la curva de resistencia del sistema se resuelven simultáneamente para determinar el punto de operación del mismo. De tal modo,

$$H_p = H_0 - A\,Q^2 = Z_0 + C\,Q^2$$

Resolviendo para Q, la tasa de flujo volumétrico en el punto de operación,

$$Q = \left[\frac{H_0 - Z_0}{A + C}\right]^{1/2}$$

En este caso, $Z_0 = 0$ y

$$Q = \left[55.9 \text{ pies} \times \frac{(\text{gpm})^2}{(3.44 \times 10^{-5} + 6.17 \times 10^{-5}) \text{ pies}}\right]^{1/2} = 763 \text{ gpm} \longleftarrow Q$$

La relación de flujo volumétrico puede sustituirse en cualquiera de las expresiones para la carga, y así calcularla en el punto de operación como

$$H = CQ^2 = 6.17 \times 10^{-5} \frac{\text{pie}}{(\text{gpm})^2} (763)^2 (\text{gpm})^2 = 35.9 \text{ pies} \longleftarrow H$$

La comparación de los resultados indica que la solución gráfica fue de una precisión aceptable. La solución gráfica fue casi 0.3 por ciento mayor en la carga y aproximadamente 1.7 por ciento más alta en la relación de flujo. Cuando recordamos que el cálculo de la resistencia del sistema depende de una precisión de los coeficientes de flujo en tubería dentro de aproximadamente ±10 por ciento, éste es aceptable.

El propósito de este problema fue ilustrar los procedimientos utilizados para encontrar el punto de operación de una bomba y el sistema de flujo utilizando métodos de solución tanto gráficos como analíticos. El ejemplo muestra que cualquier método puede emplearse para obtener resultados de precisión de ingeniería.

Las formas tanto de la curva de la bomba como de la curva del sistema pueden ser importantes para la estabilidad de este último en ciertas aplicaciones. La curva de la bomba que se muestra en la figura 11.20 es la típica de una que corresponde a una nueva bomba centrífuga de velocidad específica intermedia, para la cual la carga (o presión) disminuye suave y monótonamente conforme la relación de flujo aumenta a partir de la condición de válvula cerrada. Dos efectos ocurren en forma gradual a medida que el sistema envejece: la bomba se desgasta y su desempeño disminuye (la curva de la bomba se mueve gradualmente hacia abajo a una presión más baja a cada relación de flujo) y la resistencia del sistema aumenta (la curva del sistema se mueve de manera gradual hacia una presión más elevada a cada relación de flujo debido al envejecimiento de la tubería[8]). El efecto de estos cambios es mover el punto de operación hacia relaciones de flujo menores en el transcurso del tiempo. La magnitud del cambio en la relación del flujo depende de las formas de las curvas de la bomba y el sistema.

Las pérdidas de capacidad, cuando ocurre el desgaste de la bomba, se comparan para las curvas pronunciada y plana del sistema en la figura 11.21. La pérdida en capacidad es mayor para la curva plana del sistema que para la pronunciada.

En la figura 11.20 también se grafica la curva de eficiencia de la bomba. El punto de operación original del sistema suele elegirse de manera que coincida con la eficiencia máxima mediante una selección cuidadosa del tamaño y velocidad de la bomba. El desgaste de la bomba incrementa las

[8] Cuando la tubería envejece, se forman depósitos minerales sobre la pared (véase la figura 8.16), aumentando la rugosidad relativa y reduciendo el diámetro de la tubería comparado con el de la nueva condición. Véase el problema 11.45 para datos típicos del factor de fricción.

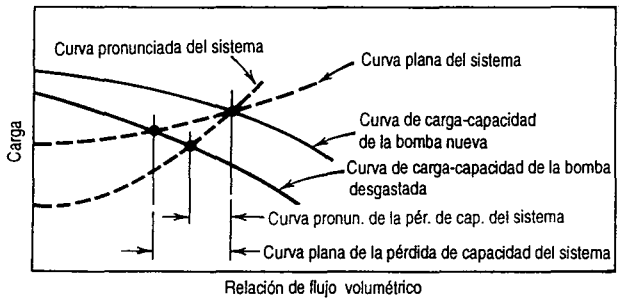


Fig. 11.21 Efecto del desgaste de una bomba sobre la entrega de flujo al sistema.

fugas internas, reduciendo de ese modo la entrega y la eficiencia pico. Además, como se muestra en la figura 11.21, el punto de operación se mueve hacia la relación de flujo más baja, alejándose del punto de mejor eficiencia. De esa manera, el desempeño reducido del sistema no puede acompañarse de un consumo de energía reducido.

Algunas veces es necesario satisfacer el requerimiento de flujo bajo y carga elevada; esto obliga a la selección de una bomba con velocidad específica baja. Tal dispositivo puede tener una curva de funcionamiento con una carga plana o que aumenta ligeramente cerca de la condición de válvula cerrada, como se muestra en la figura 11.22. Cuando se emplea con una curva de sistema pronunciada, el punto de operación está bien definido y no deben producirse problemas con la operación del sistema. Sin embargo, el empleo de una bomba con una curva de sistema plana podría fácilmente provocar problemas, especialmente si la curva del sistema real estuviera ligeramente arriba de la curva calculada, o bien, la entrega de la bomba por debajo del desempeño de carga-capacidad planeado.

Si hay dos puntos de intersección entre las curvas de la bomba y del sistema, éste puede operar en cualquiera, dependiendo de las condiciones en el arranque; una perturbación podría provocar que el punto de operación del sistema se corriera al segundo punto de intersección. Bajo ciertas condiciones, el punto de operación del sistema puede alternarse entre dos puntos de intersección ocasionando flujo inestable y un funcionamiento insatisfactorio.

En lugar de una sola bomba de baja velocidad específica, es posible emplear en esta situación una bomba de etapas múltiples. Como la relación de flujo a través de cada etapa es la misma, pero

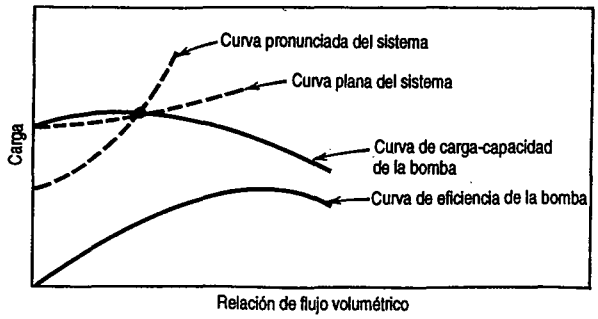


Fig. 11.22 Operación de una bomba de baja velocidad específica cerca de la condición de válvula cerrada.

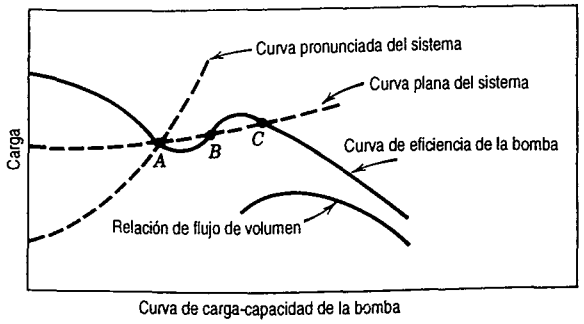


Fig. 11.23 Operación de una bomba de alta velocidad específica cerca de la inflexión.

la carga por etapa es menor que en la unidad de una sola etapa, la velocidad específica de la bomba de pasos múltiples es más alta (véase la ecuación 11.17).

La curva característica de carga-flujo de algunas bombas de alta velocidad específica muestra un punto de inflexión a capacidades por debajo del punto de eficiencia pico, como se muestra en la figura 11.23. Es necesario tener cuidado al aplicar tales bombas si se debe operar la bomba en o cerca del punto de inflexión en la curva de carga-flujo. No deben ocurrir problemas si la característica del sistema es pronunciada, porque ahí habrá sólo un punto de intersección con la curva de la bomba. A menos que esta intersección esté cerca del punto *B*, el sistema debe regresar a la operación estacionaria de estado estable que sigue a cualquier perturbación transitoria.

La operación con una curva de sistema plana puede ser más problemática. Es posible tener uno, dos o tres puntos de intersección entre la bomba y las curvas del sistema, como se sugiere en la figura. Con la curva plana del sistema, la bomba tal vez quede "acorralada" u oscile (periódica o aperiódicamente) entre los dos pares de puntos adyacentes o entre los tres puntos.

Varios factores más pueden afectar de manera adversa el desempeño de la bomba: el bombeo de líquido caliente, el de líquido con vapor retenido y bombear líquido con alta viscosidad. De acuerdo con [5], la presencia de pequeñas cantidades de gas retenido puede reducir de manera drástica el funcionamiento. Un valor tan pequeño como el 4 por ciento de vapor puede reducir la capacidad de la bomba en más del 40 por ciento. El aire puede entrar en el lado de la succión del circuito de bombeo, donde la presión es menor que la atmosférica si se presenta cualquier fuga.

La adecuada sumersión de la tubería de succión es necesaria para prevenir la retención de aire. Una sumersión insuficiente puede ocasionar que se forme un vórtice en la entrada de la tubería. Si el vórtice es intenso, el aire puede entrar a la tubería de succión. Las referencias [15] y [16] brindan guías para el adecuado diseño del tazón de succión a fin de eliminar la probabilidad de que se formen vórtices.

El aumento de la viscosidad del fluido puede reducir de manera notable el funcionamiento de una bomba centrífuga [17]. En la figura 11.24 se grafican resultados típicos de pruebas experimentales. Ahí se comparan el funcionamiento de la bomba con agua ($\nu = 1$ cP) y el desempeño con un líquido más viscoso ($\nu = 220$ cP). La mayor viscosidad reduce la carga producida por la bomba. Al mismo tiempo, se incrementa el requerimiento de potencia de entrada. El resultado es una caída considerable en la eficiencia de la bomba a todas las relaciones de flujo.

El calentamiento de un líquido aumenta su presión de vapor. De tal modo, para bombear un líquido caliente se requiere presión adicional en la entrada de la bomba para evitar la cavitación. La *NPSHD* debe aumentarse, o la entrega de la bomba reducirse, para mantener el mismo número de cavitación que cuando la curva *NPSHR* se midió en el laboratorio.

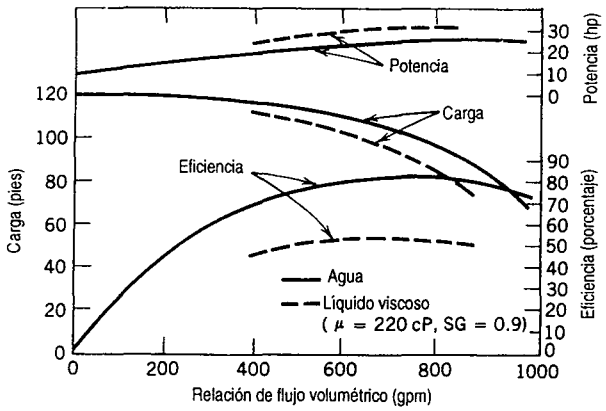


Fig. 11.24 Efecto de la viscosidad del líquido en el funcionamiento de una bomba centrífuga [5].

En algunos sistemas, tales como el suministro de agua de una ciudad o la circulación de agua refrigerada, puede haber un amplio intervalo en la demanda con una resistencia del sistema relativamente constante. En estos casos, es posible operar bombas a velocidad constante en serie o en paralelo para satisfacer los requerimientos del sistema sin una disipación excesiva de energía, debida al estrangulamiento a la salida. Dos o más bombas pueden operarse en paralelo o en serie para suministrar el flujo en condiciones de alta demanda, y un menor número de unidades puede utilizarse cuando la demanda sea baja.

Para las bombas en *serie*, la curva de funcionamiento combinada se obtiene sumando los aumentos de presión en cada relación de flujo (figura 11.25). El incremento en la relación de flujo, ganado mediante la operación de bombas en serie, depende de la resistencia del sistema que se está alimentando. En el caso de dos bombas en serie, la entrega aumentará a cualquier presión del sistema. Las curvas características para una bomba y para dos bombas idénticas en serie son, respectivamente,

$$H_1 = H_0 - A\,Q^2$$

y

$$H_{2s} = 2(H_0 - A\,Q^2) = 2H_0 - 2A\,Q^2$$

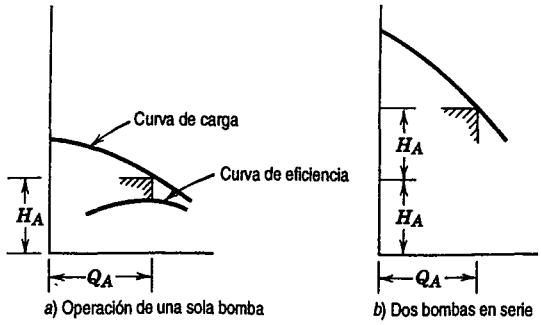


Fig. 11.25 Operación de dos bombas centrífugas en serie.

La figura 11.25 es un diagrama esquemático que ilustra la aplicación de dos bombas idénticas en serie. Es posible una satisfacción razonable del requerimiento del sistema —mientras se mantenga una alta eficiencia— si la curva del sistema es relativamente inclinada.

En un sistema real no es apropiado conectar simplemente dos bombas en serie. Si sólo se activara una bomba, el flujo a través de la segunda bomba desactivada podría provocar pérdidas adicionales elevando la resistencia del sistema. También es deseable arreglar las bombas y la tubería de manera que cada bomba pueda sacarse del circuito de bombeo para mantenimiento, reparación o sustitución cuando sea necesario. De tal manera, un sistema de derivaciones, válvulas y válvulas de retención es necesario en una instalación real [14, 16].

Las bombas también pueden combinarse en *paralelo*. La curva de desempeño resultante, mostrada en la figura 11.26, se obtiene sumando las capacidades de la bomba a cada carga. Las curvas características para una bomba y para dos bombas idénticas en paralelo son, respectivamente,

$$H_1 = H_0 - A\,Q^2$$

y

$$H_{2p} = H_0 - A\left(\frac{Q}{2}\right)^2 = H_0 - \frac{1}{4}A\,Q^2$$

El diagrama esquemático de la figura 11.26 muestra que la combinación en paralelo puede utilizarse de manera más efectiva para incrementar la capacidad del sistema cuando la curva del mismo es relativamente plana.

Una instalación de sistema real con bombas en paralelo también requiere más reflexión para posibilitar la operación satisfactoria con sólo una bomba activada. Es necesario evitar el contraflujo a través de la bomba que no está activada. Para ello, y para permitir la remoción de la bomba, una instalación de tubería más compleja y costosa es necesaria.

Muchos otros arreglos de tubería y combinaciones de bombas son posibles. Bombas de diferentes tamaños, cargas y capacidades pueden combinarse en arreglos en serie, en paralelo o serie paralelo. Evidentemente, la complejidad de la tubería y del sistema de control aumenta con rapidez. Sin importar cual sea el arreglo o el número de bombas, un sistema con bombas discretas operado a velocidad constante no es capaz de variar de manera continua la relación de flujo sin el empleo de válvulas de estrangulamiento. El control sin válvulas es posible sólo en etapas separadas de acuerdo con la combinación específica de bombas activadas en cualquier momento.

El uso de la operación a velocidad variable permite el control variable infinito de la relación de flujo del sistema con alta eficiencia de energía, y sin una complejidad adicional de la plomería.

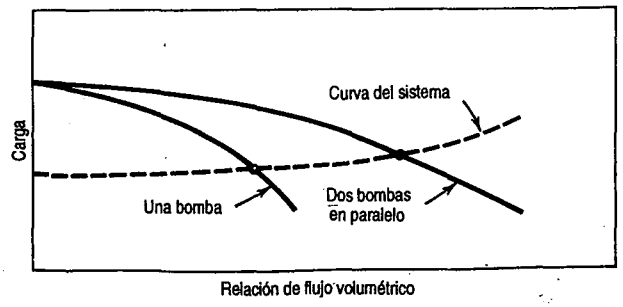


Fig. 11.26 Operación de dos bombas centrífugas en paralelo.

Tabla 11.1 Requerimientos de potencia para bombas con motor de velocidad variable y constante [18]

Válvula de control de estrangulamiento con motor de velocidad constante (1750 rpm)								
Relación de flujo (gpm)	Carga del sistema (pies)	Eficiencia de la válvula[a] (%)	Carga de la bomba (pies)	Eficiencia de la bomba (%)	Potencia de la bomba (bhp)	Eficiencia del motor (%)	Entrada del motor (hp)	Entrada de potencia[b] (hp)
1700	180	100.0	180	80.0	96.7	90.8	106.5	106.7
1500	150	78.1	192	78.4	92.9	90.7	102.4	102.6
1360	131	66.2	198	76.8	88.6	90.7	97.7	97.9
1100	102	49.5	206	72.4	79.1	90.6	87.3	87.5
900	83	39.5	210	67.0	71.3	90.3	79.0	79.1
600	62	29.0	214	54.0	60.1	90.0	66.8	66.9

Motor eficiente de velocidad variable								
Relación de flujo (gpm)	Carga de la bomba/sistema (pies)	Eficiencia de la bomba (%)	Potencia de la bomba (bhp)	Velocidad del motor (rpm)	Eficiencia del motor (%)	Entrada del motor (hp)	Eficiencia del control (%)	Entrada de potencia[b] (hp)
1700	180	80.0	96.7	1750	93.7	103.2	97.0	106.4
1500	150	79.6	71.5	1580	94.0	76.0	96.1	79.1
1360	131	78.8	57.2	1470	93.9	60.9	95.0	64.1
1100	102	78.4	36.2	1275	93.8	38.6	94.8	40.7
900	83	77.1	24.5	1140	92.3	26.5	92.8	28.6
600	62	72.0	13.1	960	90.0	14.5	89.1	16.3

[a] La eficiencia de la válvula es la relación entre la presión del sistema y la presión de la bomba.
[b] La entrada de potencia es la entrada del motor dividida entre 0.998 de la eficiencia de arranque.

Otra ventaja es que el sistema accionado a velocidad variable ofrece un control mucho más simple de la relación de flujo del sistema. El costo de sistemas de accionamiento de velocidad variable continúa disminuyendo debido a los avances en los componentes y circuitos de la electrónica de potencia. La relación de flujo del sistema puede controlarse variando la velocidad de operación de la bomba, produciendo ahorros enormes en la potencia de bombeo y el consumo de energía. La reducción de la potencia de entrada que ofrece el control de velocidad variable se ilustra en la tabla 11.1 [18]. A 1100 gpm, la entrada de potencia se reduce casi 54 por ciento para el sistema de velocidad variable; la reducción a 600 gpm es más del 75 por ciento.

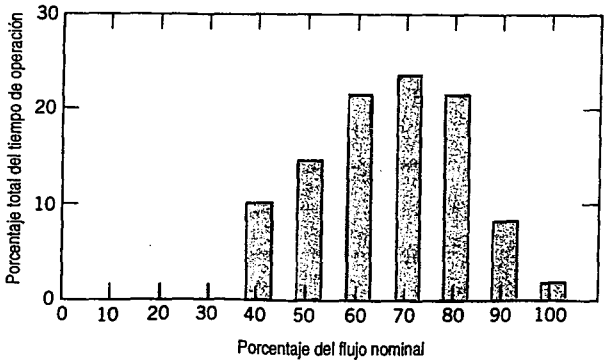


Fig. 11.27 Ciclo de trabajo medio para bombas centrífugas en las industrias química y del petróleo [18].

ad variable

750 rpm)	
Entrada del motor (hp)	Entrada de potencia[b] (hp)
106.5	106.7
102.4	102.6
97.7	97.9
87.3	87.5
79.0	79.1
66.8	66.9

Eficiencia del control (%)	Entrada de potencia[b] (hp)
97.0	106.4
96.1	79.1
95.0	64.1
94.8	40.7
92.8	28.6
89.1	16.3

rol mucho más sim-
e velocidad variable
de la electrónica de
dad de operación de
umo de energía. La
se ilustra en la tabla
) para el sistema de

La reducción en el requerimiento de potencia de entrada a un flujo reducido con el accionamiento a velocidad variable es impresionante. Los ahorros de energía, y consecuentemente los ahorros en costo, dependen del ciclo de trabajo específico sobre el cual opere la máquina. La referencia [18] presenta información acerca de los ciclos de trabajo medios para bombas centrífugas utilizadas en la industria química; la figura 11.27 es una gráfica que muestra el histograma de estos datos. La gráfica indica que a pesar de que el sistema deba diseñarse e instalarse para entregar la capacidad nominal máxima, esto rara vez ocurre. En vez de ello, más de la mitad del tiempo el sistema opera a 70 por ciento de capacidad o menos. El ahorro de energía que resulta del uso de un accionamiento a velocidad variable para este ciclo de trabajo se calcula en el problema ejemplo 11.9.

EJEMPLO 11.9 Ahorros de energía con una bomba centrífuga con control de velocidad variable

Combine la información relativa al ciclo de trabajo medio para bombas centrífugas dada en la figura 11.27 con los datos de control de la tabla 11.1. Estime el ahorro anual en energía de bombeo y el costo que podría alcanzarse implantando un sistema de control de velocidad variable.

PROBLEMA EJEMPLO 11.9

DATOS: Considere el sistema de bombeo de flujo y presión variables de la tabla 11.1. Suponga que el sistema opera en el ciclo de trabajo típico que se muestra en la figura 11.27, 24 horas al día, durante un año completo.

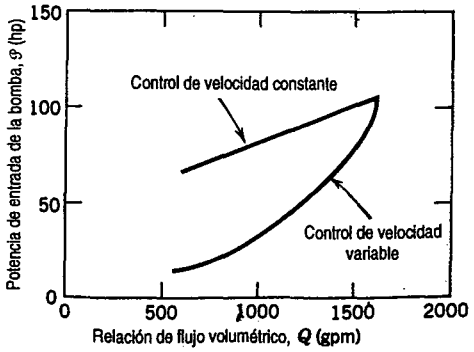
ENCUENTRE: *a*) Estime la reducción en el consumo anual de energía obtenido con este control de velocidad variable.

b) Calcule los costos de energía y evalúe el ahorro en los costos debido a la operación de velocidad variable.

SOLUCIÓN:

La operación a tiempo completo implica 365 días × 24 horas por día, u 8760 horas por año. De tal modo, los porcentajes en la figura 11.27 pueden multiplicarse por 8760 para producir las horas de operación anuales.

Grafique primero la potencia de entrada de la bomba contra la relación de flujo utilizando los datos de la tabla 11.1 para posibilitar la interpolación, como se muestra enseguida.



Ilustre el procedimiento utilizando una operación a un flujo de 70 por ciento como un cálculo de muestra. A un flujo de 70%, la entrega de la bomba es 0.7 × 1700 gpm = 1190 gpm. De acuerdo con la gráfica, el requerimiento de potencia de entrada de la bomba a esta relación de flujo es de 91 hp para el control de velocidad constante. A esta relación de flujo, la bomba opera 23 por ciento del tiempo, o 0.23 × 8760 = 2010 horas por año. La energía total consumida en este punto de trabajo es 91 hp × 2010 hr = 1.91×10^5 hp · hr. La energía eléctrica consumida es

$$E = 1.91 \times 10^5 \text{ hp} \cdot \text{hr} \times \frac{0.746 \text{ kW} \cdot \text{hr}}{\text{hp} \cdot \text{hr}} = 1.42 \times 10^5 \text{ kW} \cdot \text{hr}$$

El costo de electricidad correspondiente (a 0.08 dólares/kW · hr) es

$$C = 1.42 \times 10^5 \text{ kW} \cdot \text{hr} \times \frac{\$0.08}{\text{kW} \cdot \text{hr}} = \$11\ 400$$

Las siguientes tablas se elaboraron utilizando cálculos similares:

Control de velocidad constante, 8760 hr/año

Flujo (%)	Flujo (gpm)	Tiempo (%)	Tiempo (hr)	Potencia (hp)	Energía (hp · hr)
100	1700	2	175	106	1.86×10^4
90	1530	8	701	102	7.15×10^4
80	1360	21	1840	98	18.0×10^4
70	1190	23	2101	91	19.1×10^4
60	1020	21	1840	83	15.3×10^4
50	850	15	1310	77	10.1×10^4
40	680	10	876	70	6.13×10^4
				Total:	77.6×10^4

La suma de la última columna de la tabla muestra que para el sistema de control de velocidad constante, el consumo anual de energía es 7.76×10^5 hp · hr. El consumo de energía eléctrica es

$$E = 7.76 \times 10^5 \text{ hp} \cdot \text{hr} \times \frac{0.746 \text{ kW} \cdot \text{hr}}{\text{hp} \cdot \text{hr}} = 579\ 000 \text{ kW} \cdot \text{hr} \longleftarrow E_{CSD}$$

A 0.08 dólares por kilowatt-hora, el costo de energía para el sistema de control de velocidad constante es

$$C = 579\ 000 \text{ kW} \cdot \text{hr} \times \frac{\$0.08}{\text{kW} \cdot \text{hr}} = \$46\ 300 \longleftarrow C_{CSD}$$

Control de velocidad constante, 8760 hr/año

Flujo (%)	Flujo (gpm)	Tiempo (%)	Tiempo (hr)	Potencia (hp)	Energía (hp · hr)
100	1700	2	175	106	1.86×10^4
90	1530	8	701	83	5.82×10^4
80	1360	21	1840	64	11.8×10^4
70	1190	23	2010	49	9.85×10^4
60	1020	21	1840	35	6.44×10^4
50	850	15	1310	25	3.28×10^4
40	680	10	876	19	1.66×10^4
				Total:	40.7×10^4

La suma de la última columna de la tabla muestra que para el sistema de control de velocidad variable, el consumo anual de energía es 4.07×10^5 hp · hr. El consumo de energía eléctrica es

$$E_{VSD} = 4.07 \times 10^5 \text{ hp} \cdot \text{hr} \times \frac{0.746 \text{ kW} \cdot \text{hr}}{\text{hp} \cdot \text{hr}} = 304\,000 \text{ kW} \cdot \text{hr} \longleftarrow E_{VSD}$$

A 0.08 dólares por kilowatt-hora, el costo de la energía para el sistema de control de velocidad variable es sólo

$$C_{VSD} = 304\,000 \text{ kW} \cdot \text{hr} \times \frac{\$0.08}{\text{kW} \cdot \text{hr}} = \$24\,300 \longleftarrow C_{VSD}$$

Por tanto, en esta aplicación, el control de velocidad variable reduce el consumo de energía en 275 000 kW · hr (47 por ciento). El ahorro en costo es la impresionante cifra de 22 000 dólares anuales. Se podría afrontar la instalación de un control de velocidad variable incluso con un costo considerable. Los ahorros en el costo de energía son apreciables cada año y continuan a lo largo de la vida de servicio del sistema.

El propósito de este problema fue ilustrar los ahorros en la energía y costo que pueden ganarse empleando controles de bomba de velocidad variable. Los beneficios específicos dependen del sistema y de su ciclo de operación.

b. Ventiladores, sopladores y compresores

Los ventiladores se diseñan para manejar aire o vapor. Los tamaños de los ventiladores varían desde el ventilador de enfriamiento en una pieza de equipo electrónico, que mueve un metro cúbico de aire por hora y requiere de unos cuantos watts de potencia, hasta el ventilador de una mina, que mueve cientos de metros cúbicos de aire por minuto y requiere muchos cientos de kilowatts de potencia. Los ventiladores se producen en variedades similares a las de las bombas; varían de dispositivos de flujo radial (centrífugos) a dispositivos de flujo axial. Como con las bombas, las formas de la curva característica para los ventiladores dependen del tipo de ventilador. Algunas curvas de desempeño típicas para ventiladores centrífugos se presentan en el apéndice D. Las

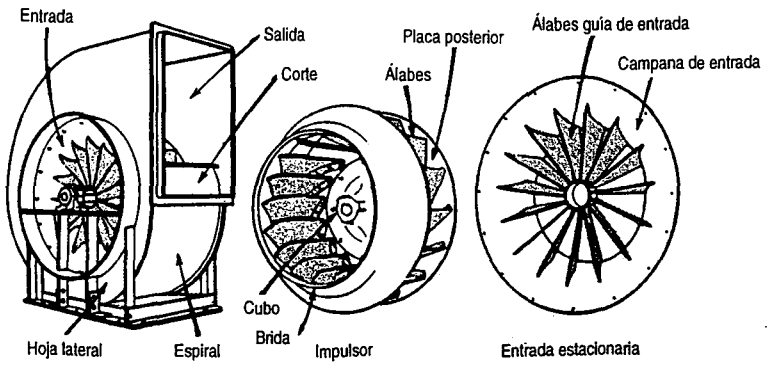


Fig. 11.28 Vista esquemática de un ventilador centrífugo típico [19].

curvas pueden utilizarse para elegir los ventiladores, y así resolver algunos de los problemas de selección de equipo y diseño de sistemas al final del capítulo.

Una vista esquemática de un ventilador centrífugo de capacidad media se muestra en la figura 11.28. La terminología de uso común también se muestra en la figura.

El aumento de presión producido por ventiladores es varios órdenes de magnitud menor que el correspondiente a bombas. Otra diferencia entre ventiladores y bombas es que la medición de la relación de flujo es más difícil en gases y en vapores que en líquidos. ¡No hay una analogía conveniente para el método de medición de relaciones de flujo líquido de "recolección de flujo en un cangilón"! En consecuencia, la prueba de ventiladores requiere instalaciones y procedimientos especiales [6, 20]. En virtud de que el aumento de presión producido por un ventilador es pequeño, suele ser impráctico medir la relación de flujo con un medidor de flujo de restricción tal como un orificio, una tobera de flujo o un venturi. Tal vez sea necesario utilizar un ventilador auxiliar para desarrollar el suficiente aumento de presión que permita medir la relación de flujo con precisión aceptable empleando un medidor de flujo de restricción. Una alternativa es emplear un ducto instrumentado en el cual la relación de flujo se calcula a partir de un pitot transversal. Pueden consultarse las normas apropiadas para obtener información completa acerca de los métodos específicos de prueba de ventiladores y de los procedimientos de reducción de datos para cada aplicación [6, 20].

Debido a que el cambio de presión a través de un ventilador es pequeño, la presión dinámica en la salida del ventilador debe ser una fracción considerable del aumento de presión. Por consiguiente, es necesario especificar con todo cuidado las bases sobre las cuales se efectúan las mediciones de presión. Los datos tanto para el aumento de presión estática y total como para la eficiencia, basados ambos en aumentos de presión, con frecuencia se trazan sobre la misma gráfica característica (figura 11.29).

Las coordenadas pueden graficarse en unidades físicas (esto es, pulgadas de agua, pies cúbicos por minuto y caballos de potencia) o como coeficientes adimensionales de flujo y presión. La diferencia entre las potencias total y estática es la presión dinámica, de modo que la distancia vertical entre estas dos curvas es proporcional a Q^2.

Los ventiladores centrífugos se utilizan con mucha frecuencia; los usaremos como ejemplos.

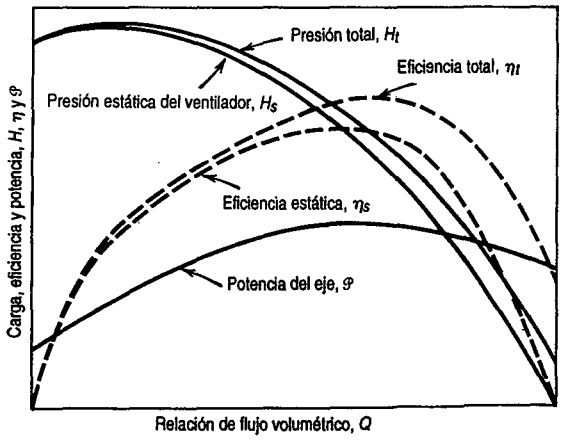


Fig. 11.29 Curvas características típicas para un ventilador con álabes curvados hacia atrás [21].

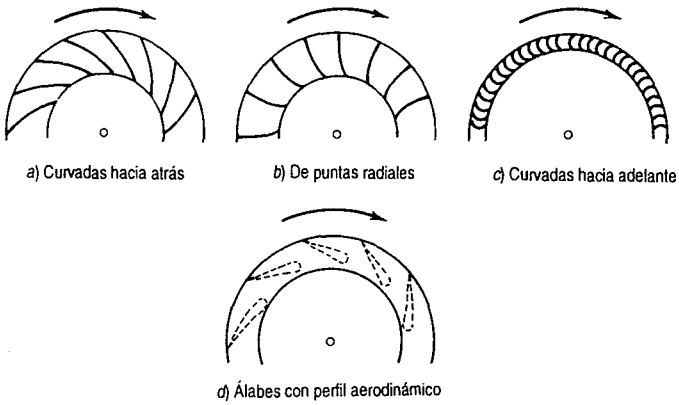


Fig. 11.30 Tipos de configuraciones de álabes comunes utilizados en ruedas de ventiladores centrífugos [21].

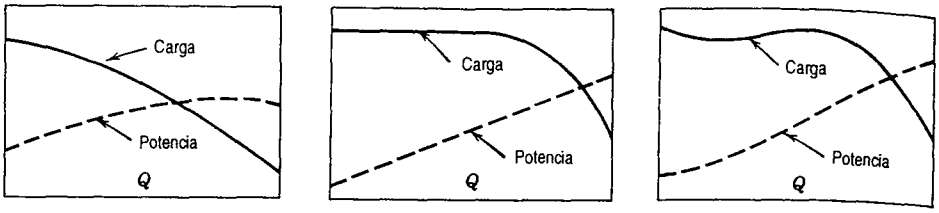
El ventilador centrífugo se desarrolló a partir de los diseños simples de la rueda de paletas, en los cuales la rueda era un disco que llevaba segmentos radiales de placa plana. (Esta forma primitiva sigue empleándose en ventiladores sin obstrucción como los secadores de ropa comerciales.) Los refinamientos han llevado a los tres tipos generales que se muestran en las figuras de la 11.30a a la c, con aspas curvas hacia atrás, radiales o curvadas hacia adelante. Los ventiladores ilustrados tienen aspas que se curvan en sus bordes de entrada para aproximarse al flujo sin impacto entre el aspa y la dirección de flujo de entrada. Estos tres diseños son típicos de ventiladores con aspas de hoja metálica, los cuales son relativamente simples de fabricar y por ello, relativamente económicos. El diseño de la curva hacia adelante, ilustrado en la figura, tiene aspas estrechamente espaciadas; a menudo recibe el nombre de ventilador de *jaula de ardilla* debido a su semejanza con las ruedas para ejercicio encontradas en las jaulas de animales.

Cuando los ventiladores se vuelven de mayor tamaño y requieren mayor demanda de potencia, la eficiencia se vuelve más importante. Las aspas de *perfil aerodinámico* que se muestran en la figura 11.30d son mucho menos sensibles a la dirección del flujo de entrada y mejoran la eficiencia de manera considerable en comparación con las delgadas aspas que se muestran en los diagramas del a al c. El gasto adicional de las aspas aerodinámicas para grandes ventiladores metálicos puede resultar en un efectivo costo —ciclo de vida. Las aspas aerodinámicas se emplean con frecuencia en pequeños ventiladores a medida que los impulsores de plástico se vuelven comunes.

Como en el caso de las bombas, el aumento de presión total a través del ventilador es aproximadamente proporcional a la velocidad absoluta del fluido a la salida de la rueda. Por ello, las curvas características producidas por las formas básicas del aspa tienden a diferir. Las formas de las curvas típicas se muestran en la figura 11.31, donde se dibujan tanto el aumento de presión como los requerimientos de potencia. Los ventiladores con puntas de aspa curvadas hacia atrás tienen por lo común una curva de potencia que alcanza un máximo y luego disminuye cuando aumenta la relación de flujo. Si el control del ventilador se dimensiona de manera apropiada para manejar la potencia pico, es imposible sobrecargar el sistema de mando con este tipo de ventilador.

Las curvas de potencia correspondientes a ventiladores con aspas radiales y curvadas hacia adelante ascienden cuando la relación de flujo se incrementa. Si el punto de operación del ventilador es más alto que la relación de flujo de diseño, el motor puede sobrecargarse. Tales ventiladores no pueden operar durante largos periodos a contrapresiones bajas.

Los ventiladores con aspas curvadas hacia atrás son mejores en instalaciones con gran



a) Álabes curvados hacia atrás *b)* Álabes con puntas radiales *c)* Álabes curvados hacia adelante

Fig. 11.31 Características generales de las curvas de funcionamiento para ventiladores centrífugos con álabes curvados hacia atrás, radiales y curvados hacia adelante [21].

demanda de potencia y operación continua. El ventilador de aspa curvada hacia adelante se prefiere donde son importantes el costo económico y el tamaño pequeño, y donde el servicio es intermitente. Las aspas curvadas hacia adelante requieren una velocidad de la punta más baja para producir una carga especificada. Una velocidad de punta del aspa menor significa una reducción de ruido. De tal modo, las aspas curvadas hacia adelante pueden especificarse para aplicaciones de calefacción y acondicionamiento de aire a fin de minimizar el ruido.

Las curvas características para ventiladores de flujo axial (*hélices*) difieren notablemente de las correspondientes a los ventiladores centrífugos. La curva de potencia, figura 11.32, es en especial diferente, ya que tiende a disminuir de manera continua conforme aumenta la relación de flujo. Por ello es imposible sobrecargar un control de mando dimensionado apropiadamente para un ventilador de flujo axial.

El ventilador de propulsor simple se utiliza a menudo para ventilación; puede ser sin soporte o montarse en una abertura, como un ventilador de ventana, sin ducto de trabajo de entrada o salida. Los ventiladores de flujo axial con ducto se han estudiado de manera amplia y han desarrollado una gran eficiencia [22]. Los diseños modernos, con aspas de perfil aerodinámico, montados en ductos y adaptados a menudo con álabes guía, pueden entregar grandes volúmenes en contra de altas resistencias con una elevada eficiencia. La primera deficiencia del ventilador de flujo axial es la forma no monótona de la característica de presión: en ciertos rangos de la relación de flujo es posible que varíe. Debido a que los ventiladores de flujo axial tienden a tener altas velocidades rotacionales, pueden ser ruidosos.

La selección y la instalación de un ventilador siempre requiere una concesión. Para minimizar el consumo de energía, es deseable operar un ventilador en su punto de más alta eficiencia. Para reducir el tamaño del ventilador respecto a una capacidad determinada, es tentador operarlo a una relación de flujo más alta que a eficiencia máxima. En una instalación real, este trueque debe

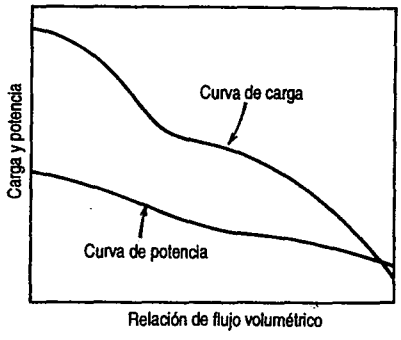
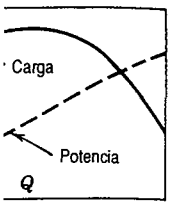


Fig. 11.32 Curvas características para un ventilador típico de flujo axial [21].



ados hacia adelante

ores centrífugos con

adelante se prefiere
icio es intermitente.
ja para producir una
ucción de ruido. De
iones de calefacción

ren notablemente de
figura 11.32, es en
menta la relación de
ipropiadamente para

puede ser sin soporte
o de entrada o salida.
a y han desarrollado
ámico, montados en
ímenes en contra de
tilador de flujo axial
e la relación de flujo
ner altas velocidades

sión. Para minimizar
alta eficiencia. Para
itador operarlo a una
il, este trueque debe

ara un ventilador

hacerse considerando factores como el espacio disponible, el costo inicial y las horas anuales de operación. No es prudente operar un ventilador a una relación de flujo por abajo de la eficiencia máxima. Tal ventilador sería más grande de lo necesario y algunos diseños pueden ser inestables y ruidosos cuando se operan en esta región.

Es necesario considerar el sistema de ducto tanto en la entrada como en la salida del ventilador para hacer una instalación satisfactoria. Cualquier cosa que perturbe el flujo uniforme en la entrada del ventilador es probable que perjudique el funcionamiento. Un flujo no uniforme en la entrada causa que la rueda opere asimétricamente y puede disminuir la capacidad considerablemente. El flujo turbulento también afecta de manera adversa el desempeño del ventilador. Una turbulencia en la dirección de rotación reduce la presión desarrollada; si la turbulencia es en dirección opuesta, tal vez aumente la potencia requerida para accionar el ventilador.

Es posible que a los especialistas en ventiladores no se les permita total libertad en el diseño del mejor sistema de flujo para el ventilador. En algunas ocasiones, un sistema de flujo pobre puede mejorarse sin demasiado esfuerzo agregando aletas divisoras o directoras a la entrada. Algunos fabricantes de ventiladores ofrecen álabes guía que pueden instalarse para este propósito.

Las condiciones de flujo a la descarga del ventilador afectan también el desempeño. Cualquier ventilador produce un flujo de salida no uniforme. Cuando se conecta a un tramo de ducto recto, el flujo se vuelve más uniforme y cierto exceso de energía cinética se transforma en presión estática. Si el ventilador descarga directamente en un gran espacio sin ducto, se disipa el exceso de energía cinética del flujo no uniforme. Un ventilador en un sistema de flujo sin ducto de descarga puede acortar de manera considerable el funcionamiento medido en un banco de pruebas de laboratorio.

El patrón de flujo en la salida del ventilador puede verse afectado por la cantidad de resistencia presente aguas abajo. El efecto del sistema sobre el funcionamiento del ventilador tal vez sea diferente en puntos distintos a lo largo de la curva de presión-flujo del ventilador. De tal modo, puede no ser posible predecir con exactitud el desempeño de un ventilador, *cuando se instala*, sobre la base de curvas medidas en el laboratorio.

El tamaño y la velocidad de los ventiladores pueden aumentarse o disminuirse utilizando las leyes básicas desarrolladas para máquinas de fluidos en el capítulo 7. Es posible para dos ventiladores operar con fluidos de densidad bastante diferente,[9] por lo que la presión debe sustituir la carga como un parámetro dependiente y la densidad debe retenerse en los grupos adimensionales. Los grupos adimensionales apropiados para el análisis de ventiladores son

$$\Pi_1 = \frac{Q}{\omega D^3}, \quad \Pi_2 = \frac{p}{\rho \omega^2 D^2}, \quad \text{y} \quad \Pi_3 = \frac{\mathcal{P}}{\rho \omega^3 D^5} \tag{11.23}$$

Una vez más, la similitud dinámica se asegura cuando se igualan los coeficientes de flujo. De tal modo, cuando

$$Q' = Q\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)\left(\frac{D'}{D}\right)^3 \tag{11.24a}$$

entonces

$$p' = p\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{D'}{D}\right)^2 \tag{11.24b}$$

[9] La densidad de los gases de chimenea manejados por un ventilador de arrastre inducido en una central termoeléctrica puede ser 40 por ciento menor que la densidad del aire manejado por el ventilador de arrastre forzado en la misma planta.

y

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^3\left(\frac{D'}{D}\right)^5 \tag{11.24c}$$

Como una primera aproximación, la eficiencia del ventilador escalado se supone que permanece constante, de modo que

$$\eta' = \eta \tag{11.24d}$$

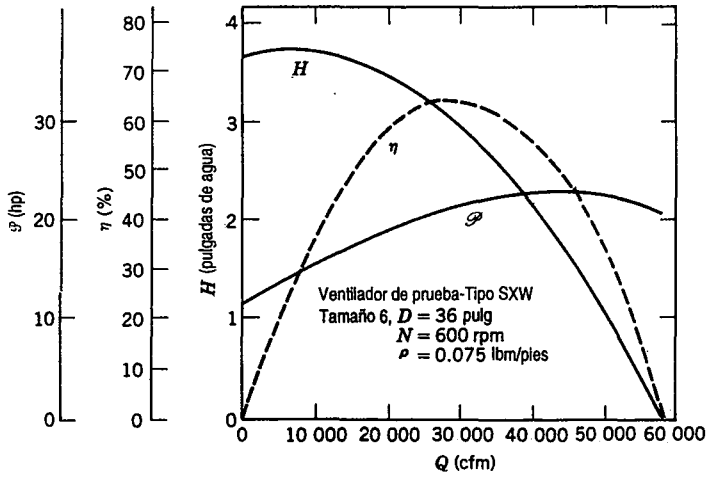
Cuando la carga es sustituida por la presión, y se incluye la densidad, la expresión que define la velocidad específica de un ventilador se vuelve

$$N_s = \frac{\omega Q^{1/2}\rho^{3/4}}{\mathcal{P}^{3/4}} \tag{11.25}$$

La proyección del funcionamiento a una mayor escala de un ventilador con variación de densidad es el tema del problema ejemplo 11.10.

EJEMPLO 11.10 Escalamiento del funcionamiento de un ventilador

A continuación se muestran las curvas de funcionamiento [21] para un ventilador centrífugo con $D = 36$ pulg y $\omega = 600$ rpm, cuando se miden en un banco de pruebas empleando aire a densidad estándar ($\rho = 0.075$ lbm/pies^3). Escale los datos para predecir el funcionamiento de un ventilador similar con $D' = 42$ pulg, $\omega' = 1150$ rpm y $\rho' = 0.045$ lbm/pies^3. Estime la entrega y potencia del ventilador más grande cuando opera a una presión del sistema equivalente a 7.4 pulg de H_2O. Verifique la velocidad específica del ventilador en el nuevo punto de operación.



PROBLEMA EJEMPLO 11.10

DATOS: Los datos de funcionamiento que se muestran para un ventilador centrífugo con $D = 36$ pulg, $\omega = 600$ rpm y $\rho = 0.075$ lbm/pies^3.

ENCUENTRE: *a*) Escale estos datos para predecir el funcionamiento de un ventilador geométricamente similar, con $D' = 42$ pulg a $\omega' = 1150$ rpm, y $\rho' = 0.045$ lbm/pies^3.

b) Estime la entrega y el requerimiento de potencia de entrada si el ventilador más grande opera contra una resistencia del sistema de 7.4 pulg H_2O.

c) Verifique la velocidad específica del ventilador más grande en este punto de operación.

SOLUCIÓN:

Genere las curvas de funcionamiento en la nueva condición de operación escalando los datos de prueba punto por punto. Empleando las ecuaciones 11.24 y los datos de las curvas a $Q = 30\,000$ cfm, la nueva relación de flujo volumétrico es

$$Q' = Q\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)\left(\frac{D'}{D}\right)^3 = 30\,000 \text{ cfm}\left(\frac{1150}{600}\right)\left(\frac{42}{36}\right)^3 = 91\,300 \text{ cfm}$$

El aumento de presión en el ventilador es

$$p' = p\frac{\rho'}{\rho}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{D'}{D}\right)^2 = 2.96 \text{ pulg. } H_2O\left(\frac{0.045}{0.075}\right)\left(\frac{1150}{600}\right)^2\left(\frac{42}{36}\right)^2 = 8.88 \text{ pulg. } H_2O$$

y la nueva entrada de potencia es

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^3\left(\frac{D'}{D}\right)^5 = 21.4 \text{ hp}\left(\frac{0.045}{0.075}\right)\left(\frac{1150}{600}\right)^{33}\left(\frac{42}{36}\right)^5 = 195 \text{ hp}$$

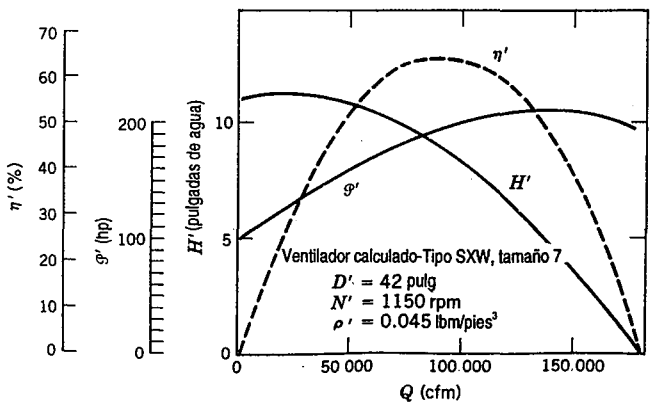
Suponemos que la eficiencia permanece constante entre los dos puntos escalados, por lo que

$$\eta' = \eta = 0.64$$

Cálculos similares en otros puntos de operación producen los resultados tabulados enseguida:

Q (cfm)	p (pulg H_2O)	$\mathcal{P}$ (hp)	η (%)	Q' (cfm)	p' (pulg H_2O)	$\mathcal{P}'$ (hp)
0	3.68	11.1	0	0	11.0	101
10 000	3.75	15.1	37.4	30 400	11.2	138
20 000	3.50	18.6	59.2	60 900	10.5	170
30 000	2.96	21.4	64.8	91 300	8.88	195
40 000	2.12	23.1	57.4	122 000	6.36	211
50 000	1.02	23.1	34.5	152 000	3.06	211
60 000	0	21.0	0	177 000	0	192

Para permitir la interpolación entre los puntos de referencia, es conveniente graficar los resultados:



De la curva de presión contra capacidad, el ventilador más grande debe entregar 110 000 cfm a una presión del sistema de 7.4 pulg H_2O. con una eficiencia de aproximadamente 61 por ciento.
Este punto de operación está ligeramente a la derecha de la eficiencia pico para este ventilador, de modo que es un punto razonable al cual operar el ventilador. La velocidad específica del ventilador en este punto de operación (en unidades usuales de los E.U.) es

$$N_s = \frac{(1150 \text{ rpm})(110\,000 \text{ cfm})^{1/2}(0.045 \text{ lbm/pies}^3)^{3/4}}{(7.4 \text{ pulg } H_2O)^{3/4}} = 8310 \longleftarrow N_s$$

En unidades adimensionales (SI),

$$N_s = \frac{(120 \text{ rad/s})(3110 \text{ m}^3/\text{s})^{1/2}(0.721 \text{ kg/m}^3)^{3/4}}{(1.84 \times 10^3 \text{ N/m}^2)^{3/4}} = 18.6 \longleftarrow N_s$$

El propósito de este problema fue ilustrar el procedimiento para escalar el funcionamiento de ventiladores que operan en gases con dos densidades diferentes.

Se cuenta con tres métodos diferentes para controlar la entrega del ventilador: el control de la velocidad del motor, amortiguadores de entrada y estrangulamiento de salida. El control de velocidad se trató de manera amplia en la sección de bombas. Los mismos beneficios de reducción del consumo de energía y de ruido se obtienen con ventiladores, y el costo de sistemas de control de velocidad variable continúa descendiendo.

Los amortiguadores de entrada pueden utilizarse de manera efectiva en ciertos ventiladores centrífugos de gran tamaño. Sin embargo, se penaliza la eficiencia y no pueden emplearse para reducir la relación de flujo del ventilador por debajo del 40 por ciento de la capacidad nominal. El estrangulamiento de salida es barato pero derrocha energía. Para mayores detalles, consulte las referencias [19] o [21], las cuales son particularmente amplias. Osborne [23] también trata el ruido, la vibración y el diseño mecánico de ventiladores.

Los ventiladores también pueden combinarse en serie, paralelo o arreglos más complejos para ajustarse a las necesidades variables de resistencia y flujo del sistema. Estas combinaciones pueden analizarse utilizando los métodos descritos para bombas. Las referencias [24] y [25] son fuentes excelentes para datos de pérdidas en sistemas de flujo de aire.

Los *sopladores* tienen características de funcionamiento similares a los ventiladores, pero operan (por lo común) a velocidades más altas y aumentan la presión del fluido más que los ventiladores. Jorgensen [19] divide el territorio entre los ventiladores y los compresores en un nivel de presión arbitrario que cambia la densidad del aire en 5 por ciento; él no establece diferencia entre ventiladores y sopladores.

Los compresores pueden ser centrífugos o axiales, dependiendo de la velocidad específica. Los turbocargadores automotrices, los pequeños turbomotores de gas y los elevadores de presión en ductos de gas natural suelen ser centrífugos. Las grandes turbinas de gas y motores de aviones jet con frecuencia son máquinas de flujo axial.

El funcionamiento del compresor depende de la velocidad de operación, la relación de flujo másico y la densidad del flujo de trabajo. Es una práctica común presentar los datos del funcionamiento de compresores en las coordenadas mostradas en la figura 11.33, como *razón de presión* contra *relación de flujo másico corregida*, con la *velocidad corregida* como un parámetro. Normalizar la relación de flujo másico mediante $\sqrt{T}/p$ donde T y p son la temperatura y la presión absolutas, elimina los efectos de las variaciones de densidad. La normalización de la velocidad de operación del compresor con $1/\sqrt{T}$ relaciona la velocidad en la periferia de la rueda del compresor con la velocidad del sonido (esto forma un número de Mach —véase el capítulo 13—).

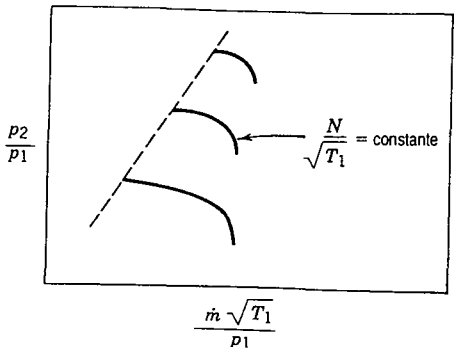


Fig. 11.33 Mapa de funcionamiento típico para un compresor centrífugo [2].

En apariencia, las curvas de funcionamiento en la figura 11.33 aparecen sólo parcialmente completas. Dos fenómenos limitan el rango de la relación de flujo másico al cual un compresor puede operarse a cualquier velocidad determinada. La relación de flujo máxima está limitada por el estrangulamiento —el acercamiento a $M = 1$ en algún punto en la máquina— véase el capítulo 13. El funcionamiento se deteriora rápidamente al acercarse al límite de estrangulamiento.

La relación mínima de flujo másico está limitada por el *atascamiento* u *oleaje rotatorio* en el compresor. El atascamiento rotatorio ocurre cuando celdas separadas de flujo forman y bloquean un segmento del rotor del compresor. El efecto es reducir el funcionamiento y desbalancear el rotor. Esto provoca severas vibraciones y puede llevar rápidamente a daños. De tal modo, es imposible operar un compresor con atascamiento rotatorio y debe evitarse.

Los compresores centrífugos y axiales también pueden ser limitados por el oleaje, un fenómeno de pulsación cíclico que provoca la variación de la relación de flujo másico a través de la máquina, ¡y que puede incluso invertirla! El oleaje se acompaña de ruidos intensos y puede dañar al compresor o sus componentes relacionados; también debe evitarse.

En general, cuanto más alto sea el funcionamiento, tanto más estrecho es el rango en el cual el compresor puede operarse con éxito. Por ello, un compresor debe acoplarse cuidadosamente a su sistema de flujo para asegurar una operación satisfactoria. Vincent-Genot [26] analiza los compresores que se adaptan a las aplicaciones de ductos de gas natural. Quizás las aplicaciones más comunes de maquinaria hidráulica de alta velocidad en la actualidad sean los turbocargadores automotrices (aproximadamente se venden en el mundo 3 millones de unidades con turbocargadores al año). El acoplamiento de turbocargadores automotrices se describe en la literatura de los fabricantes [27].

c. Bombas de desplazamiento positivo

Las bombas de desplazamiento positivo desarrollan presión reduciendo el tamaño de un volumen en el cual un líquido está completamente confinado. En contraste con las turbomáquinas, pueden desarrollarse altas presiones a velocidades relativamente bajas, debido a que el efecto de bombeo depende del cambio en el volumen en lugar de en la acción dinámica.

Las bombas de desplazamiento positivo con frecuencia se utilizan en sistemas hidráulicos a presiones que llegan hasta 35 MPa (5000 psi). Una ventaja principal de la potencia hidráulica es la alta *densidad de potencia* (potencia por peso o tamaño unitario) que puede alcanzarse: para una salida de potencia dada, un sistema hidráulico puede ser más ligero y pequeño que un sistema motriz común de motor eléctrico o de combustión interna.

Se han desarrollado numerosos tipos de bombas de desplazamiento positivo. Unos cuantos

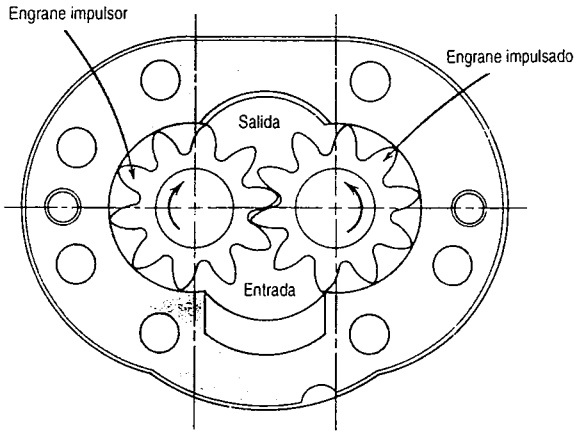


Fig. 11.34 Diagrama esquemático de una bomba de engranes típica [28].

ejemplos incluyen las bombas de émbolo, las de álabes deslizantes y las de engranes. Dentro de cada tipo, las bombas pueden ser de desplazamiento fijo o variable. En [15] se brinda una amplia clasificación de tipos de bombas.

Las características de funcionamiento de la mayoría de las bombas de desplazamiento positivo son similares; en esta sección nos enfocaremos en las bombas de engranes. Este tipo de bomba se emplea regularmente, por ejemplo, para suministrar aceite lubricante presurizado en motores de combustión interna. La figura 11.34 es un diagrama esquemático de una típica bomba de engranes. El aceite entra en el espacio entre los engranes en el fondo de la cavidad de la bomba. El aceite se lleva hacia afuera y hacia arriba por medio de los dientes de los engranes rotatorios y sale a través del puerto de salida en la parte superior de la cavidad. La presión se genera cuando el aceite es obligado a moverse hacia la salida de la bomba; las fugas y el contraflujo se evitan por medio de un estrecho ajuste de los dientes del engranaje en el centro de la bomba, y por medio de pequeños

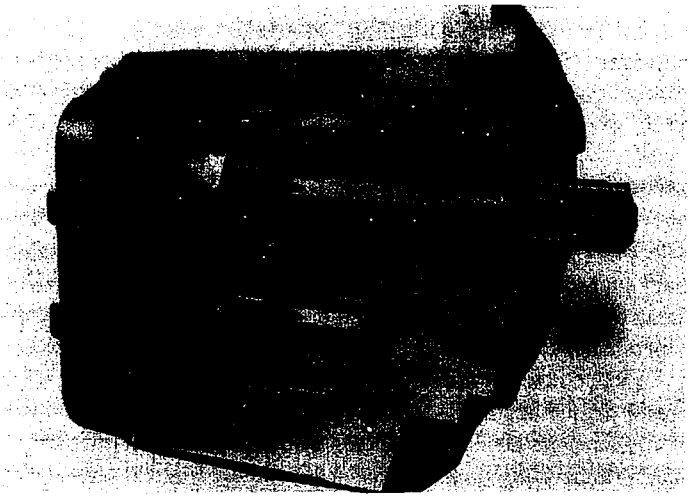


Fig. 11.35 Ilustración de una bomba de engrane con placas laterales de carga de presión [28]. (Fotografía cortesía de Sauer Sundstrand Company.)

espacios mantenidos entre las caras laterales de los engranes y la caja de la bomba. El espaciamiento cercano requiere que el flujo hidráulico se mantenga extremadamente limpio mediante el filtrado de todo el flujo.

La figura 11.35 es una foto que muestra las partes de una bomba de engranes real; brinda una buena idea de la sólida carcasa y de los cojinetes necesarios para soportar las grandes fuerzas de presión que se generan dentro de la bomba. Muestra también las placas laterales de carga de presión diseñadas para "flotar" —para permitir la expansión térmica mientras mantienen el espaciamiento lateral más pequeño posible entre los engranajes y la carcasa. Se han desarrollado muchos diseños ingeniosos para bombas; los detalles están más allá del alcance de nuestro tratamiento aquí, el cual se enfocará en las características de funcionamiento. Para mayores detalles consulte las referencias [28] o [29].

Las típicas curvas de funcionamiento de presión contra gasto para una bomba de engranes de trabajo mediano se muestran en la figura 11.36. El tamaño de la bomba se especifica mediante su desplazamiento por revolución y el fluido de trabajo se caracteriza por su viscosidad y temperatura. Las curvas correspondientes a pruebas a tres velocidades constantes se presentan en el diagrama. A cada velocidad, el gasto disminuye ligeramente a medida que aumenta la presión. La bomba desplaza el mismo volumen, pero cuando la presión se eleva, tanto las fugas como el contraflujo aumentan, por lo que el gasto disminuye ligeramente. La fuga de fluido termina en la carcasa de la bomba, de manera que un drenaje de la caja debe suministrarse para retornar este fluido al depósito del sistema.

La *eficiencia volumétrica* —mostrada por medio de las curvas interrumpidas— se define como el gasto real dividido entre el desplazamiento de la bomba. La eficiencia volumétrica disminuye cuando se eleva la presión o se reduce la velocidad de la bomba. La *eficiencia total* —indicada

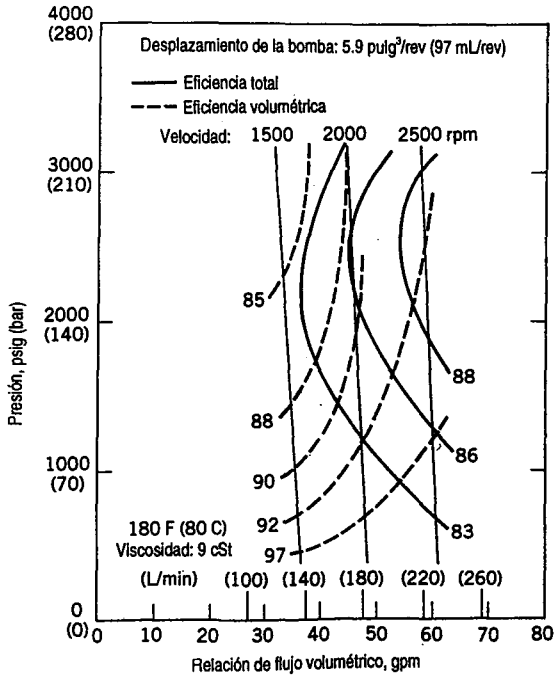


Fig. 11.36 Características de funcionamiento de una bomba de engranes típica [28].

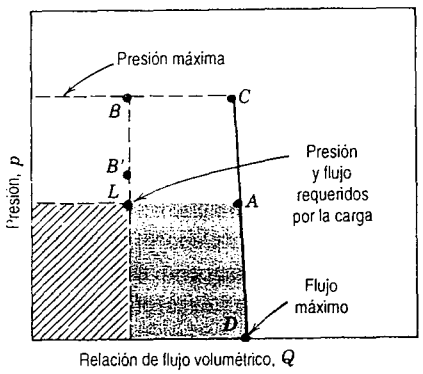


Fig. 11.37 Diagrama de presión-flujo que ilustra las pérdidas del sistema a carga parcial [28].

mediante curvas continuas— se define como la potencia entregada al fluido dividida entre la entrada de potencia a la bomba. La eficiencia total tiende a aumentar (y alcanza un máximo a presión intermedia) a medida que se incrementa la velocidad de la bomba.

Hasta ahora hemos mostrado bombas sólo de desplazamiento fijo. El costo y la complicación adicionales de las bombas de desplazamiento variable están motivados por el ahorro de energía que permiten durante la operación de flujo parcial. En una bomba de desplazamiento variable, el gasto puede variarse para acomodar la carga. El sensado de carga puede emplearse para reducir aún más la presión del gasto y, consecuentemente, el consumo de energía durante la operación a carga parcial. Algunos diseños de bomba permiten el desahogo de presión para reducir aún más la pérdida de potencia durante la operación de respaldo.

La figura 11.37 ilustra las pérdidas del sistema con una bomba de desplazamiento fijo comparadas con las pérdidas para bombas de desplazamiento y presión variables. Suponga que la presión y el flujo requeridos por la carga a operación de flujo parcial corresponden al punto L en el diagrama. Una bomba de desplazamiento fijo operará a lo largo de la curva CD; su gasto estará en el punto A. Como la carga requiere sólo el flujo en L, el flujo restante (entre L y A) debe desviarse de regreso al depósito. Su presión se disipa mediante estrangulamiento. Consecuentemente, la pérdida de potencia del sistema será el área debajo de la línea LA.

Una bomba de desplazamiento variable operando a presión constante entregará sólo el flujo suficiente para suministrar la carga, pero a una presión representada por el punto B. La pérdida de potencia del sistema será proporcional al área a la izquierda de la línea BL. El control de la presión de entrega empleando un sensor de carga puede utilizarse para reducir la pérdida de potencia. Con una bomba de sensado de carga de desplazamiento variable, la presión proporcionada es sólo ligeramente más alta que la necesaria para mover la carga. Una bomba con sensado de carga operaría al flujo y la presión del punto B'. La pérdida del sistema se reduciría de manera significativa al área a la izquierda de la línea $B'L$.

La mejor elección del sistema depende del ciclo de trabajo de operación. Los detalles completos de éstos y otros sistemas de potencia hidráulicos se presentan en [28].

EJEMPLO 11.11 Funcionamiento de una bomba de desplazamiento positivo

Una bomba hidráulica, con las características de funcionamiento de la figura 11.36, opera a 2000 rpm en un sistema que requiere $Q = 20$ gpm a $p = 1500$ psig para la carga en una condición de operación. Verifique el volumen de aceite por revolución entregado por esta bomba. Calcule la entrada de potencia requerida de la bomba, la potencia entregada a la carga y la potencia disipada por estrangulamiento en esta condición. Compare con la potencia disipada utilizando *i*) una bomba

de desplazamiento variable a 3000 psig y *ii*) una bomba con sensado de carga que opera a 100 psig por arriba del requerimiento de carga.

PROBLEMA EJEMPLO 11.11

DATOS: Una bomba hidráulica, con las características de funcionamiento de la figura 11.36, operando a 2000 rpm. El sistema requiere $Q = 20$ gpm a $p = 1500$ psig.

ENCUENTRE: *a*) Verifique el volumen de aceite por revolución entregado por esta bomba.
b) Calcule la entrada de potencia requerida de la bomba.
c) Calcule la potencia entregada a la carga.
d) Calcule la potencia disipada por el estrangulamiento en esta condición.
e) Compare con la potencia disipada empleando:
i) una bomba de desplazamiento variable a 3000 psig y
ii) una bomba con sensado de carga que opera a 100 psig por arriba del requerimiento de presión de la carga.

SOLUCIÓN:

Para estimar la entrega máxima, extrapole la curva de presión contra la relación de flujo hasta la presión cero. Bajo estas condiciones, $Q = 48.5$ gpm a $N = 2000$ rpm con Δp despreciable. Por tanto,

$$\forall = \frac{Q}{N} = 48.5\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{2000\ \text{rev}} \times 231\ \frac{\text{pulg}^3}{\text{gal}} = 5.60\ \text{pulg}^3/\text{rev} \longleftarrow \forall$$

La eficiencia volumétrica de la bomba a flujo máximo es

$$\eta_v = \frac{\forall_{\text{calc}}}{\forall_{\text{bomba}}} = \frac{5.60}{5.9} = 0.949$$

El punto de operación de la bomba puede determinarse a partir de la figura 11.36. A 1500 psig, opera a $Q \approx 46.5$ gpm. Aplicando la primera ley de la termodinámica a un VC que encierra a la bomba, se obtiene la potencia entregada al fluido como

$$\mathcal{P}_{\text{fluido}} = Q\Delta p$$

$$= 46.5\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times 2000\ \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\text{pies}^3}{7.48\ \text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times 144\ \frac{\text{pulg}^2}{\text{pies}^2} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550\ \text{pies} \cdot \text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{fluido}} = 54.3\ \text{hp}$$

De la gráfica, en este punto de operación, la eficiencia de la bomba es aproximadamente $\nu = 0.84$. Por ello, la potencia de entrada requerida es

$$\mathcal{P}_{\text{entrada}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{fluido}}}{\eta} = \frac{54.3\ \text{hp}}{0.84} = 64.6\ \text{hp} \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{entrada}}$$

La potencia entregada a la carga es

$$\mathcal{P}_{\text{carga}} = Q_{\text{carga}}\Delta p$$

$$= 20.0\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times 2000\ \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\text{pies}^3}{7.48\ \text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times 144\ \frac{\text{pulg}^2}{\text{pies}^2} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550\ \text{pies} \cdot \text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{carga}} = 23.3\ \text{hp} \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{carga}}$$

La potencia disipada por estrangulamiento es

$$\mathcal{P}_{\text{disipada}} = \mathcal{P}_{\text{fluido}} - \mathcal{P}_{\text{carga}} = 54.3 - 23.3 = 31.0 \text{ hp} \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{disipada}}$$

La disipación con la bomba de desplazamiento variable es

$$\mathcal{P}_{\text{var-disp}} = Q\Delta p$$

$$= \frac{20.0 \text{ gal}}{\text{min}} \times (3000 - 1500) \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\text{pies}^3}{7.48 \text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pies}^2} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pies} \cdot \text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{var-disp}} = 17.5 \text{ hp} \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{var-disp}}$$

La disipación con la bomba de desplazamiento variable es por tanto menor que 31.0 hp disipados con la bomba de desplazamiento constante y estrangulamiento. El ahorro es aproximadamente de 14 hp.

El cálculo final es para la bomba con sensado de carga. Si la presión de la bomba está 100 psig por arriba de la requerida por la carga, la disipación de la energía en exceso es

$$\mathcal{P}_{\text{carga sensada}} = Q\Delta p$$

$$= \frac{20.0 \text{ gal}}{\text{min}} \times 100 \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\text{pies}^3}{7.48 \text{ gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pies}^2} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{s}}{550 \text{ pies} \cdot \text{lbf}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{carga sensada}} = 1.17 \text{ hp} \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{carga sensada}}$$

El propósito de este problema fue comparar el funcionamiento de un sistema con una bomba de desplazamiento constante con el de sistemas con bombas de desplazamiento variable y sensado de carga. Los ahorros específicos dependen del punto de operación y del ciclo de trabajo del sistema.

d. Hélices

Se ha sugerido que una hélice puede considerarse como una máquina de flujo axial dentro de una carcasa [10]. Del mismo modo que otros dispositivos de propulsión, una hélice produce empuje impartiendo momento lineal a un fluido. La producción de empuje siempre deja la corriente con algo de energía cinética y momento angular que no son recuperables, por lo que este proceso nunca es 100 por ciento eficiente.

El modelo de flujo unidimensional que se muestra esquemáticamente en la figura 11.38 se dibuja en la forma que es visto por un observador que se mueve con la hélice, de modo que el flujo es estable. La hélice real se sustituye por un delgado *disco actuador*, a través del cual la velocidad del flujo es continua pero la presión aumenta de manera abrupta. Relativo a la hélice, el flujo aguas arriba está a la velocidad V y a presión atmosférica. La velocidad axial en el disco actuador es $V + \Delta V/2$, con una reducción de presión correspondiente. Aguas abajo, la velocidad es $V + \Delta V$ y la presión regresa a la atmósfera. (Se muestra en el problema ejemplo 11.12 que la mitad del aumento de velocidad ocurre antes y la otra mitad después del disco actuador.) La contracción del área de la estela para satisfacer la continuidad y el aumento de presión a través del disco de la hélice se muestran en la figura.

No se muestran en las figuras las velocidades de la turbulencia que se producen por el momento de torsión requerido para girar la hélice. La energía cinética debida a la turbulencia en la estela también se pierde a menos que sea removida por una hélice con contador de giros o recuperada parcialmente en álabes guías estacionarios.

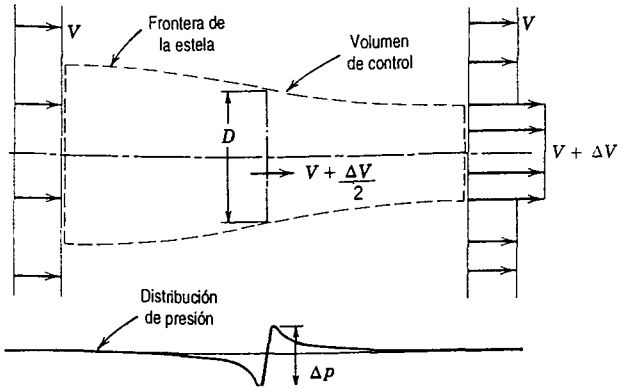


Fig. 11.38 Modelo de flujo unidimensional y volumen de control utilizados para analizar una hélice idealizada [10].

Como todas las turbomáquinas, las hélices deben analizarse de dos maneras. La aplicación del momento lineal en la dirección axial, empleando un volumen de control finito, brinda relaciones generales entre la velocidad de la estela, el empuje, la salida de potencia útil y la energía cinética residual mínima en la estela. Se necesita una teoría más detallada del *elemento álabe* para calcular la interacción entre el álabe de la hélice y la corriente. Una relación general para la eficiencia propulsiva ideal puede obtenerse utilizando el método del volumen de control, como se muestra en el ejemplo 11.12.

EJEMPLO 11.12 Análisis de volumen de control de un flujo idealizado a través de una hélice

Considere el modelo unidimensional que se muestra en la figura 11.38 para el flujo idealizado a través de una hélice. La hélice avanza en aire tranquilo a la velocidad estable V_1. Obtenga expresiones para la presión inmediatamente aguas arriba y la presión inmediatamente aguas abajo del disco actuador. Escriba el empuje sobre la hélice como el producto de esta diferencia de presión por el área del disco. Iguale esta expresión para el empuje con una obtenida aplicando la ecuación del momento lineal al volumen de control. Demuestre que la mitad del aumento de la velocidad ocurre adelante y la mitad detrás del disco propulsor.

PROBLEMA EJEMPLO 11.12

DATOS: Una hélice que avanza en aire tranquilo a la velocidad V_1, como se muestra en la figura 11.38.

ENCUENTRE: *a*) Expresiones para las presiones inmediatamente aguas arriba e inmediatamente aguas abajo del disco actuador.

b) Muestre que la mitad del incremento de la velocidad ocurre adelante del disco actuador y la mitad ocurre detrás del disco actuador.

SOLUCIÓN:

Aplique la ecuación de Bernoulli y la componente x del momento lineal empleando el VC mostrado.

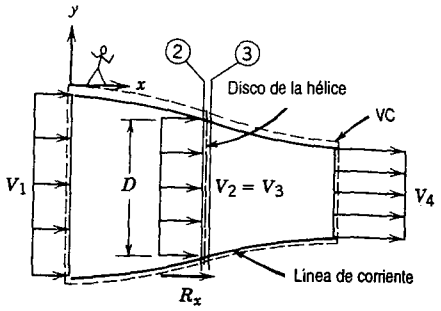
Ecuaciones básicas: $\approx 0(5)$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

$= 0(5)$ $= 0(1)$

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u_{xyz}\rho d\forall + \int_{SC} u_{xyz}\rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable relativo al VC
2) Flujo incompresible
3) Flujo a lo largo de una línea de corriente
4) Flujo sin fricción
5) Horizontal: desprecie los cambios en z; $F_{B_x} = 0$
6) Flujo uniforme en cada sección
7) p_{atm} rodeando el VC



Aplicando la ecuación de Bernoulli, de la sección (1) a la sección (2), se obtiene

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}; \quad p_{2(\text{manométrica})} = {}^1\!/_2\ \rho\,(V_1^2 - V_2^2)$$

La aplicación de la ecuación de Bernoulli de la sección (3) a la sección (4) produce

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{V_4^2}{2}; \quad p_{3(\text{manométrica})} = {}^1\!/_2\ \rho\,(V_4^2 - V_3^2)$$

El empuje sobre la hélice está dado por

$$T = (p_3 - p_2)A = \tfrac{1}{2}\rho A(V_4^2 - V_1^2) \qquad (V_3 = V_2 = V)$$

De acuerdo con la ecuación del momento, empleando velocidades *relativas*,

$$R_x = T = u_1\{-\dot{m}\} + u_4\{+\dot{m}\} = \rho VA(V_4 - V_1) \qquad \{u_1 = V_1, \quad u_4 = V_4\}$$

$$T = \rho VA(V_4 - V_1)$$

Igualando estas dos expresiones para T,

$T = \tfrac{1}{2}\rho A(V_4^2 - V_1^2) = \rho VA(V_4 - V_1)$ o $\tfrac{1}{2}(V_4 + V_1)(V_4 - V_1) = V(V_4 - V_1)$

Por lo tanto $V = {}^1\!/_2(V_1 + V_4)$, por lo que

$$\Delta V_{12} = V - V_1 = \tfrac{1}{2}(V_1 + V_4) - V_1 = \tfrac{1}{2}(V_4 - V_1) = \frac{\Delta V}{2}$$

$$\Delta V_{34} = V_4 - V = V_4 - \tfrac{1}{2}(V_1 + V_4) = \tfrac{1}{2}(V_4 - V_1) = \frac{\Delta V}{2}$$

Aumento de velocidad

El propósito de este problema fue aplicar las ecuaciones de continuidad, momento y de Bernoulli a un modelo de flujo idealizado de una hélice, y verificar la teoría de Rankine de 1885 que dice que la mitad del cambio de velocidad ocurre en cualquiera de los lados del disco de la hélice.

Las formas del volumen de control de las ecuaciones de la continuidad y del momento se aplicaron en el problema ejemplo 11.12 al flujo de la hélice que se muestra en la figura 11.38. Los resultados obtenidos se analizan con mayor profundidad a continuación. El empuje producido es

$$F_T = \dot{m}\ \Delta V \tag{11.26}$$

Para flujo incompresible, en la ausencia de fricción y transferencia de calor, la ecuación de energía indica que la entrada requerida mínima para la hélice es la potencia requerida para aumentar la energía cinética del flujo, la cual puede expresarse como

$$\mathcal{P}_{entrada} = \dot{m}\left[\frac{(V+\Delta V)^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right] = \dot{m}\left[\frac{2V\Delta V + (\Delta V)^2}{2}\right] = \dot{m}\ V\Delta V\left[1 + \frac{\Delta V}{2V}\right] \tag{11.27}$$

La potencia útil producida es el producto del empuje y la velocidad de avance, V; empleando la ecuación 11.26, ésta puede escribirse como

$$\mathcal{P}_{útil} = F_T V = \dot{m}\ V\Delta V \tag{11.28}$$

La combinación de las ecuaciones 11.27 y 11.28, y la simplificación, producen la eficiencia propulsiva como

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{útil}}{\mathcal{P}_{entrada}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta V}{2V}} \tag{11.29}$$

Las ecuaciones de la 11.26 a la 11.29 son aplicables a cualquier dispositivo que crea empuje incrementando la velocidad de una corriente de fluido. Por ello se aplican igualmente bien a aviones, botes o barcos accionados por hélices o por propulsión a chorro.

La ecuación 11.29 para la eficiencia propulsiva es de fundamental importancia. Indica que dicha eficiencia puede incrementarse reduciendo ΔV o aumentando V. A empuje constante, como se muestra mediante la ecuación 11.26, ΔV puede reducirse si se incrementa $\dot{m}$, es decir, si se acelera más fluido a lo largo de un aumento de velocidad más pequeño. Un mayor flujo másico puede manejarse si crece el diámetro de la hélice, pero el tamaño total y la velocidad de la punta al final limitan este planteamiento. El mismo principio se utiliza para incrementar la eficiencia propulsiva del motor de un *turboventilador*, utilizando un gran ventilador para mover flujo de aire adicional fuera del núcleo del motor.

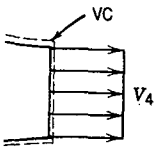
La eficiencia propulsiva también puede incrementarse si la velocidad del movimiento relativo al fluido se aumenta. La velocidad de avance puede estar limitada por la cavitación en aplicaciones marinas. La velocidad de vuelo está limitada en los aviones de hélice por efectos de compresibilidad en las puntas de la misma, pero se están logrando avances en el diseño de hélices para mantener una alta eficiencia con bajos niveles de ruido mientras operan con flujo transónico en las puntas de los álabes. Los aviones de propulsión a chorro pueden volar mucho más rápido que los de hélice, lo que les brinda una eficiencia de propulsión superior.

Una teoría del *elemento álabe* más detallada puede emplearse para calcular la interacción entre el álabe de una hélice y la corriente. Si el espaciamiento del álabe es grande y la *carga del disco*[10] es ligera, los álabes pueden considerarse independientes y las relaciones pueden deducirse para el momento de torsión requerido y empuje producido mediante una hélice. Estas relaciones aproximadas son más exactas para hélices de baja solidez.[11] Las hélices de aviones por lo general son de solidez bastante baja y tienen álabes delgados y largos.

[10] La *carga del disco* es el empuje de la hélice dividido entre el área de barrido del disco actuador.

[11] La *solidez* se define como la relación entre el área proyectada del álabe y el área de barrido del disco actuador.

la hélice



Línea de corriente

Aumento de velocidad

y de Bernoulli
385 que
co de la hélice.

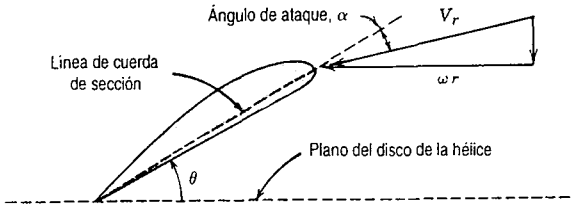


Fig. 11.39 Diagrama de un elemento álabe y del vector de flujo relativo.

Un esquema de un elemento álabe de hélice rotatoria se muestra en la figura 11.39. El álabe se encuentra a un ángulo θ con respecto al plano del disco de la hélice.[12] El flujo se muestra como sería visto por un observador *sobre* el álabe de la hélice.

La velocidad relativa del flujo, V_r, pasando sobre el elemento álabe depende tanto de la velocidad periférica del álabe, ωr, como de la *velocidad de avance*, V. En consecuencia, para una especificación dada del álabe, el ángulo de ataque, α, depende *tanto* de V como de ωr. De tal manera, el funcionamiento de la hélice es afectado tanto por ω como por V.

Incluso si la geometría de la hélice se ajusta para brindar un paso geométrico constante, el campo de flujo en el cual opera puede no ser uniforme. Por consiguiente, el ángulo de ataque a través de los elementos álabes puede variar a partir del ideal y calcularse sólo con la ayuda de un extenso código de computadora que sea capaz de predecir las direcciones y velocidades de flujo locales.

Las características de funcionamiento de hélices suelen medirse experimentalmente. La figura 11.40 muestra características típicas medidas para una hélice marina [10], y para una hélice de avión [30]. Las variables utilizadas para graficar las características son casi adimensionales: por convención, la velocidad rotacional, n, se expresa en revoluciones por segundo (más bien que como ω, en radianes por segundo). La variable independiente es el *coeficiente de velocidad de avance*, J,

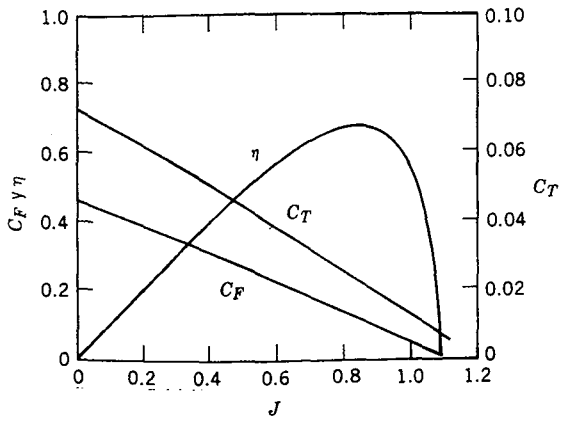
$$J \equiv \frac{V}{nD} \tag{11.30}$$

Las variables dependientes son el *coeficiente de empuje*, C_F, el *coeficiente de momento de torsión*, C_T, el *coeficiente de potencia*, C_P, y la *eficiencia de la hélice*, η, definidos como

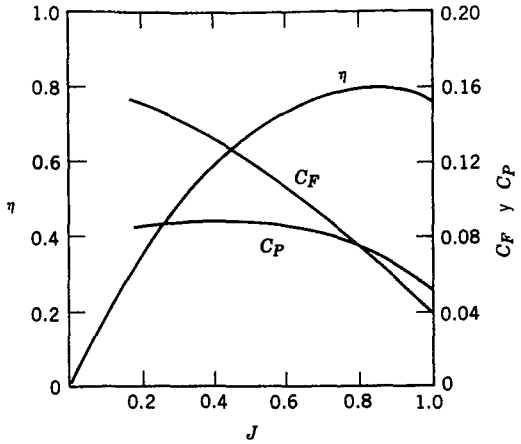
$$C_F = \frac{F_T}{\rho n^2 D^4}, \quad C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^5}, \quad C_P = \frac{\mathcal{P}}{\rho n^3 d^5}, \quad \text{y} \quad \eta = \frac{F_T V}{\omega T} \tag{11.31}$$

Las curvas de funcionamiento para ambas hélices muestran tendencias similares. Tanto el coeficiente de empuje como el de momento de torsión son más altos, y la eficiencia es cero, a velocidad de avance cero. Esto corresponde al ángulo de ataque más grande para cada elemento álabe. La eficiencia es cero debido a que la hélice estacionaria no está efectuando ningún trabajo útil. Cuando la velocidad de avance aumenta, el empuje y el momento de torsión disminuyen gradualmente. La eficiencia aumenta hasta un máximo a una velocidad de avance óptima y después disminuye a cero cuando el empuje tiende a cero.

[12] La *inclinación* se define como la distancia que una hélice recorrería en fluido tranquilo por revolución si avanzara a lo largo del ángulo fijado del álabe, θ. La inclinación, H, de este elemento álabe es igual a $2\pi r \tan\theta$. Para obtener inclinación constante a lo largo del álabe, θ debe cumplir la relación, $\tan\theta = H/2\pi r$, desde el cubo hasta la punta. De tal modo, el ángulo del álabe geométrica es más pequeño en la punta y aumenta de manera uniforme hacia la raíz.



a) Hélice marina [10]



b) Hélice de avión [30]

Fig. 11.40 Características medidas típicas de dos hélices.

EJEMPLO 11.13 Dimensionamiento de una hélice marina

Considere el supertanque del problema ejemplo 9.5. Suponga que la potencia total requerida para superar la resistencia viscosa y el arrastre de las olas es 11.4 MW. Emplee las características de funcionamiento de la hélice marina mostrada en la figura 11.40a para estimar el diámetro y la velocidad de operación requeridas para impulsar el supertanque empleando una sola hélice.

PROBLEMA EJEMPLO 11.13

DATOS: El supertanque del problema ejemplo 9.5, con un requerimiento de potencia de propulsión total de 11.4 MW para superar la viscosidad y el arrastre de las olas, y los datos de funcionamiento para la hélice marina mostrada en la figura 11.40a.

ENCUENTRE: *a*) Estime el diámetro de una sola hélice necesaria para mover el barco.
b) Calcule la velocidad de operación de esta hélice.

SOLUCIÓN:

De las curvas en la figura 11.40a, a una eficiencia óptima de la hélice, los coeficientes son

$$J = 0.85, \quad C_F = 0.10, \quad C_T = 0.020, \quad \text{y} \quad \eta = 0.66$$

El barco navega a vapor a $V = 6.69$ m/s y requiere $\mathcal{P}_{\text{útil}} = 11.4$ MW. Por tanto, el empuje de la hélice debe ser

$$F_T = \frac{\mathcal{P}_{\text{útil}}}{V} = 11.4 \times 10^6 \text{ W} \times \frac{\text{s}}{6.69 \text{ m}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{W} \cdot \text{s}} = 1.70 \text{ MN}$$

La entrada de potencia requerida a la hélice es

$$\mathcal{P}_{\text{entrada}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{útil}}}{\eta} = \frac{11.4 \text{ MW}}{0.66} = 17.3 \text{ MW}$$

De $J = \dfrac{V}{nD} = 0.85$, entonces

$$nD = \frac{V}{J} = 6.69 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0.85} = 7.87 \text{ m/s}$$

Como

$$C_F = \frac{F_T}{\rho n^2 D^4} = 0.10 = \frac{F_T}{\rho (n^2 D^2) D^2} = \frac{F_T}{\rho (nD)^2 D^2}$$

luego, resolviendo para D,

$$D = \left[\frac{F_T}{\rho (nD)^2 C_F}\right]^{1/2} = \left[1.70 \times 10^6 \text{ N} \times \frac{\text{m}^3}{1025 \text{ kg}} \times \frac{\text{s}^2}{(7.87)^2 \text{ m}^2} \times \frac{1}{0.10} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$D = 16.4 \text{ m} \longleftarrow D$$

De $nD = \dfrac{V}{J} = 7.87$ m/s, $n = \dfrac{nD}{D} = 7.87 \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \times \dfrac{1}{16.4 \text{ m}} = 0.480 \text{ s}^{-1}$

por lo que

$$n = \frac{0.480}{s} \times 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = 28.8 \text{ rev/min} \longleftarrow n$$

La hélice requerida es bastante grande pero aún mucho más pequeña que los 25 m de calado del supertanque. El barco necesitaría agua de mar como lastre para mantener sumergida la hélice cuando no trasportara una carga máxima de petróleo.

El propósito de este problema fue ilustrar el uso de los datos de coeficientes adimensionales para el dimensionamiento preliminar de una hélice marina. Este proceso de diseño preliminar se repetiría, utilizando datos de otros tipos de hélices, para determinar la combinación óptima del tamaño, velocidad y eficiencia de la hélice.

Las hélices marinas tienden a tener una alta solidez. Lo anterior empaqueta una gran superficie de elevación dentro del área de barrido del disco para mantener pequeña la diferencia de presión a través de la hélice y evitar cavitación. Ésta tiende a descargar los álabes de una hélice marina reduciendo tanto el momento de torsión requerido como el empuje producido [10]. La cavitación se vuelve más frecuente a lo largo de los álabes cuando se reduce el número de cavitación,

$$Ca = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2} \tag{11.32}$$

La inspección de la ecuación 11.32 muestra que Ca disminuye cuando p se reduce operando cerca

de la superficie libre o incrementando V. Quienes han operado botes de motor también están conscientes de que la cavitación local puede ser provocada por el flujo perturbado que se acerca a la hélice, esto es, al dar vueltas muy cerradas.

La compresibilidad afecta las hélices de avión cuando la velocidad de la punta se acerca al *número de Mach crítico*, al cual el número de Mach local se acerca al valor $M = 1$ en algún punto sobre el álabe. Bajo estas condiciones, el momento de torsión aumenta debido al arrastre incrementado, el empuje disminuye debido a la elevación reducida de la sección y la eficiencia desciende drásticamente.

Si una hélice opera dentro de la capa límite de un cuerpo propulsor, donde el flujo relativo se retarda, su empuje y momento de torsión aparentes pueden aumentar en comparación con aquéllos de la corriente libre uniforme a la misma relación de avance. Es posible que la energía cinética residual en la estela también se reduzca. La combinación de estos efectos puede incrementar la eficiencia propulsiva total del cuerpo y el propulsor combinados. Se emplean códigos de computadora avanzados en el diseño de barcos modernos (y submarinos, donde el ruido puede ser una consideración dominante) para optimar el funcionamiento de cada combinación hélice/casco.

Para ciertas aplicaciones especiales, una hélice puede ponerse dentro de una *cubierta* o *ducto*. Tales configuraciones pueden integrarse dentro de un casco, esto es, como empuje de arco para aumentar la maniobrabilidad, construida dentro del ala de un avión, o situada sobre la cubierta de un aerodeslizador. El empuje puede mejorarse mediante fuerzas de presión favorables en el filo del ducto, aunque es posible que la eficiencia se reduzca por las pérdidas de fricción superficial adicionales encontradas en el ducto.

11-5.2 Máquinas que producen trabajo

a. Turbinas hidráulicas

Las turbinas hidráulicas convierten la energía potencial de agua almacenada en trabajo mecánico. Para maximizar la eficiencia de la turbina siempre es una meta de diseño descargar el agua desde una turbina a presión atmosférica, lo más cerca posible a la elevación del canal de descarga, y con la energía cinética residual mínima posible.

El transporte del flujo de agua dentro de la turbina, con pérdidas de energía mínima, también es importante. Un gran número de detalles de diseño deben considerarse, tales como la geometría de entrada, rejillas de basura, etc. [31]. Las referencias [1, 8, 10 y 31-37] contienen una gran cantidad de información acerca de la ubicación, selección y diseño hidráulico de turbinas, así como de la optimación de centrales hidroeléctricas. El número de grandes fabricantes ha disminuido a unos cuantos, pero las unidades de pequeña escala se están volviendo abundantes [34]. El enorme costo de una planta hidroeléctrica de tamaño comercial justifica el empleo exhaustivo de pruebas de modelos a escala para concretar los detalles de diseño. Véase [31] para una revisión detallada de la generación de potencia hidroeléctrica.

Las pérdidas hidráulicas en largas tuberías de alimentación (conocidas como *tubos de carga*) deben considerarse cuando se diseña la instalación para máquinas de alta carga, tales como las turbinas de impulso; un diámetro óptimo para la tubería de entrada que maximiza la potencia de salida de la turbina puede determinarse para estas unidades, como se muestra en el problema ejemplo 11.14.

La salida de potencia de la turbina es proporcional a la relación de flujo volumétrico multiplicada por la diferencia de presión a través de la turbina. A flujo cero, se dispone de la carga

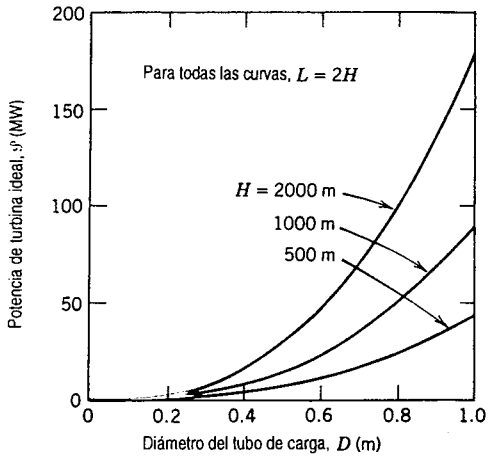


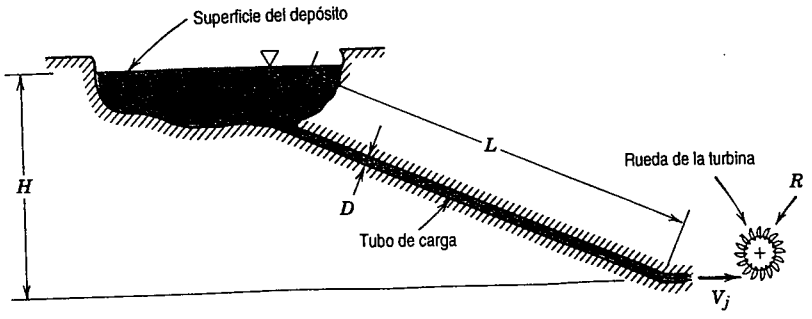
Fig. 11.41 Salida de potencia máxima de una turbina de impulso hidráulica contra el diámetro del tubo de carga.

hidrostática total pero la potencia es cero. A medida que la relación de flujo aumenta, disminuye la carga neta a la entrada de la turbina. La potencia primero aumenta, alcanza un máximo y luego disminuye otra vez cuando se incrementa la relación de flujo. Para un diámetro dado del tubo de carga, la potencia máxima teórica se obtiene cuando un tercio de la carga bruta se disipa por pérdidas de fricción en el tubo de carga. En la práctica, el diámetro del tubo de carga se elige mayor que el mínimo teórico, y sólo de 10 a 15 por ciento de la carga bruta se disipa por fricción [8].

Se requiere cierto diámetro mínimo del tubo de carga para producir una salida de potencia determinada. El diámetro mínimo depende de la salida de potencia deseada, la carga disponible y el material y longitud del tubo de carga. Algunos valores representativos se muestran en la figura 11.41.

EJEMPLO 11.14 Funcionamiento y optimación de una turbina de impulso

Considere la hipotética instalación de la turbina de impulso que se muestra. Analice el flujo en el tubo de carga para desarrollar una expresión relativa a la potencia de salida de la turbina, como una función de la velocidad de chorro. Obtenga una expresión para la relación de flujo volumétrico a la cual se maximiza la potencia de salida. Desarrolle una ecuación paramétrica para el diámetro mínimo del tubo de carga necesario para producir una salida de potencia especificada, empleando la carga bruta y la longitud del tubo de carga como parámetros.



PROBLEMA EJEMPLO 11.14

DATOS: La instalación de turbina de impulso mostrada.

ENCUENTRE: *a*) Una expresión para la potencia de salida de la turbina como una función de la velocidad de chorro.

b) La relación de flujo a la cual se maximiza la potencia de salida.

c) La ecuación paramétrica para el diámetro mínimo del tubo de carga necesario para producir una potencia de salida especificada, empleando como parámetros la carga bruta y la longitud del tubo de carga.

SOLUCIÓN:

De acuerdo con los resultados del ejemplo 11.5, la potencia de salida de una turbina de impulso idealizada está dada por $\mathcal{P}_{\text{salida}} = \rho Q U(V - U)(1 - \cos\theta)$. Para salida de potencia óptima, $U = V/2 = V_j/2$, y

$$\mathcal{P}_{\text{salida}} = \rho Q \frac{V}{2}\left(V - \frac{V}{2}\right)(1 - \cos\theta) = \rho A_j V_j \frac{V_j}{2}\frac{V_j}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\mathcal{P}_{\text{salida}} = \rho A_j \frac{V_j^3}{4}(1 - \cos\theta)$$

En consecuencia, la salida de potencia es proporcional a V_j^3.

Aplique la ecuación de energía para flujo en tubería incompresible y estable a través del tubo de carga para analizar V_j^2 en la salida de la tobera. La superficie libre del depósito se diseña como la sección (1); ahí $\bar{V}_1 \approx 0$.

Se calcula la ecuación:

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + g z_1 - \left(\frac{p_j}{\rho} + \alpha_j \frac{\bar{V}_j^2}{2} + g z_j\right) = h_{lT} = \left(K_{\text{ent}} + f\frac{L}{D}\right)\frac{\bar{V}_p^2}{2} + K_{\text{tobera}}\frac{\bar{V}_j^2}{2}$$

($\bar{V}_1 \approx 0$)

Suposiciones:

1) Flujo estable
2) Flujo incompresible
3) Flujo completamente desarrollado
4) Presión atmosférica a la salida del chorro
5) $\alpha_j = 1$, por lo que $\bar{V}_j = V_j$
6) $K_{\text{ent}} \ll f\frac{L}{D}$
7) $K_{\text{tobera}} = 0$

Entonces,

$$g(z_1 - z_j) = gH = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}_p^2}{2} + \frac{V_j^2}{2} \quad \text{o} \quad V_j^2 = 2gH - f\frac{L}{D_p}\bar{V}_p^2$$

La potencia de la turbina puede escribirse como

$$\mathcal{P} = \rho A_j \frac{V_j^3}{4}(1 - \cos\theta) = \rho A_j(1 - \cos\theta)V_j^2\frac{V_j}{4} = C_1 V_j^2 \frac{V_j}{2}$$

donde $C_1 = \frac{1}{2}\rho A_j(1 - \cos\theta)$ = constante. Por tanto,

$$\mathcal{P} = C_1\left[2gH - f\frac{L}{D_p}\bar{V}_p^2\right]\frac{V_j}{2}$$

De la continuidad, $\bar{V}_p A_p = V_j A_j$, por lo que $\bar{V}_p = V_j \frac{A_j}{A_p} = V_j \left(\frac{D_j}{D_p}\right)^2$. Sustituyendo,

$$\mathcal{P} = C_1 \left[2gH - f\frac{L}{D_p}\left(\frac{D_j}{D_p}\right) V_j^2 \right] \frac{V_j}{2} = C_1 \left[gHV_j - f\frac{L}{D_p}\left(\frac{D_j}{D_p}\right) \frac{V_j^3}{2} \right]$$

Para encontrar la condición para la salida de potencia máxima, a un diámetro del tubo de carga fijo, D_p, diferencie con respecto a V_j e iguale a cero.

$$\frac{d\mathcal{P}}{dV_j} = C_1 \left[gH - 3f\frac{L_j}{D_p}\left(\frac{D_j}{D_p}\right)^4 \frac{V_j^2}{2} \right] = C_1 \left[gH - 3f\frac{L}{D_p}\frac{V_p^2}{2} \right] = C_1 \left[gH - 3h_{lT} \right] = 0$$

o

$$h_{lT} = \frac{1}{3} gH$$

Para un diámetro fijo del tubo de carga, la potencia de la turbina se maximiza cuando la pérdida de carga friccionante, h_{lT}, es igual a 1/3 de la carga bruta disponible en el sitio. La carga neta es entonces 2/3 de la carga bruta.

Los diámetros del chorro y la tubería para operación óptima también pueden determinarse. La velocidad del chorro en condiciones óptimas es

$$V_j^2 = 2gH - f\frac{L}{D_p}\bar{V}_p^2 = 2gH - \frac{1}{3}(2gH) = \frac{4}{3}gH \quad \text{o} \quad V_j = \sqrt{\frac{4}{3}gH} \longleftarrow V_j$$

La velocidad del flujo de la tubería puede obtenerse de

$$f\frac{L}{D_p}\frac{\bar{V}_p^2}{2} = \frac{1}{3}gH \quad \text{o} \quad \bar{V}_p = \left[\frac{2}{3}\frac{gH}{f\frac{L}{D_p}} \right]^{\frac{1}{2}} \longleftarrow \bar{V}_p$$

La utilización de la ecuación de continuidad para relacionar las velocidades y diámetros del flujo conduce a la relación,

$$\bar{V}_p^2 = \frac{2}{3}\frac{gHD_p}{fL} = V_j^2 \left(\frac{D_j}{D_p}\right)^4 = \frac{4}{3}gh\left(\frac{D_j}{D_p}\right)^4$$

Resolviendo para D_j,

$$D_j = \left[\frac{D_p^5}{2fL} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Al sustituir en la ecuación para la potencia de salida ideal de la turbina,

$$\mathcal{P}_{\text{óptima}} = \rho V_j^3 \frac{A_j}{4}(1 - \cos\theta) = \rho\left(\frac{4}{3}gH\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{16}\left[\frac{D_p^5}{2fL}\right]^{\frac{1}{2}} (1 - \cos\theta)$$

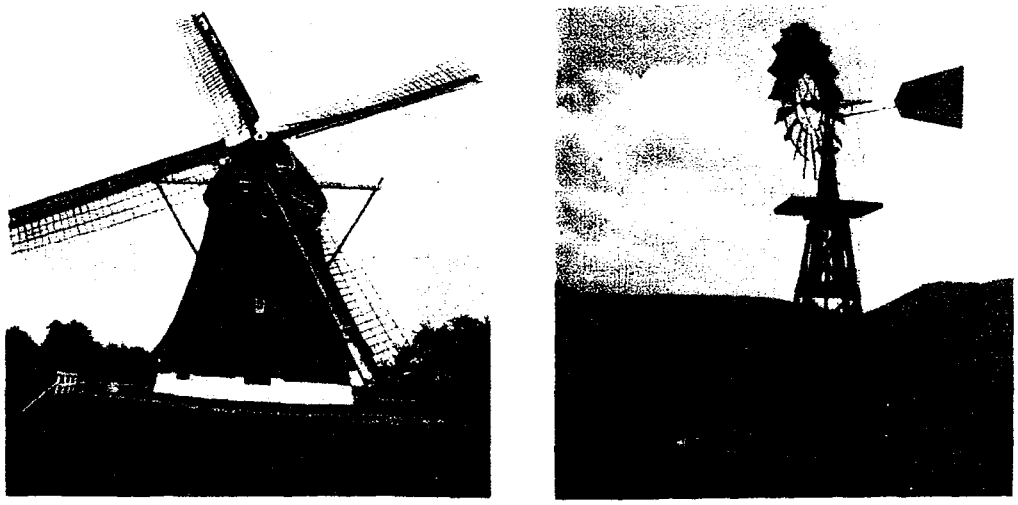
Por último, resolviendo para el diámetro del tubo de carga, la ecuación puede escribirse en la forma

$$D_p \propto \left(\frac{L}{H}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{\mathcal{P}}{H}\right)^{\frac{2}{5}} \longleftarrow D_p$$

El propósito de este problema fue ilustrar la optimación de una turbina de impulso idealizada. La relación derivada arriba define el tamaño mínimo del tubo de carga necesario para obtener una salida de potencia especificada. La práctica real es utilizar tubos de carga más grandes, reduciendo así la pérdida de carga friccionante comparada con el caso analizado aquí.

b. Máquinas aerogeneradoras

Los molinos de viento (o más propiamente, aerogeneradores) se han utilizado por siglos para aprovechar la potencia de los vientos naturales. Dos bien conocidos ejemplos se muestran en la figura 11.42.



a) Molino holandés tradicional

b) Molino de viento de granja estadounidense

Fig. 11.42 Ejemplos de molinos de viento bien conocidos [38]. (Fotos cortesía de *a*) Dirección de Turismo de los Países Bajos, *b*) Departamento de Agricultura de los E.U.)

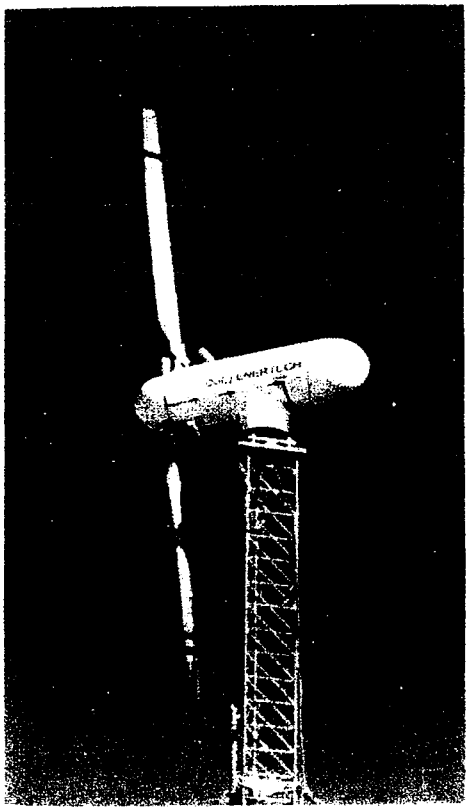
Los molinos de viento holandeses (figura 11.42*a*) giraban lentamente de modo que la potencia podía usarse para hacer girar ruedas de piedra para el molido de granos, de ahí el nombre de "molino de viento". Evolucionaron en grandes estructuras; el tamaño máximo práctico estaba limitado por los materiales de la época. Calvert [39] reporta que, con base en sus pruebas a escala de laboratorio, un molino de viento holandés de 26 m de diámetro producía 41 kW normales con un viento de 36 km/hr a una velocidad angular de 20 rpm.

Los molinos de viento americanos de álabes múltiples (figura 11.42*b*) se encontraban en muchas granjas estadounidenses entre los años 1850 y 1950. Realizaban un valioso servicio al activar bombas de agua antes de la electrificación rural.

El reciente énfasis en los recursos renovables ha reavivado el interés en el diseño y optimización de los molinos de viento. Las configuraciones de aerogenerador de eje horizontal (AEH) y de aerogenerador de eje vertical (AEV) se han estudiado ampliamente. La mayor parte de los diseños de AEH se caracterizan por rotores de dos o tres álabes que giran a alta velocidad. El gran y moderno AEH, mostrado en la figura 11.43*a*, es capaz de producir potencia a cualquier viento un poco mayor que una ligera brisa.

El ejemplo final (figura 11.43*b*) es un AEV de *Darrieus*. Este dispositivo utiliza una moderna sección de perfil aerodinámico simétrica para el rotor, la cual adquiere la forma de un *troposco*[13] En contraste con los otros diseños, el AEV de Darrieus no es capaz de arrancar desde el reposo; sólo puede producir potencia útil arriba de cierta velocidad angular mínima. Puede combinarse

[13] Esta forma (la cual se adoptaría por medio de una cuerda flexible que rotara alrededor de un eje vertical) minimiza los esfuerzos de flexión en el rotor de la turbina Darrieus.



a) Aerogenerador de eje horizontal [38]

b) Aerogenerador de eje vertical [40]

Fig. 11.43 Ejemplos de diseños modernos de aerogeneradores. (Foto cortesía del Departamento de Energía de los E.U.)

con una turbina de autoarranque, tal como el *rotor Savonius*, (véase la ilustración para el problema 9.95 o [47]) para proporcionar el momento de torsión de arranque.

El aerogenerador de eje horizontal puede analizarse como una hélice operada a la inversa. Se emplea el modelo de Rankine de disco actuador idealizado de flujo unidimensional (figura 11.44). La notación simplificada de la figura se usa con frecuencia para analizar aerogeneradores.

La velocidad del viento lejos aguas arriba es V. La corriente se desacelera a $V(1 - a)$ en el disco del aerogenerador y a $V(1 - 2a)$ en la estela de la turbina (a se denomina el *factor de interferencia*). De esta manera, el tubo de corriente de aire capturado por el aerogenerador es pequeño aguas arriba y su diámetro aumenta cuando se mueve aguas abajo.

La aplicación directa del momento lineal (véase el problema ejemplo 11.15) predice que el empuje axial sobre una turbina de radio R será

$$F_T = 2\pi R^2 \rho V^2 a(1-a) \tag{11.33}$$

La aplicación de la ecuación de energía, suponiendo que no hay pérdidas (ningún cambio en la energía interna o transferencia de calor), proporciona la potencia que se toma de la corriente de fluido como

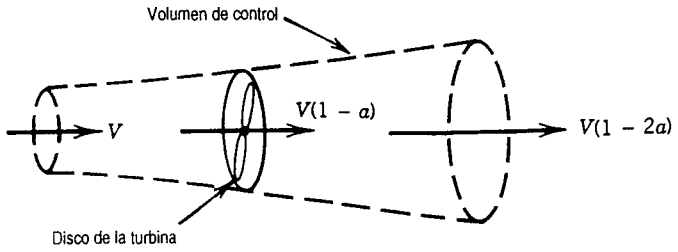


Fig. 11.44 Volumen de control y notación simplificada utilizados para analizar el funcionamiento de un aerogenerador.

$$\mathcal{P} = 2\pi R^2 \rho V^3 a(1-a)^2 \tag{11.34}$$

La eficiencia de un molino de viento se define de manera más conveniente con referencia al flujo de energía cinética contenido dentro de un tubo de corriente del tamaño del disco actuador. Este flujo de energía cinética es

$$KEF = \frac{1}{2}\rho V^3 \pi R^2 \tag{11.35}$$

La combinación de las ecuaciones 11.34 y 11.35 produce la eficiencia (o alternativamente, el *coeficiente de potencia* [40]) como

$$\eta = \frac{\mathcal{P}}{KEF} = 4a(1-a)^2 \tag{11.36}$$

Betz [40] fue el primero en obtener este resultado y en demostrar que la eficiencia teórica se maximiza cuando $a = 1/3$. La eficiencia teórica máxima es $\eta = 0.593$.

Si el molino de viento se carga ligeramente (a es pequeña), alterará una relación de flujo másico de aire grande, pero la energía extraída por unidad de masa será pequeña y la eficiencia baja. La mayor parte de la energía cinética en la corriente de aire se dejará en la estela y se desperdiciará. Si el molino se carga en grado extremo ($a \approx 1/2$), alterará una relación de flujo másico mucho menor. La energía removida por masa unitaria será grande, pero la potencia producida será pequeña comparada con el flujo de energía cinética a través del área imperturbada del disco actuador. De esa manera se presenta una eficiencia pico a cargas del disco intermedias.

El análisis de Rankine incluye algunas suposiciones importantes que limitan su aplicabilidad [40]. Primero, se supone que el aerogenerador altera sólo el aire contenido dentro del tubo de corriente definido en la figura 11.44. Segundo, la energía cinética producida como una turbulencia detrás de la turbina no se toma en cuenta. Tercero, se ignora cualquier gradiente de presión radial. Glauert [30] consideró parcialmente la turbulencia de la estela para predecir la dependencia de la eficiencia ideal en la *relación de la velocidad de punta*, $X = \omega R/V$, como se muestra en la figura 11.45 (ω es la velocidad angular de la turbina).

Cuando aumenta la relación de velocidad de punta, crece la eficiencia ideal, acercándose asintóticamente al valor pico ($\eta = 0.593$). (Físicamente, la turbulencia dejada en la estela se reduce cuando se incrementa la relación de velocidad de punta.) La referencia [40] presenta un resumen de la teoría detallada del elemento álabe utilizada para desarrollar la curva de eficiencia límite mostrada en la figura 11.45.

Cada tipo de aerogenerador tiene su rango de aplicación más favorable. El tradicional molino de viento estadounidense de álabes múltiples tiene un gran número de álabes y opera a velocidad relativamente baja. Su solidez, σ (la razón entre el área del álabe y el área de barrido del disco de la turbina, πR^2), es alta. Debido a su relativamente baja velocidad de operación, son bajos su

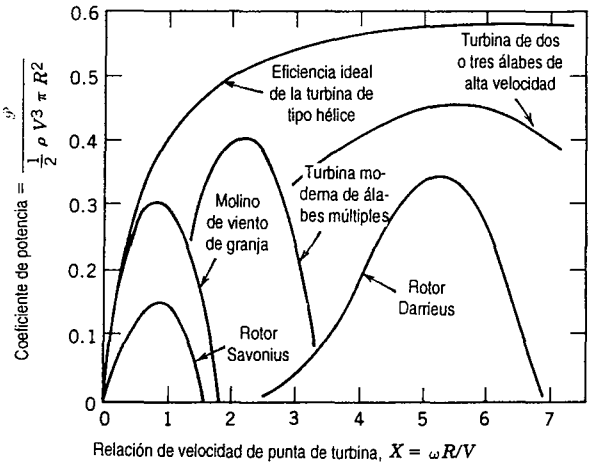


Fig. 11.45 Tendencias de eficiencia de tipos de aerogeneradores contra la relación de velocidad de punta [40].

relación de velocidad de punta y su límite de desempeño teórico. Su relativamente pobre funcionamiento, comparado con su límite teórico, se debe en gran parte al empleo de álabes poco complejos, los cuales son simples superficies dobladas de hojas metálicas en vez de formas con perfil aerodinámico.

Es necesario aumentar de modo considerable la relación de velocidad de punta para alcanzar un rango de operación más favorable. Los modernos diseños de aerogeneradores de alta velocidad utilizan perfiles aerodinámicos definidos cuidadosamente y operan a relaciones de velocidad de punta de hasta 7[48].

EJEMPLO 11.15 Funcionamiento de un molino de viento idealizado

Desarrolle expresiones generales para el empuje, la salida de potencia y la eficiencia de un molino de viento idealizado, como se muestra en la figura 11.44. Calcule el empuje, la eficiencia ideal y la eficiencia real para el molino de viento holandés probado por Calvert ($D = 26$ m, $\omega = 20$ rpm, $V = 36$ km/hr y $\mathcal{P}_{salida} = 41$ kW).

PROBLEMA EJEMPLO 11.15

DATOS: Un molino de viento idealizado, como el que se muestra en la figura 11.44, y el molino de viento holandés probado por Calvert:

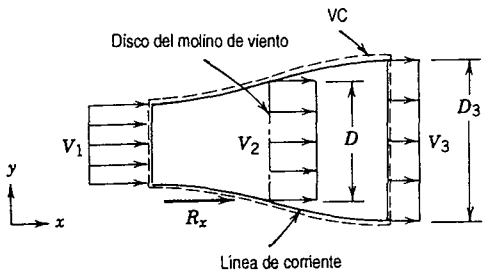
$D = 26$ m $\quad \omega = 20$ rpm $\quad V = 36$ km/hr $\quad \mathcal{P}_{salida} = 41$ kW

ENCUENTRE: *a*) Expresiones generales para el empuje ideal, la salida de potencia y la eficiencia.

b) Calcule el empuje, la salida de potencia y las eficiencias real e ideal para el molino de viento holandés probado por Calvert.

SOLUCIÓN:

Aplique las ecuaciones de continuidad, de la componente x del momento y de energía, empleando el VC y las coordenadas mostrados.



Ecuaciones básicas: $0 = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(3)} \int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(2)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(3)} \int_{SC} u\ \rho d\forall + \int_{SC} u\ \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\cancel{Q}^{=0(7)} - \dot{W}_s = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(3)} \int_{VC} e\ \rho d\forall + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho}\right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Suposiciones:
1) La presión atmosférica actúa en el VC; $F_{S_x} = R_x$
2) $F_{B_x} = 0$
3) Flujo estable
4) Flujo uniforme en cada sección
5) Flujo incompresible de aire estándar
6) $V_1 - V_2 = V_2 - V_3 = {}^1/_2(V_1 - V_3)$, según demostró Rankine
7) $\dot{Q} = 0$
8) $u_1 = u_2 = u_3$, para flujo incompresible sin fricción

En término del factor de interferencia, a, $V_1 = V$, $V_2 = (1 - a)V$ y $V_3 = (1 - 2a)V$.

De la continuidad, para flujo uniforme en cada sección transversal, $V_1A_1 = V_2A_2 = V_3A_3$.

Del momento,

$$R_x = u_1\{-|\rho V_1 A_1|\} + u_3\{+|\rho V_3 A_3|\} = (V_3 - V_1)\rho V_2 A_2 \quad \{u_1 = V_1, \quad u_3 = V_3\}$$

R_x es la fuerza externa que actúa *sobre* el volumen de control. La fuerza de empuje ejercida *por* el VC *sobre* los alrededores es

$$K_x = -R_x = (V_1 - V_3)\rho V_2 A_2$$

En términos del factor de interferencia, la ecuación para el empuje puede escribirse en la forma general,

$$K_x = \rho V^2 \pi R^2 2a(1-a) \qquad K_x$$

La ecuación de energía se convierte en

$$-\dot{W}_s = \frac{V_1^2}{2}\{-|\rho V_1 A_1|\} + \frac{V_3^2}{2}\{+|\rho V_3 A_3|\} = \rho V_2 \pi R^2 \frac{1}{2}(V_3^2 - V_1^2)$$

La potencia de salida, $\mathcal{P}$, es igual a $\dot{W}_s$. En términos del factor de interferencia,

$$\mathcal{P} = \dot{W}_s = \rho V(1-a)\pi R^2\left[\frac{V^2}{2} - \frac{V^2}{2}(1-2a)^2\right] = \rho V^3(1-a)\frac{\pi R^2}{2}[1-(1-2a)^2]$$

Después de simplificar algebraicamente,

$$\mathcal{P}_{\text{ideal}} = 2\rho V^3 \pi R^2 a(1-a)^2 \longleftarrow \mathcal{P}_{\text{ideal}}$$

El flujo de energía cinética a través de un tubo de corriente de flujo no perturbado, de área igual a la del disco actuador, es

$$KEF = \rho V \pi R^2 \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}\rho V^3 \pi R^2$$

De este modo, la eficiencia ideal puede escribirse

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{ideal}}}{KEF} = \frac{2\rho V^3 \pi R^2 a(1-a)^2}{\frac{1}{2}\rho V^3 \pi R^2} = 4a(1-a)^2 \longleftarrow \eta$$

Para encontrar la condición para la máxima eficiencia posible, $d\eta/da$ se iguala a cero. La eficiencia máxima es $\eta = 0.593$, la cual ocurre cuando $a = 1/3$.

El molino de viento holandés probado por Calvert tenía una relación de velocidad de punta de

$$X = \frac{\omega R}{V} = \frac{20\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times 13\ \text{m}}{\frac{\text{s}}{10\ \text{m}}} = 2.72 \longleftarrow X$$

La máxima eficiencia teórica alcanzable a esta relación de velocidad de punta, considerando turbulencia (fig. 11.45), sería de casi 0.53.

La eficiencia real del molino de viento holandés es

$$\eta_{\text{real}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{real}}}{KEF}$$

Con base en los datos de prueba de Calvert, el flujo de energía cinética es

$$KEF = \frac{1}{2}\rho V^3 \pi R^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.23\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (10)^3\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}^3} \times \pi(13)^2\ \text{m}^2 \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} \times \frac{\text{W}\cdot\text{s}}{\text{N}\cdot\text{m}}$$

$$KEF = 3.27 \times 10^5\ \text{W o } 327\ \text{kW}$$

Al sustituir en la definición de la eficiciencia real,

$$\eta_{\text{real}} = \frac{41\ \text{kW}}{327\ \text{kW}} = 0.125 \longleftarrow \eta_{\text{real}}$$

De tal modo, la eficiencia real del molino de viento holandés es de aproximadamente 24 por ciento de la máxima eficiencia teórica que puede alcanzarse a esta relación de velocidad de punta.

El empuje real sobre el molino de viento holandés sólo puede estimarse, ya que no se conoce el factor de interferencia, a. El empuje máximo posible ocurriría a $a = 1/4$, en cuyo caso,

$$K_x = \rho V^2 \pi R^2 2a(1-a)$$

$$= \frac{1.23 \text{ kg}}{\text{m}^3} \times \frac{(10)^2 \text{ m}^2}{\text{s}^2} \times \pi(13)^2 \text{ m}^2 \times 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$K_x = 2.45 \times 10^4 \text{ N} \quad \text{o} \quad 24.5 \text{ kN} \leftarrow K_x$$

Esto no suena como una fuerza de empuje demasiado grande, considerando el tamaño ($D = 26$ m) del molino de viento. Sin embargo, $V = 36$ km/hr es sólo un viento moderado. La máquina real tendría que soportar condiciones de viento mucho más severas durante tormentas.

El propósito de este problema fue ilustrar la aplicación de los conceptos de empuje, potencia y eficiencia ideales para un aerogenerador, así como calcular los valores correspondientes para una máquina real.

11-6 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 11, usted será capaz de efectuar lo siguiente:

1. Brindar definiciones operacionales de:

máquina de desplazamiento positivo	paso de compresor
turbomáquina	solidez
flujo radial	turbina
flujo axial	turbina de impulso
flujo mixto	turbina de reacción
bomba	tubo de aspiración
ventilador	potencia hidráulica
soplador	potencia mecánica
compresor	eficiencia de una turbina
impulsor, rotor, rueda o rodete	carga a válvula cerrada
eficiencia de bomba	pérdida de impacto
espiral o voluta	velocidad específica

2. Brindar un enunciado en palabras del principio del momento angular y escribir la forma del volumen de control de la ecuación básica.
3. Dibujar polígonos de velocidad y aplicar la ecuación de Euler para turbomáquinas para calcular el momento de torsión, la carga y la potencia ideales desarrollados por un rotor de una máquina para fluidos.
4. Evaluar el funcionamiento (desarrollo de carga, entrada de potencia y eficiencia) de una máquina para fluidos a partir de datos medidos.
5. Calcular y emplear datos adimensionales para escalar el funcionamiento de una máquina para fluidos cuando cambian el tamaño, la velocidad o las condiciones de operación.
6. Emplear el concepto de carga neta de succión positiva para definir y calcular la *NPSH* disponible y requerida por una máquina hidráulica.

7. Desarrollar y aplicar las curvas de resistencia del sistema para predecir el funcionamiento de una máquina hidráulica como parte de un sistema de flujo.
8. Predecir el funcionamiento de máquinas hidráulicas instaladas en combinaciones en paralelo o serie en un sistema de flujo.
9. Emplear información de fabricantes para especificar las bombas y ventiladores apropiados para su empleo en sistemas de flujo definidos.
10. Efectuar análisis y dimensionamientos preliminares para instalaciones hidráulicas y de aerogeneradores.
11. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionen con el material que ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Wilson, D. G., "Turbomachinery-From Paddle Wheels to Turbojets", Mechanical Engineering, *104*, 10, Octubre 1982, pp. 28-40.
2. Logan, E. S., Jr., *Turbomachinery: Basic Theory and Applications*. Nueva York: Dekker, 1981.
3. Comunicación privada, Rocky Mountain Institute, 1990.
4. American Society of Mechanical Engineers, *Performance Test Codes: Centrifugal Pumps*, ASME PTC 8.2-1990. Nueva York: ASME, 1990.
5. American Institute of Chemical Engineers, *Equipment Testing Procedure: Centrifugal Pumps (Newtonian Liquids)*. Nueva York: AIChE, 1984.
6. Air Movement and Control Association, *Laboratory Methods of Testing Fans for Rating*. AMCA Standard 210-74, ASHRAE Standard 51-75. Atlanta, GA: ASHRAE, 1975.
7. Peerless Pump,* Brochure B-4003, "System Analysis for Pumping Equipment Selection", 1979.
8. Daugherty, R. L., J. B. Franzini, y E. J. Finnemore, *Fluid Mechanics with Engineering Applications*, 8a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1985.
9. Rouse, H., and S. Ince, *History of Hydraulics*. Iowa City, IA: Iowa University Press, 1957.
10. Daily, J. W., "Hydraulic Machinery", en Rouse, H., ed., *Engineering Hydraulics*. Nueva York: Wiley, 1950.
11. Russell, G. E., *Hydraulics*, 5a. ed. Nueva York: Henry Holt, 1942.
12. Sabersky, R. H., A. J. Acosta, y E. G. Hauptmann, *Fluid Flow: A First Course in Fluid Mechanics*, 3rd ed. Nueva York: Macmillan, 1989.
13. Moody, L. F., "Hydraulic Machinery", *Handbook of Applied Hydraulics*, ed. by C. V. Davis. Nueva York: McGraw-Hill, 1942.
14. Hodge, B. K., *Analysis and Design of Energy Systems*, 2a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
15. Dickinson, C., *Pumping Manual*, 8a. ed. Surrey, England: Trade & Technical Press, Ltd., 1988.
16. Hicks, T. G., and T. W. Edwards, *Pump Application Engineering*. Nueva York: McGraw-Hill, 1971.
17. Hydraulic Institute, *Hydraulic Institute Standards*. Nueva York: Hydraulic Institute, 1969.
18. Armintor, J. K., and D. P. Conners, "Pumping Applications in the Petroleum and Chemical Industries," IEEE Transactions on Industry Applications, *IA-23*, 1, enero 1987.
19. Jorgensen, R., ed., *Fan Engineering*, 8a. ed. Buffalo, NY: Buffalo Forge, 1983.

* Peerless Pump Division, FMC Corporation, P.O. Box 17026, Indianapolis, IN 46206-7026.

20. Am Test
21. Ber Pres
22. Wal
23. Osb
24. Am *tals*.
25. Idel
26. Vin
27. Foll
28. Lan *Syst*
29. Wa
30. Dur
31. Gul 199
32. Frit Yor
33. Gla Res
34. Mc
35. Ols & F
36. Qui of t
37. Wa
38. Put
39. Cal 197
40. Bat *Eng*
41. Wh
42. So *De* tior pp.
43. Ste
44. Dr 93-
45. She
46. U.S cal of

** Warn

20. American Society of Mechanical Engineers, *Power Test Code for Fans*. Nueva York: ASME, Power Test Codes, PTC 11-1946.
21. Berry, C. H., *Flow and Fan: Principles of Moving Air through Ducts*, 2a. ed. Nueva York: Industrial Press, 1963.
22. Wallis, R. A., *Axial Flow Fans and Ducts*. Nueva York: Wiley, 1983.
23. Osborne, W. C., *Fans*. 2a ed. London: Pergamon Press, 1977.
24. American Society of Heating, Refrigeration, and Air Conditioning Engineers, *Handbook of Fundamentals*. Atlanta, GA: ASHRAE, 1980.
25. Idelchik, I. E., *Handbook of Hydraulic Resistance*, 2a. ed. Nueva York: Hemisphere, 1986.
26. Vincent-Genod, J., *Fundamentals of Pipeline Engineering*. Houston: Gulf Publishing Co., 1984.
27. Folleto del turbocargador de Warner Ishi.**
28. Lambeck, R. R., *Hydraulic Pumps and Motors: Selection and Application for Hydraulic Power Control Systems*. Nueva York: Dekker, 1983.
29. Warring, R. H., ed., *Hydraulic Handbook*, 8a. ed. Houston: Gulf Publishing Co., 1983.
30. Durand, W. F., ed., *Aerodynamic Theory*, 6 volúmenes. Nueva York: Dover, 1963.
31. Gulliver, J. S., and R. E. A. Arndt, *Hydropower Engineering Handbook*. Nueva York: McGraw-Hill, 1990.
32. Fritz, J. J., *Small and Mini Hydropower Systems: Resource Assessment and Project Feasibility*. Nueva York: McGraw-Hilll, 1984.
33. Gladwell, J. S., *Small Hydro: Some Practical Planning and Design Considerations*. Idaho Water Resources Institute. Moscow, ID: University of Idaho, abril 1980.
34. McGuigan, D., *Small Scale Water Power*. Dorchester: Prism Press, 1978.
35. Olson, R. M., y S. J. Wright, *Essentials of Engineering Fluid Mechanics*, 5a. ed. Nueva York: Harper & Row, 1990.
36. Quick, R. S., "Problems Encountered in the Design and Operation of Impulse Turbines", Transactions of the ASME, *62*, 1940, pp. 15-27.
37. Warnick, C. C., *Hydropower Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
38. Putnam, P. C., *Power from the Wind*. Nueva York: Van Nostrand, 1948.
39. Calvert, N. G., *Windpower Principles: Their Application on the Small Scale*. Londres: Griffin, 1978.
40. Baumeister, T., E. A. Avallone, y T. Baumeister, III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 8a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1978.
41. White, F. M., *Fluid Mechanics*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1986.
42. Sovern, D. T., y G. J. Poole, "Column Separation in Pumped Pipelines", en Kienow, K. K., ed., *Pipeline Design and Installation*, Proceedings of the International Conference on Pipeline Design and installation, Las Vegas, Nevada, marzo 25-27, 1990. Nueva York: American Society of Civil Engineers, 1990, pp. 230-243.
43. Stepanoff, A. J., *Pumps and Blowers, Two-Phase Flow*. Nueva York: Wiley, 1965.
44. Drella, M., "Aerodynamics of Human-Powered Flight," *Annual Review of Fluid Mechanics, 22*, pp. 93-110. Palo Alto, CA: Annual Reviews, 1990.
45. Shepherd, D. G., *Principles of Turbomachinery*. Nueva York: Macmillan, 1956.
46. U.S. Department of the Interior, "Selecting Hydraulic Reaction Turbines", A Water Resources Technical Publication, *Engineering Monograph No. 20*. Denver, CO: U.S. Department of the Interior, Bureau of Reclamation, 1976.

** Warner-Ishi, P.O. Box 580, Shelbyville, IL 62565-0580.

47. Eldridge, F. R., *Wind Machines*, 2a. ed. Nueva York: Van Nostrand Reinhold, 1980.
48. Migliore, P. G., "Comparison of NACA 6-Series and 4-Digit Airfoils for Darrieus Wind Turbines", Journal of Energy, 7, 4, jul.-ago. 1983, pp. 291-292.
49. Abbott, I. H., and A. E. von Doenhoff, *Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data*. Nueva York: Dover, 1959 (paperback).
50. Heald, C. C., ed., *Cameron Hydraulic Data*, 17a. ed. Woodcliff lake, NJ: Ingersoll-Rand, 1988.

PROBLEMAS

11.1 Se bombea gasolina con una bomba centrífuga. Cuando la relación de flujo es 375 gpm, la bomba requiere 19.3 hp de entrada, y su eficiencia es de 81.2 por ciento. Calcule el aumento de presión producido por la bomba. Exprese este resultado como (a) pies de agua y (b) pies de gasolina.

‡11.2 Las dimensiones del impulsor de una bomba centrífuga son

Parámetro	Sección de entrada (1)	Sección de salida (2)
Radio, r (mm)	100	300
Ancho del álabe, b (mm)	50	40
Ángulo del álabe, β (grados)	70	80

Suponga que la bomba es accionada a 1150 rpm mientras bombea agua. Calcule la carga teórica y la potencia hidráulica entregada al fluido, y grafique contra la relación de flujo volumétrico.

‡11.3 Las dimensiones del impulsor de una bomba centrífuga son

Parámetro	Sección de entrada (1)	Sección de salida (2)
Radio, r (mm)	200	600
Ancho del álabe, b (mm)	60	40
Ángulo del álabe, β (grados)	50	70

La bomba recibe agua y se acciona a 850 rpm. Calcule la carga teórica, el momento de torsión y la entrada de potencia, y grafique contra la relación de flujo volumétrico.

‡11.4 Las dimensiones del impulsor de una bomba centrífuga son

Parámetro	Sección de entrada (1)	Sección de salida (2)
Radio, r (mm)	400	1200
Ancho del álabe, b (mm)	120	80
Ángulo del álabe, β (grados)	40	60

La bomba se acciona a 575 rpm y el fluido es agua. Calcule la carga teórica, el momento de torsión y la entrada de potencia, y grafique contra la relación de flujo volumétrico.

11.5 La carga teórica entregada por una bomba centrífuga a válvula cerrada depende del radio de descarga y de la velocidad angular del impulsor. Para un diseño preliminar, es útil tener una gráfica

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

que muestre las características teóricas a válvula cerrada y que se aproxime al funcionamiento real. Elabore una gráfica log-log del radio del impulsor contra el aumento de la carga teórica a válvula cerrada, con las velocidades estándar del motor como parámetros. Suponga que el fluido es agua y que la carga real a la relación de flujo del diseño es 30 por ciento menor que la carga de válvula cerrada teórica (muestre esto mediante líneas interrumpidas sobre la gráfica). Explique cómo podría utilizarse esta gráfica en el diseño preliminar.

‡**11.6** Considere las dimensiones del impulsor de la bomba centrífuga dadas en el problema ejemplo 11.2. Construya el polígono de velocidad para el flujo sin impacto en la entrada del impulsor, si b = constante. Calcule el ángulo de flujo efectivo respecto a los álabes radiales del impulsor para el caso en el que no hay turbulencia a la entrada. Investigue los efectos en el ángulo de flujo de *a*) las variaciones en el ancho del impulsor y *b*) las velocidades de la turbulencia de entrada.

‡**11.7** Considere las dimensiones del impulsor de la bomba centrífuga del problema ejemplo 11.2. Construya el polígono de velocidad para el flujo que deja el impulsor de manera tangencial a los álabes, a ángulos de salida en el rango $60 < \beta < 90$ grados. Estime el momento de torsión ideal de la bomba, la entrada de potencia y el aumento de carga a una relación de flujo dada, para flujo con turbulencia de entrada cero. Grafique los resultados contra β.

11.8 Considere una bomba centrífuga cuya geometría y condiciones de flujo son

Radio de entrada del impulsor, R_1	37.5 mm
Radio de salida del impulsor, R_2	150 mm
Ancho de salida del impulsor, b_2	12.7 mm
Velocidad de diseño, ω	1750 rpm
Relación de flujo de diseño, Q	4.25 L/s
Álabes curvados hacia atrás (ángulo del álabe de salida), β_2	60°
Velocidad axial a la entrada, V_1	< 3.05 m/s
Rango de la relación de flujo requerida	50-100% de diseño

Suponga un comportamiento ideal de la bomba con eficiencia del 100 por ciento. Encuentre la carga de válvula cerrada. Calcule las velocidades de descarga absoluta y relativa, la carga total y la potencia teórica requerida a la relación de flujo del diseño.

‡**11.9** Considere la geometría de la bomba centrífuga idealizada descrita en el problema 11.8. Dibuje los polígonos de la velocidad de entrada y salida. Calcule los ángulos del álabe de entrada requeridos para el flujo de entrada "sin impacto" a la relación de flujo del diseño. Estime la diferencia entre los ángulos del álabe de entrada y las direcciones del flujo a 50 y 150 por ciento de la relación de flujo del diseño. Evalúe y grafique la entrada de potencia teórica a la bomba sobre este rango de relación de flujo. Determine la relación de flujo a la cual la potencia entregada al fluido es máxima.

11.10 Una bomba de agua centrífuga, con impulsor de 6 pulg de diámetro y flujo de entrada axial, opera a 1750 rpm. Los álabes del impulsor están curvados hacia atrás ($\beta_2 = 65°$) y tienen ancho axial $b_2 = 0.75$ pulg. La carcasa de la bomba actúa como un difusor, el cual convierte 60 por ciento de la carga de velocidad absoluta en la salida del impulsor en un aumento de la presión estática. La pérdida de carga a través de la succión de la bomba y de los canales de descarga es 0.75 veces la *componente radial* de la carga de velocidad que sale del impulsor. Estime la relación de flujo volumétrico, el aumento de carga, la entrada de potencia y la eficiencia de la bomba en el punto de eficiencia máxima.

11.11 Utilice los datos del apéndice D para elegir puntos de las curvas de funcionamiento para una bomba Peerless de carcasa bipartida horizontal de tipo 4AE12 a 1750 y 3550 rpm nominales. Obtenga y grafique ajustes de curva para la carga total contra la entrega a cada velocidad para esta bomba.

11.12 Use los datos del apéndice D para elegir puntos de las curvas de funcionamiento para una bomba

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

Peerless de carcasa bipartida horizontal, tipo 10AE12, a 1150 y 1750 rpm nominales. Obtenga y grafique ajustes de curvas de la carga total contra la entrega para esta bomba.

11.13 Los datos de la prueba efectuada a una bomba Peerless tipo 1430, operada a 1750 rpm con un impulsor de 14.0 pulg de diámetro, son

Relación de flujo, Q (gpm)	270	420	610	720	1000
Carga total, H (pies)	198	195	178	165	123
Entrada de potencia, $\mathcal{P}$ (hp)	25	30	35	40	45

Dibuje las curvas de funcionamiento para esta bomba; incluya una curva de eficiencia contra relación de flujo volumétrico. Localice el punto de máxima eficiencia y especifique el valor nominal de la bomba en este punto.

11.14 Los datos de la prueba efectuada a una bomba Peerless tipo 1440, operada a 1750 rpm con un impulsor de 14.0 pulg de diámetro, son

Relación de flujo, Q (gpm)	290	440	550	790	920	1280
Carga total, H (pies)	204	203	200	187	175	135
Entrada de potencia, $\mathcal{P}$ (hp)	30	35	40	45	50	60

Dibuje las curvas de funcionamiento para esta bomba; incluya una curva de eficiencia contra la relación de flujo volumétrico. Localice el punto de máxima eficiencia y especifique el valor nominal de la bomba en este punto.

11.15 Los datos medidos durante las pruebas de una bomba centrífuga a 3500 rpm son

Parámetro	Sección de entrada (1)	Sección de salida (2)
Presión manométrica, p (kPa)	95.2	412
Elevación arriba de la referencia, z (m)	1.25	2.75
Velocidad promedio del flujo, $\bar{V}$ (m/s).	2.35	3.62

La relación de flujo es 11.5 m^3/hr y el momento de torsión aplicado al eje de la bomba es 3.68 N · m. Evalúe las cargas dinámicas totales en la entrada y la salida de la bomba, la entrada de potencia hidráulica al fluido y la eficiencia de la bomba. Especifique el tamaño del motor eléctrico necesario para accionar la bomba. Si la eficiencia del motor eléctrico es de 85 por ciento, calcule el requerimiento de potencia eléctrica.

11.16 El *kilogramo fuerza* (kgf), definido como la fuerza ejercida por un kilogramo masa en gravedad estándar, se emplea comúnmente en la práctica europea. El *caballo de potencia métrico* (hpm) se define como 1 hp ≡ 75 m · kgf/s. Desarrolle un factor de conversión que relacione el caballo de potencia métrico con el caballo de potencia estadounidense. Relacione la velocidad específica para una turbina hidráulica —calculada en unidades de rpm, caballos de potenica métricos y metros— con la velocidad específica calculada en unidades usuales de los E.U.

11.17 Una pequeña bomba centrífuga, cuando se prueba a $N = 2875$ rpm con agua, entrega $Q = 252$ gpm y $H = 138$ pies en su punto de máxima eficiencia ($\eta = 0.76$). Determine la velocidad específica de la bomba en esta condición de prueba. Bosqueje la forma del impulsor que usted esperaría. Calcule la entrada de potencia requerida para la bomba.

11.18 Se muestran curvas de funcionamiento típico para una bomba centrífuga, probada con tres diferentes diámetros de impulsor en una sola carcasa. Especifique la relación de flujo y la carga producida por la bomba en su punto de máxima eficiencia con un impulsor de 12 pulg de diámetro.

11.19

11.20

11.21

11.22

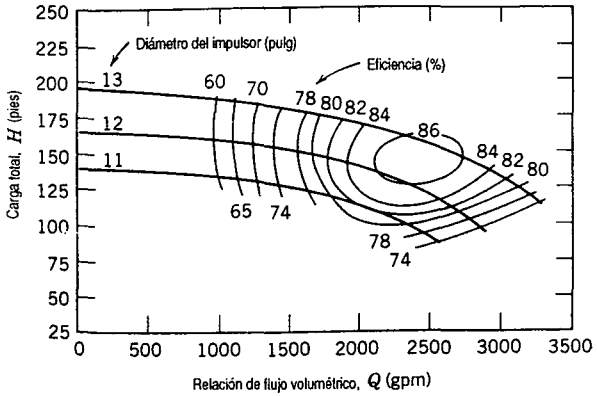
11.23

11.24

11.25

11.26

Escale estos datos para predecir el funcionamiento de esta bomba cuando se prueba con impulsores de 11 y 13 pulg. Comente acerca de la exactitud del procedimiento de escalamiento.



P11.18

11.19 En su punto de máxima eficiencia ($\eta = 0.82$), una bomba de flujo mixto, con $D = 500$ mm entrega $Q = 0.75$ m^3/s de agua a $H = 39$ m cuando opera a $N = 1170$ rpm. Calcule la velocidad específica de esta bomba. Evalúe la entrada de potencia requerida. Determine los parámetros del ajuste de la curva para la curva de funcionamiento de la bomba basados en el punto de válvula cerrada y en el punto de máxima eficiencia. Escale la curva de funcionamiento para estimar el flujo, la carga, la eficiencia y la entrada de potencia requeridos para operar la misma bomba a 860 rpm.

11.20 Un sistema de bombeo debe especificarse para una estación de elevación en una instalación de tratamiento de aguas de desecho. La relación de flujo promedio es de 30 millones de galones diarios y la elevación requerida es de 30 pies. Es necesario emplear impulsores abiertos; se espera una eficiencia cercana al 65 por ciento. Para lograr una instalación conveniente, se desean motores eléctricos de 50 hp o menos. Determine el número de unidades motor/bomba necesario y recomiende una velocidad de operación apropiada.

11.21 Una bomba centrífuga de agua opera a 1750 rpm; el impulsor tiene álabes curvados hacia atrás con $\beta_2 = 60°$ y $b_2 = 0.50$ pulg. A una relación de flujo de 350 gpm, la velocidad radial de salida es $V_{n_2} = 11.7$ pies/s. Estime la carga que esta bomba podría entregar a 1150 rpm.

11.22 El apéndice D contiene curvas de área limitada para la selección de modelos de bombas y curvas de funcionamiento para modelos de bomba individuales. Utilice estos datos para verificar las reglas de similitud en una bomba Peerless tipo 4AE12 operada a 1750 y 3550 rpm nominales.

11.23 Utilice los datos del apéndice D para verificar las reglas de similitud para el efecto de cambiar el diámetro del impulsor de una bomba Peerless tipo 10AE12 operada a 1150 rpm nominales. Verifique las reglas de similitud para el efecto de cambiar la velocidad para la misma bomba, utilizando los datos para 1150 y 1750 rpm nominales.

11.24 Considere la bomba centrífuga Peerless de carcasa horizontal bipartida tipo 16A18B (apéndice D). Emplee estos datos de funcionamiento para verificar las reglas de similitud correspondientes a *a*) el cambio en el diámetro del impulsor y *b*) velocidades de operación de 705 y 880 rpm (observe el cambio de escala entre las velocidades).

11.25 En el apéndice D se presentan las curvas de funcionamiento para bombas Peerless de carcasa horizontal bipartida. Desarrolle y grafique ajustes de curva para una bomba tipo 4AE12 accionada a 1750 y 3550 rpm nominales. Verifique los efectos de la velocidad de la bomba en las curvas de escalamiento de la misma, empleando el procedimiento descrito en el problema ejemplo 11.7.

11.26 El apéndice D contiene curvas de área limitada para la selección de modelos de bombas y las curvas de funcionamiento para modelos de bomba individuales. Use estos datos para verificar las reglas de similitud en una bomba Peerless tipo 10AE12, operada a 1150 y 1750 rpm nominales.

11.27 Las curvas de funcionamiento para las bombas Peerless de carcasa horizontal bipartida se presentan en el apéndice D. Desarrolle y grafique ajustes de curva para una bomba tipo 10AE12 accionada a 1150 y 1750 rpm nominales. Verifique los efectos de la velocidad de la bomba en las curvas de escalamiento de la misma, utilizando el procedimiento descrito en el problema ejemplo 11.7.

11.28 En el apéndice D se presentan las curvas de funcionamiento para las bombas Peerless de carcasa horizontal bipartida. Desarrolle y grafique ajustes de curvas para una bomba tipo 16A18B accionada a 705 y 880 rpm. Verifique los efectos de la velocidad de la bomba en las curvas de escalamiento de la misma, utilizando el procedimiento descrito en el problema ejemplo 11.7.

11.29 Una bomba centrífuga se va a operar a $Q = 250$ cfs, $H = 400$ pies y $N = 870$ rpm. Se planea una prueba de modelo en una instalación donde la máxima relación de flujo es 5 cfs, disponiéndose de un dinamómetro de 300 hp. Asuma que las eficiencias del modelo y del prototipo son comparables. Determine la velocidad de prueba del modelo y la relación de escala apropiadas.

11.30 Los datos de catálogo para una bomba de agua centrífuga, a las condiciones de diseño, son $Q = 250$ gpm y $\Delta p = 18.6$ psi a 1750 rpm. Un canal de laboratorio requiere 200 gpm a 32 pies de carga. El único motor disponible desarrolla 3 hp a 1750 rpm. ¿Este motor es adecuado para el canal de laboratorio? ¿Cómo podría mejorarse el acoplamiento bomba/motor?

11.31 Una turbina de reacción se diseña para producir 25 000 hp a 90 rpm bajo una carga de 150 pies. Se disponen instalaciones de laboratorio para brindar 25 pies de carga y absorber 50 hp del modelo de turbina. Suponga eficiencias comparables para las turbinas modelo y prototipo. Determine la velocidad de prueba del modelo, la relación de escala y la relación de flujo volumétrico apropiadas.

11.32 White [41] propone modelar la eficiencia de una bomba centrífuga empleando el ajuste de curva, $\eta = aQ - bQ^3$, donde a y b son constantes. Describa un procedimiento para evaluar a y b a partir de datos experimentales. Evalúe a y b utilizando los datos para la bomba Peerless tipo 10AE12 a 1750 rpm (apéndice D). Grafique e ilustre la exactitud del ajuste de curva comparando las eficiencias medida y predicha para esta bomba.

11.33 Algunas veces la variación de la viscosidad del agua con respecto a la temperatura puede utilizarse para alcanzar la similitud dinámica. Una bomba modelo entrega 1.25 L/s de agua a 15 C contra una carga de 18.6 m cuando opera a 3500 rpm. Determine la temperatura del agua que debe usarse para obtener una operación dinámicamente similar a 1750 rpm. Estime la relación de flujo volumétrico y la carga producidas por la bomba en la condición de prueba de velocidad más baja. Comente acerca de los requerimientos de *NPSH* para las dos pruebas.

11.34 Una bomba de alimentación de caldera de cuatro pasos tiene líneas de succión y descarga de 4 pulg y 3 pulg de diámetro interior. A 3500 rpm, la bomba se especifica a 400 gpm contra una carga de 400 pies, mientras recibe agua a 240 F. El manómetro de presión de entrada, localizado a 1.5 pies debajo de la línea central del impulsor, indica 21.5 psig. La bomba se va a certificar en fábrica mediante pruebas a la misma relación de flujo, aumento de carga y velocidad, pero utilizando agua a 80 F. Calcule la *NPSHD* a la entrada de la bomba en la instalación de campo. Evalúe la carga de succión que debe emplearse en la prueba de fábrica para duplicar las condiciones de succión en campo.

11.35 Los datos de prueba de una bomba Peerless de succión al extremo tipo 1430, operada a 1750 rpm y con un impulsor de 14.0 pulg de diámetro, son

Relación de flujo, Q (gpm)	200	400	600	800	1000
Carga neta de succión positiva requerida, *NPSHR* (pies)	7.8	9.8	13.6	19.2	28.7

Desarrolle y grafique una ecuación de ajuste de curva para la *NPSHR* contra la relación de flujo volumétrico en la forma, $NPSHR = a + bQ^2$, donde a y b son constantes. Compare los resultados con los datos medidos.

11.36

‡**11.37**

‡**11.38**

‡**11.39**

‡**11.40**

‡**11.41**

‡ Tal vez us
obeliscos.

11.36 Los datos de prueba de una bomba Peerless de succión al extremo tipo 1440, operada a 1750 rpm, con un impulsor de 14.0 pulg de diámetro, son

Relación de flujo, Q(gpm)	200	400	600	800	1000	1200	1300
Carga neta de succión positiva requerida, *NPSHR* (pies)	5.5	6.3	8.5	11.3	15.8	22.0	27.0

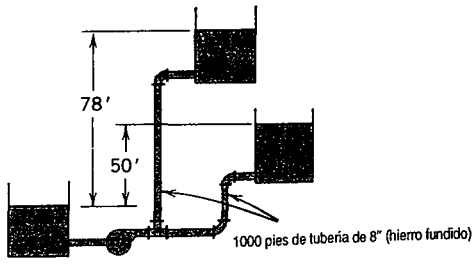
Desarrolle y grafique una ecuación de ajuste de curva para la *NPSHR* contra la relación de flujo volumétrico en la forma, $NPSHR = a + bQ^2$, donde a y b son constantes. Compare los resultados con los datos medidos.

‡**11.37** La carga neta de succión positiva requerida (*NPSHR*) por una bomba puede expresarse aproximadamente como una función parabólica de la relación de flujo volumétrico. La *NPSHR* para una bomba particular que opera a 1750 rpm en agua fría está dada como $H_r = H_0 + AQ^2$, donde $H_0 =$ 10 pies de agua y $A = 4.1 \times 10^{-5}$ pies/(gpm)^2. Suponga que el sistema de tuberías que alimenta la succión de la bomba consta de un depósito, cuya superficie se encuentra 20 pies arriba de la línea central de la bomba, una entrada cuadrada, 20 pies de tubería de 6 pulg de hierro fundido y un codo de 90°. Calcule la relación de flujo volumétrico máxima a la cual la carga de succión es suficiente para operar esta bomba en agua fría sin cavitación. Repita este cálculo para agua caliente a diferentes temperaturas y grafique contra la temperatura del agua. (Asegúrese de considerar la variación de la densidad a medida que aumenta la temperatura del agua.)

‡**11.38** Una bomba eleva agua entre dos depósitos conectados mediante 20 pies de 4 pulg y 200 pies de 3 pulg de tubería de hierro fundido en serie. La elevación por gravedad es de 10 pies. Calcule y grafique la curva de carga del sistema. Estime el requerimiento de carga, la potencia necesaria y el costo anual de energía eléctrica para bombear agua a 150 gpm hasta el depósito más alto.

‡**11.39** Una bomba centrífuga está instalada en un sistema de tuberías con $L = 1000$ pies de tubería de hierro fundido de $D = 16$ pulg. La superficie del depósito aguas abajo está a 50 pies más abajo del depósito aguas arriba. Determine y grafique la curva de carga del sistema. Encuentre la relación de flujo volumétrico (magnitud y dirección) a través del sistema cuando la bomba no está operando. Estime la pérdida por fricción, el requerimiento de potencia y el costo de energía anual para bombear agua a 14,600 gpm a través de este sistema.

‡**11.40** Se muestra un sistema de bombeo con dos diferentes elevaciones estáticas. Cada depósito es alimentado por una línea compuesta de 1000 pies de tubería de hierro fundido de 8 pulg. Evalúe y grafique la curva de carga contra flujo del sistema. Explique qué sucede cuando la carga de la bomba es menor que la altura del depósito superior. Calcule la relación de flujo entregada a una carga de bomba de 88 pies.



P11.40

‡**11.41** Una bomba transfiere agua de un depósito a otro a través de dos tuberías de hierro fundido en serie. La primera tiene 1500 pies de largo y 10 pulg de diámetro y la segunda, 500 pies y 6 pulg. Se deriva una relación de flujo constante de 300 gpm en la unión entre las dos tuberías. Obtenga y grafique

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

la curva de carga contra la relación de flujo del sistema. Encuentre la entrega si el sistema es alimentado por la bomba de la figura 11.18, operando a 1750 rpm.

‡**11.42** Los datos de desempeño para una bomba son

H (pie)	148	140	130	115	100	75	50
Q (gpm)	0	800	1200	1600	2000	2400	2800

Estime la entrega cuando la bomba se emplea para mover agua entre dos depósitos abiertos, a través de 1200 pies de tubería de acero comercial de 12 pulg que contiene dos codos de 90° y una válvula de compuerta abierta, si el aumento en la elevación es 50 pies. Determine el coeficiente de pérdida de la válvula de compuerta necesario para reducir la relación de flujo volumétrico a la mitad.

‡**11.43** Considere otra vez la bomba y el sistema de tuberías del problema 11.42. Determine la relación de flujo volumétrico y el coeficiente de pérdida de la válvula de compuerta para el caso de dos bombas idénticas instaladas en *paralelo*.

‡**11.44** Considere otra vez la bomba y el sistema de tuberías del problema 11.42. Determine la relación de flujo volumétrico y el coeficiente de pérdida de la válvula de compuerta para el caso de dos bombas idénticas instaladas en *serie*.

‡**11.45** La resistencia de cierta tubería aumenta con el envejecimiento cuando se forman depósitos, incrementando la rugosidad y reduciendo el diámetro (véase la figura 8.16). Multiplicadores típicos que se van a aplicar al factor de fricción se presentan en [16]:

Años de servicio de la tubería	Tuberías pequeñas, 4-10 pulg	Tuberías grandes 12-60 pulg
Nuevo	1.00	1.00
10	2.20	1.60
20	5.00	2.00
30	7.25	2.20
40	8.75	2.40
50	9.60	2.86
60	10.0	3.70
70	10.1	4.70

Considere de nuevo la bomba y el sistema de tuberías del problema 11.42. Estime las reducciones porcentuales en la relación de flujo volumétrico que ocurren después de *a*) 20 años y *b*) 40 años de uso, si las características de la bomba permanecen constantes. Repita el cálculo si la carga de la bomba se reduce 10 por ciento después de 20 años de uso y 25 por ciento luego de 40 años.

‡**11.46** Considere de nuevo la bomba y el sistema de tuberías del problema 11.43. Estime las reducciones porcentuales en la relación de flujo volumétrico que ocurren después de *a*) 20 años y *b*) 40 años de uso, si las características de la bomba permanecen constantes. Repita el cálculo si la carga de la bomba se reduce 10 por ciento después de 20 años de uso y 25 por ciento luego de 40 años. (Emplee los datos del problema 11.45 para el aumento en el factor de fricción de la tubería con el envejecimiento.)

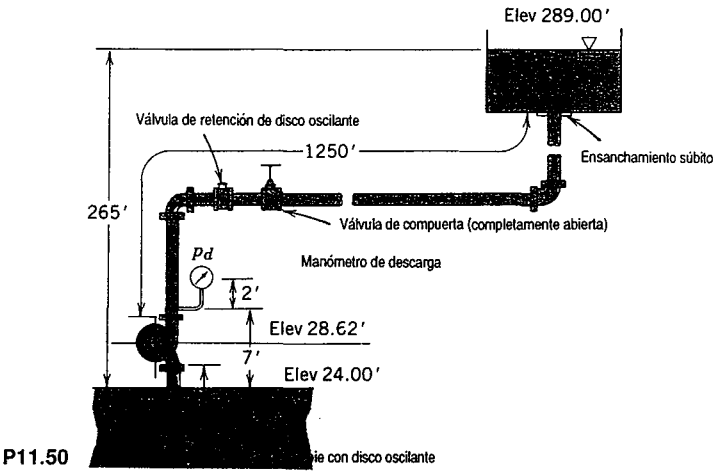
‡**11.47** Considere de nuevo la bomba y el sistema de tuberías del problema 11.44. Estime las reducciones porcentuales en la relación de flujo volumétrico que ocurren después de *a*) 20 años y *b*) 40 años de uso, si las características de la bomba permanecen constantes. Repita el cálculo si la carga de la bomba se reduce 10 por ciento después de 20 años de uso y 25 por ciento luego de 40 años. (Emplee los datos del problema 11.45 para el aumento en el factor de fricción de la tubería con el envejecimiento.)

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

11.48 Parte del suministro de agua para la Orilla Sur del Parque Nacional del Gran Cañón en los Estados Unidos se toma del Río Colorado [42]. Una relación de flujo de 600 gpm, tomada del río a una elevación de 3734 pies, se bombea a un tanque de almacenamiento en la cumbre de la Orilla Sur a 7022 pies de elevación. Parte del conducto se encuentra sobre el suelo y parte está en un hoyo perforado direccionalmente a ángulos hasta de 70° de la vertical; la longitud total de la tubería es de aproximadamente 13 200 pies. En condiciones de operación de flujo estable, la pérdida de carga debida a la fricción es de 290 pies de agua además de la elevación estática. Estime el diámetro de la tubería de acero comercial en el sistema. Calcule el requerimiento de potencia de bombeo si la eficiencia de la bomba es de 61 por ciento. Analice la relación entre los cambios del diámetro del impulsor y el número de pasos de bombeo para una operación a 3500 rpm.

‡11.49 La ciudad de Englewood, Colorado, toma agua para uso municipal del South Platte River a una elevación de 5280 pies [42]. El agua se bombea a depósitos de almacenamiento a 5310 pies de elevación. El diámetro interior de los conductos de acero es de 27 pulg; su longitud es de 5800 pies. La instalación se diseñó para una capacidad inicial (relación de flujo) de 31 cfs y una capacidad final de 38 cfs. Calcule y grafique la curva de resistencia del sistema. Especifique un sistema de bombeo apropiado. Estime la potencia de bombeo requerida para operación en estado estable, tanto a la relación de flujo inicial como a la final.

11.50 Una bomba en el sistema mostrado extrae agua de un sumidero y la entrega a un tanque abierto a través de 1250 pies de tubería nueva, de acero grado 40, de 4 pulg de diámetro nominal. La tubería de succión vertical tiene 5 pies de largo e incluye una válvula de pie con disco de articulación y un codo estándar de 90°. La línea de descarga incluye dos codos estándar de 90°, una válvula de verificación de elevación de ángulo y una válvula de compuerta completamente abierta. La relación de flujo de diseño es de 200 gpm. Encuentre las pérdidas de carga en las líneas de succión y de descarga. Calcule la *NPSHD*. Seleccione una bomba apropiada para esta aplicación.



P11.50

‡11.51 Considere el sistema de flujo y los datos del problema 11.50, así como los datos para el envejecimiento de tubería dados en el problema 11.45. Seleccione la(s) bomba(s) que mantendrá(n) el flujo del sistema a la relación deseada durante *a)* 10 años y *b)* 20 años. Compare la entrega con estas bombas y la entrega con la bomba especificada sólo para tuberías nuevas.

‡11.52 Considere el sistema de flujo mostrado en el problema 8.69. Evalúe la *NPSHD* a la entrada de la bomba. Elija una bomba apropiada para esta aplicación. Utilice los datos de envejecimiento de

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

tuberías del problema 11.45 para estimar la reducción en la relación de flujo después de 10 años de operación.

‡**11.53** Considere el sistema de flujo mostrado en el problema 8.89. Suponga que la *NPSHR* mínima a la entrada de la bomba es 4.5 m de agua. Elija una bomba apropiada para esta operación. Emplee los datos para el aumento en el factor de fricción con el envejecimiento de la tubería dados en el problema 11.45, para determinar y comparar la relación de flujo del sistema después de 10 años de operación.

‡**11.54** Considere el sistema de flujo mostrado en el problema 8.95. Seleccione una bomba apropiada para esta aplicación. Verifique la *NPSHR* contra la *NPSHD* para este sistema.

‡**11.55** Considere el sistema de flujo que se muestra en el problema 8.100. Seleccione una bomba apropiada para esta aplicación. Verifique la eficiencia y el requerimiento de potencia de la bomba comparados con los que se indican en el enunciado del problema.

‡**11.56** Considere el sistema de circulación de agua fría del problema 8.101. Elija bombas que puedan combinarse en paralelo para suministrar el requerimiento total de flujo. Calcule la potencia requerida para tres bombas en paralelo. Calcule también las relaciones de flujo volumétrico y la potencia requerida cuando sólo una o dos de estas bombas operan.

‡**11.57** Considere el flujo del ducto de gasolina del problema 8.106. Seleccione las bombas que, combinadas en paralelo, satisfagan el requerimiento del flujo total. Calcule la potencia requerida por cuatro bombas en paralelo. Calcule también las relaciones de flujo volumétrico y la potencia necesaria cuando sólo una, dos o tres de estas bombas operen.

11.58 Considere la red de tuberías del problema 8.129. Suponga que el sistema se va a alimentar por medio de una pequeña bomba accionada por un motor diesel. Especifique una bomba, diámetro del impulsor y velocidad de operación adecuados para esta aplicación. Si el consumo de combustible específico de frenado óptimo (CCEF) del motor es 0.38 lbm/hp · hr entre 1500 y 1700 rpm, estime la cantidad de combustible diesel consumida durante cada periodo de 24 horas.

11.59 Considere la red de tuberías del problema 8.130. Seleccione una bomba adecuada para entregar una relación de flujo total de 300 gpm a través de la red de tuberías.

‡**11.60** Los datos del fabricante de una bomba para instalaciones sumergibles ("Little Giant Water Wizard") son

Altura de la descarga	1	2	5	10	15	20	26.3
Relación de flujo del agua (gpm)	20.4	20	190	16	13	8	0

El manual del usuario además establece, "Nota: Estos valores nominales se basan en la descarga en tubería de 1 pulg ignorando las pérdidas de fricción. Empleando un adaptador de manguera de jardín de 3/4 de pulg, el desempeño se reducirá aproximadamente 15 por ciento." Grafique una curva de funcionamiento para la bomba. Desarrolle una ecuación de ajuste de curva para la curva de funcionamiento; muestre la curva de funcionamiento sobre la gráfica. Calcule y grafique la entrega de la bomba contra la altura de descarga a través de 50 pies de manguera de jardín lisa de 3/4 de pulg. Compare con la curva para la entrega en tubería de 1 pulg.

11.61 Considere la manguera y tobera contra incendios del problema 8.115. Analice la selección de la bomba para este sistema. ¿Una derivación para incrementar el flujo a través de la bomba mejoraría la operación de este sistema? Especifique una bomba y un diámetro de impulsor apropiados para esta aplicación. Calcule la entrada de potencia a la bomba. Estime la potencia entregada a la manguera y la potencia disipada en la derivación.

11.62 Considere el sistema de filtrado de alberca del problema 8.131. Suponga que la tubería utilizada es de PVC nominal (plástico liso) de 3/4 de pulg. Especifique la velocidad y el diámetro del impulsor y estime la eficiencia de una bomba apropiada.

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

11.63 De acuerdo con Stepanoff [43], una bomba de alimentación de caldera de 6 pulg, que opera a 3500 rpm, entregó 2200 gpm a una carga total de 6900 pies, mientras absorbía 4700 hp. Las condiciones de entrada fueron $p_1 = 132.7$ psia, $T_1 = 331$ F y $NPSH = 72$ pies. Estime el número de las etapas de bombeo requeridas para esta aplicación. Estime la velocidad específica por etapas y la eficiencia total para esta bomba.

11.64 Una bomba centrífuga con curva característica dada por $H_p = H_0 - AQ^2$, alimenta un sistema con pérdida friccionante pura, $H_s = CQ^2$. Obtenga expresiones generales para la relación de flujo del punto de operación, Q_1, con una sola bomba. Investigue los efectos de combinar *a*) n bombas en serie y *b*) n en paralelo. Exprese las relaciones de flujo del punto de operación, Q_n, como razones respecto a Q_1. Grafique en forma adimensional e interprete los resultados.

11.65 Considere el sistema de ventilador y ducto del problema 8.120. Especifique un ventilador apropiado para este sistema. Estime la eficiencia real del ventilador y el requerimiento de potencia de entrada.

11.66 Los datos de funcionamiento para un ventilador centrífugo Buffalo Forge tipo BL de 36.5 pulg de diámetro, probado a 600 rpm, son

Relación de flujo volumétrico, Q (cfm)	6000	8000	10 000	12 000	14 000	16 000
Aumento de presión estática, Δp (pulg de H_2O)	2.10	2.00	1.76	1.37	0.92	0.42
Entrada de potencia, $\mathcal{P}$ (hp)	2.75	3.18	3.48	3.51	3.50	3.22

Grafique los datos de funcionamiento contra la relación de flujo volumétrico. Calcule la eficiencia estática y muestre la curva sobre la gráfica. Encuentre el punto de máxima eficiencia y especifique la capacidad nominal del ventilador en este punto.

11.67 Considere el ventilador y los datos de funcionamiento del problema 11.66. A $Q = 12{,}000$ cfm, la presión dinámica es equivalente a 0.16 pulg de agua. Evalúe el área de salida del ventilador. Grafique el aumento de presión total y los caballos de potencia de entrada para este ventilador contra la relación de flujo volumétrico. Calcule la eficiencia total del ventilador y muestre la curva sobre la gráfica. Determine el punto de máxima eficiencia y especifique la capacidad nominal del ventilador en este punto.

11.68 Los datos de funcionamiento del problema 11.66 son para una rueda de ventilador de 36.5 pulg de diámetro. Este ventilador se fabrica también con ruedas de 40.3, 44.5, 49.0 y 54.3 pulg de diámetro. Escoja un ventilador estándar para entregar 30 000 cfm contra un aumento de presión estática de 5 pulg de H_2O. Suponga aire estándar a la entrada del ventilador. Determine la velocidad del ventilador requerida y la potencia de entrada necesaria.

11.69 En unidades usuales de los E.U., la velocidad específica para ventiladores está dada por

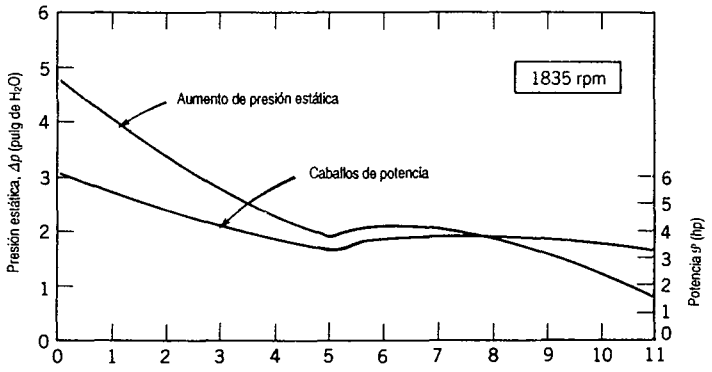
$$N_s = \frac{N\,(\text{rpm})[Q\,(\text{cfm})]^{1/2}}{[\Delta p\,(\text{pulg de } H_2O)]^{3/4}}$$

Evalúe y grafique la velocidad específica contra la relación de flujo volumétrico para los datos del ventilador del problema 11.66. Utilice el concepto de velocidad específica para determinar el mejor tamaño de ventilador y la velocidad del motor para la aplicación del problema 11.68. Use velocidades de motor estándar (fracciones de las 3550 rpm nominales).

‡11.70 Las características de funcionamiento de un ventilador de flujo axial Buffalo Forge se presentan a continuación. El ventilador se utiliza para accionar un túnel de viento con una sección de prueba de 1 pie^2. El túnel consta de una contracción de entrada lisa, dos pantallas (cada una con coeficiente de pérdida $K = 0.12$), la sección de prueba y un difusor donde la sección transversal se expande a 24 pulg de diámetro en la entrada del ventilador. El flujo proveniente del ventilador se descarga de regreso al cuarto. Calcule y grafique la curva característica del sistema de la pérdida de presión

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

contra la relación de flujo volumétrico. Estime la máxima velocidad del flujo de aire disponible en esta sección de prueba del túnel de viento.



P11.70

‡**11.71** Considere de nuevo el ventilador de flujo axial y el túnel de viento del problema 11.70. Escale el funcionamiento del ventilador cuando éste varía con la velocidad de operación. Desarrolle y grafique una "curva de calibración" que muestre la velocidad de flujo de la sección de prueba (en m/s) contra la velocidad del ventilador (en rpm).

11.72 A continuación se presentan los datos experimentales para la bomba de combustible del motor de un avión. Esta bomba de engranes se requiere para alimentar combustible (para aviones de reacción) a 450 libras por hora y 150 psig al controlador de combustible del motor. Se efectuaron pruebas a 10, 96 y 100 por ciento de la velocidad nominal de la bomba de 4536 rpm. A cada velocidad constante, se ajustó la contrapresión sobre la bomba y se midió la relación de flujo. Grafique curvas de la presión contra el caudal a las tres velocidades constantes. Estime el volumen de desplazamiento de la bomba por revolución. Calcule la eficiencia volumétrica en cada punto de prueba y dibuje los contornos de η_v constante. Evalúe la pérdida de energía debida al estrangulamiento de la válvula a la velocidad del 100 por ciento y la entrega máxima al motor.

Velocidad de la bomba (rpm)	Contrapresión (psig)	Flujo de combustible (lbh*)	Velocidad de la bomba (rpm)	Contrapresión (psig)	Flujo de combustible (lbh*)	Velocidad de la bomba (rpm)	Contrapresión (psig)	Flujo de combustible (lbh*)
	200	1810		200	1730		200	89
4536	300	1810	4355	300	1750	453	250	53
(100%)	400	1810	(96%)	400	1735	(10%)	300	58.5
	500	1790		500	1720		350	45
	900	1720		900	1635		400	30

* Relación de flujo de combustible medida en libras por hora (lbh)

11.73 Considere la bomba y el sistema hidráulicos del problema 8.122. Suponga que la bomba de desplazamiento fijo opera a 3550 rpm, tiene una presión máxima de 3200 psig y que la pendiente de la curva característica de la bomba es similar a la de la figura 11.36. Determine el mínimo desplazamiento de la bomba necesario para entregar la relación de flujo requerida. Estime la entrada de potencia, la potencia entregada al fluido y la potencia entregada a la carga.

11.74 Un bote de aire en The Florida Everglades (región pantanosa en la Florida) se impulsa por medio

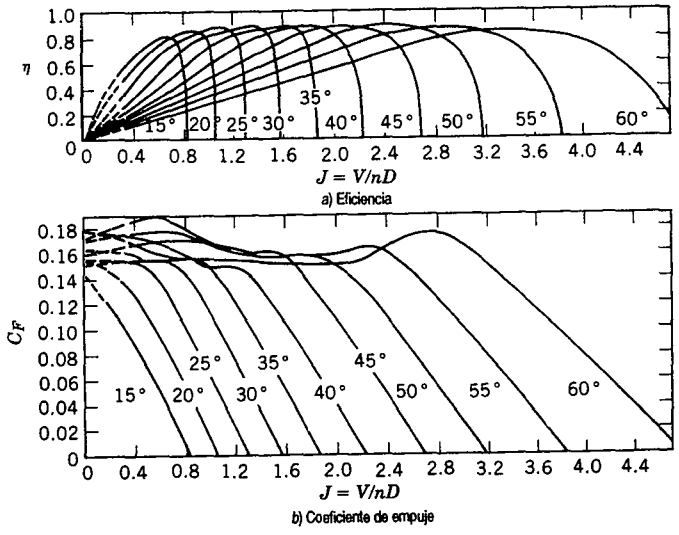
‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

de una hélice, con $D = 6$ pies, accionada a máxima velocidad, $N = 1800$ rpm, mediante un motor de 60 hp. Estime el empuje máximo producido por la hélice a *a*) reposo y *b*) $V = 30$ mph.

11.75 Datos de arrastre para fragatas de misiles guiados modelo y prototipo se presentan en las figuras 7.1 y 7.2. Las dimensiones de la nave prototipo se dan en el problema 9.87. Emplee estos datos, con la característica de funcionamiento de la hélice de la figura 11.40, para dimensionar una sola hélice que accione la nave a escala natural. Calcule el tamaño de la hélice, la velocidad de operación y la entrada de potencia, si la hélice opera a una eficiencia máxima cuando la nave viaja a su velocidad máxima. $V = 37.6$ nudos.

11.76 La hélice para el avión Gossamer Condor accionada por el piloto tiene $D = 12$ pies y rota a $N = 107$ rpm. Detalles adicionales del avión se brindan en el problema 9.156. Estime las características de funcionamiento y eficiencia adimensionales de esta hélice en condiciones de vuelo. (Véase la referencia 44 para mayor información acerca de vuelos accionados por el piloto.)

‡**11.77** Una hélice de *inclinación variable* —equipada con un mecanismo para cambiar los ángulos de las aspas— puede controlarse en vuelo para operar el motor a velocidad constante (para máxima potencia o mínimo consumo de combustible). Las características de una hélice de inclinación variable NACA 5868-9 se presentan en la figura P11.77; los números sobre cada curva se refieren a los ángulos del aspa a $0.75R$. Considere un avión equipado con esta hélice, con $D = 15$ pies, para mantener constante su velocidad de 1200 rpm. Suponga que el motor entrega 2400 caballos de potencia de eje. Calcule y grafique los caballos de potencia de empuje y el ángulo de aspa contra la velocidad de vuelo para el rango $0 < V < 500$ mph.



P11.77

11.78 Las ecuaciones para el empuje, la potencia y la eficiencia de dispositivos de propulsión se obtuvieron en la sección 11-5.1d. Muestre que estas ecuaciones pueden combinarse para la condición de empuje constante a fin de obtener

$$\eta = \frac{2}{1 + \left(1 + \dfrac{F_T}{\dfrac{\rho V^2}{2}\dfrac{\pi D^2}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Interprete este resultado físicamente.

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

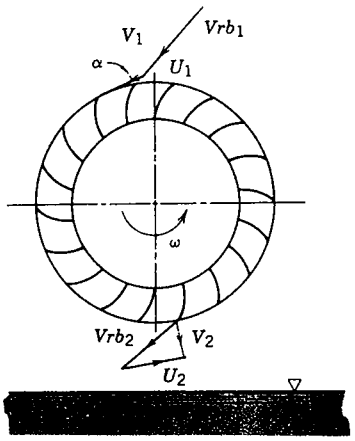
11.79 Los cálculos preliminares para un sitio de generación de potencia hidroeléctrica muestran que se dispone de una carga neta de 2350 pies a una relación de flujo de agua de 75 pies^3/s. Compare la geometría y la eficiencia de ruedas de Pelton diseñadas para operar a *a*) 450 rpm y *b*) 600 rpm.

11.80 Las condiciones a la entrada de la tobera de una rueda de Pelton son $p = 4.81$ MPa (manométrica) y $V = 6.10$ m/s. El diámetro del chorro es $d = 2$ mm y el coeficiente de pérdida de la tobera es $K_{\text{tobera}} = 0.04$. El diámetro de la rueda es $D = 2.45$ m. En esta condición de operación, $\eta = 0.86$. Calcule *a*) la salida de potencia, *b*) la velocidad de operación normal, *c*) la velocidad de embalamiento aproximada, *d*) el momento de torsión a velocidad de operación normal y *e*) el momento de torsión aproximado a velocidad cero.

11.81 Las turbinas de reacción en las Cataratas del Niágara son del tipo Francis. El diámetro exterior del impulsor es de 176 pulg. Cada turbina produce 72 500 hp a 107 rpm, con 93.8 por ciento de eficiencia bajo una carga neta de 214 pies. Calcule la velocidad específica de estas unidades. Evalúe la relación de flujo volumétrico hacia cada turbina. Estime el tamaño del tubo de carga, si tiene 1300 pies de largo y la carga neta es 85 por ciento de la carga bruta.

11.82 La turbina hidráulica de flujo cruzado (Banki) ilustrada abajo es sencilla de construir porque la curva de los álabes es sólo en una dirección, no se requiere carcasa y el área de la tobera rectangular puede controlarse fácilmente. Shepherd [45] señala los resultados de una prueba de modelo de una turbina Banki en su punto de máxima eficiencia como

$Q = 3$ cfs
$H = 16$ pies
$N = 263$ rpm
$D_o = 13$ pulg
$D_i = 8.56$ pulg
$L = 12$ pulg
$\mathcal{P} = 2.75$ hp (máximo)



P11.82

Calcule la velocidad específica para esta condición de operación y compare con las velocidades específicas óptimas de otras turbinas hidráulicas. Evalúe la eficiencia en esta condición.

11.83 La figura 11.11 contiene datos para la eficiencia de una gran rueda de agua de Pelton instalada en la casa de máquinas Tiger Creek de la compañía Pacific Gas & Electric cerca de Jackson, California. Esta unidad tiene una capacidad nominal de 36 000 hp cuando opera a 225 rpm bajo una carga neta de 1190 pies de agua. Suponga ángulos de flujo y coeficiente de pérdida de la tobera razonables. Determine el diámetro del rotor y estime el diámetro del chorro. Calcule la relación a la cual se consume el agua durante la operación a plena carga.

11.84 Datos medidos para el funcionamiento de las turbinas de reacción en la presa Shasta cerca de Redding, California, se muestran en la figura 11.3. Cada turbina tiene una capacidad nominal de 103 000 hp cuando operan a 138.6 rpm bajo una carga neta de 380 pies. Evalúe la velocidad específica y calcule el momento de torsión del eje desarrollado por cada turbina en condiciones de operación nominales. Calcule y grafique la relación de flujo de agua por turbina, requerida para producir la potencia de salida nominal como una función de la carga.

11.85

11.86

11.87

11.88

11.89

‡**11.90**

11.91

‡ Tal v
obelisc

11.85 Una rueda Pelton típica, con un diámetro de paso de 3.6 m, se va a instalar en un lugar donde se suministra un solo chorro a una carga neta de 490 m. Calcule y grafique la potencia de salida esperada de la turbina como una función del diámetro del chorro entre 0.1 y 0.5 m. Determine la mejor velocidad de operación para la rueda bajo estas condiciones de operación. Calcule el momento de torsión entregado al eje para un chorro de 0.2 m de diámetro.

11.86 Una turbina de impulso va a generar 20 000 hp a partir de una sola rueda en un sitio donde la carga neta es de 1120 pies. Determine la velocidad, el diámetro de la rueda y el diámetro del chorro apropiados para la operación de un solo y de múltiples chorros. Compare con una instalación de doble rueda colgada. Estime el consumo de agua requerido.

11.87 Las pruebas de una turbina modelo de impulso bajo una carga neta de 65.5 pies dieron los siguientes resultados:

Velocidad de la rueda (rpm)	Descarga sin carga (cfs)	Lectura de la escala de frenado neta (lbf) (R = 5.25 pies)					
275	0.110	6.8	14.9	22.0	28.9	40.0	48.0
300	0.125	5.9	12.9	19.8	25.5	36.0	43.8
Descarga (cfs)		0.397	0.773	1.114	1.414	1.896	2.315

Calcule y grafique la salida de potencia y eficiencia de la máquina contra la relación de flujo de agua.

11.88 Las unidades 19, 20 y 21 de turbinas Francis instaladas en la presa Grand Coulee en el río Columbia, son *muy* grandes [46]. Cada rotor tiene 32.6 pies de diámetro y contiene 550 toneladas de acero fundido. En condiciones nominales, cada turbina genera 820,000 hp a 72 rpm bajo 285 pies de carga. La eficiencia es casi 95 por ciento en las condiciones nominales. Las turbinas operan a cargas de 220 a 355 pies. Calcule la velocidad específica en las condiciones nominales de operación. Estime la relación máxima de flujo de agua a través de cada turbina.

11.89 En unidades inglesas, la definición común de velocidad específica para una turbina hidráulica es

$$N_s = \frac{N\,(\text{rpm})[\mathcal{P}\,(\text{hp})]^{1/2}}{[h\,(\text{pies})]^{5/4}}$$

Desarrolle un factor de conversión entre esta definición y una verdaderamente adimensional en unidades del SI. Evalúe la velocidad específica de una turbina de impulso, operando a 400 rpm bajo una carga neta de 1190 pies con 86 por ciento de eficiencia, cuando se alimenta por medio de un solo chorro de 6 pulg de diámetro. Emplee tanto unidades inglesas como del SI. Estime el diámetro de la rueda.

‡11.90 Una pequeña turbina hidráulica de impulso se alimenta con agua a través de un canal de carga hecho de tubería rugosa comercial con diámetro D y longitud L. La diferencia de elevación entre la superficie del depósito y la línea central de la tobera es H. El coeficiente de pérdida de carga de la tobera es K_{tobera} y el coeficiente de pérdida del depósito a la entrada del canal de carga es K_{entrada}. Elabore un programa de computadora interactivo para calcular y tabular la velocidad del chorro de agua, la relación de flujo volumétrico y la potencia hidráulica del chorro, para cualquier valor de entrada del diámetro del mismo, d. Emplee el programa para encontrar el diámetro óptimo del chorro y su potencia hidráulica resultante, para el caso en que H = 300 pies, L = 1000 pies, D = 6 pulg, $K_{\text{entrada}} = 0.5$ y $K_{\text{tobera}} = 0.04$, si la tubería está hecha de acero soldado. Investigue los efectos de la variación de los coeficientes de pérdida y de rugosidad de la tubería.

11.91 El problema 15.17 de la referencia 8 describe una prueba de laboratorio de una rueda de Pelton de

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

24 pulg bajo una carga de 65.5 pies. A 275 rpm, la carga de frenado fue de 40 lbf, aplicada a un radio de 5.25 pies. La descarga fue de 1.90 pies^3/s. A esta velocidad, la fricción de cojinete y las pérdidas por resistencia aerodinámica totalizaron 0.21 hp. Reduzca estos datos para obtener la salida de potencia neta, la eficiencia de la turbina y la velocidad específica. Exprese las pérdidas mecánicas como una fracción de la potencia de salida y calcule la eficiencia mecánica. Estime la eficiencia hidráulica de esta máquina (suponga $C_v = 0.98$ para la tobera, es decir, $V_n = 0.98$ de la velocidad teórica si se despreciara la fricción).

‡11.92 Elabore un conjunto de diagramas de diseño para una turbina de impulso de una sola tobera. En coordenadas log-log, grafique la salida de potencia contra la carga neta. Dibuje líneas que correspondan a varios números de polos del generador (velocidades de rotación).

11.93 Se van a elegir dos o más turbinas hidráulicas idénticas en un sitio donde la carga neta es 110 m y la relación de flujo de agua disponible es de 17.0 m^3/s. Si la estimación inicial de la eficiencia de la turbina es 90 por ciento, analice las posibles elecciones de turbina.

11.94 De acuerdo con un vocero de la compañía Pacific Gas & Electric, la planta Tiger Creek, localizada al este de Jackson, California, es una de la 71 plantas hidroeléctricas de la PG&E. La planta tiene 1219 pies de carga bruta, consume 750 cfs de agua, tiene una capacidad nominal de 60 MW y opera a 58 MW. Se le exige a la planta producir 968 kW · hr/acre · pies de agua y 336.4×10^6 kW · hr/año de operación. Estime la carga neta en el sitio, la velocidad específica de la turbina y su eficiencia. Comente acerca de la consistencia interna de estos datos.

‡11.95 Elabore un programa de computadora interactivo para diseñar la instalación de una turbina de impulso. Suponga que los datos de entrada dados son la carga neta disponible y la salida de potencia deseada. Establezca el programa para elegir el número óptimo de polos del generador (velocidad de operación de la turbina) con interacción del usuario. Después de que el usuario alcance un diseño satisfactorio, haga que el programa calcule el diámetro de rotor de la turbina, el diámetro de la tobera y el consumo de agua requeridos.

11.96 La National Aeronautics & Space Administration (NASA) y el Department of Energy (DOE) de los E.U.A. copatrocinan un gran aerogenerador de demostración en Plum Brook, cerca de Sandusky, Ohio [47]. La turbina tiene dos álabes, con $D = 38$ m, y entrega la potencia máxima cuando la velocidad del viento es mayor que $V = 29$ km/hr. Se diseñó para producir 100 kW con eficiencia del sistema motriz de 0.75. El rotor está diseñado para operar a una velocidad constante de 40 rpm en vientos mayores a 6 mph y es controlado mediante la carga y ajustando los ángulos de los álabes. Para la condición de potencia máxima, estime la velocidad de punta del rotor y el coeficiente de potencia.

11.97 Un modelo de un molino de viento (de granja estadounidense) de álabes múltiples se va a construir para exhibirlo. El modelo, con $D = 2$ pies, va a desarrollar la potencia máxima a una velocidad de viento $V = 22$ mph. Calcule la velocidad angular del modelo para la generación de potencia óptima. Estime la salida de potencia.

11.98 El más grande aerogenerador Darrieus de eje vertical conocido fue construido por el Departamento de Energía de los E.U. cerca de Sandia, Nuevo México [48]. Esta máquina tiene 60 pies de altura y 30 pies de diámetro; el área barrida por el rotor es casi igual a 1200 pies^2. Estime la potencia máxima que esta máquina puede producir en un viento de 20 mph.

‡11.99 Un típico molino de viento (de granja) americano de álabes múltiples tiene $D = 7$ pies y está diseñado para producir potencia máxima con vientos de $V = 15$ mph. Estime la relación de entrega de agua, como una función de la altura a la cual se bombea el agua, para este molino de viento.

‡11.100 Desarrolle una ecuación para la máxima potencia de salida disponible de un aerogenerador de eje horizontal. Escriba la ecuación en una forma para obtener potencia, $\mathcal{P}$ (kW), sustituyendo la velocidad del viento, V (km/hr), y el diámetro del álabe, D (m). Grafique los resultados para los intervalos $1 < D < 30$ m y $10 < V < 100$ km/hr.

‡11.101

‡11.102

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

‡ Tal v
obelisc

‡**11.101** Las extrusiones de aluminio, modeladas conforme a las secciones simétricas de perfil aerodinámico de la NACA, se emplean con frecuencia para formar los "álabes" del aerogenerador Darrieus. A continuación se indican datos de coeficientes de sustentación y arrastre [49] para una sección NACA 0012, probada a Re = 6×10^6 con rugosidad estándar (la sección se obstruye para $\alpha > 12°$):

Ángulo de ataque, α (grados)	0	2	4	6	8	10	12
Coeficiente de sustentación, C_L (−)	0	0.23	0.45	0.68	0.82	0.94	1.02
Coeficiente de arrastre, C_D (−)	0.0098	0.0100	0.0119	0.0147	0.0194	—	—

Analice el flujo de aire relativo al elemento álabe de un aerogenerador Darrieus que rota en torno a su eje de troposco. Desarrolle un modelo numérico para el elemento álabe. Calcule el coeficiente de potencia desarrollado por el elemento álabe como una función de la relación de velocidad de punta. Compare sus resultado con la tendencia general de la salida de potencia para los rotores Darrieus mostrados en la figura 11.45.

‡**11.102** Se presentan en la figura 9.17 datos de sustentación y arrastre para la sección de perfil aerodinámico NACA 23015. Considere un aerogenerador con rotor de eje horizontal de dos álabes y sección de álabe NACA 23015. Analice el flujo de aire relativo a un elemento álabe del aerogenerador en rotación. Desarrolle un modelo numérico para el elemento álabe. Calcule el coeficiente de potencia desarrollado por el elemento álabe como una función de la relación de velocidad de punta. Compare su resultado con la tendencia general de la salida de potencia para los rotores de turbina de dos álabes de alta velocidad que se muestran en la figura 11.45.

‡ Tal vez usted desee utilizar programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con obeliscos.

Capítulo 12

Introducción al flujo compresible

En el capítulo 4 desarrollamos las formulaciones del volumen de control de las ecuaciones básicas. En el caso de flujo incompresible, las dos variables de principal interés fueron la presión y la velocidad. Las ecuaciones de continuidad y de momento brindaban las dos relaciones independientes necesarias para determinar las soluciones respecto a estas variables. En el capítulo 8, se utilizó la ecuación de energía para identificar las pérdidas en la energía mecánica debidas a la fricción de flujos en ductos.

El flujo "compresible" implica variaciones apreciables de la densidad en todo el campo de flujo. La compresibilidad se vuelve importante a altas velocidades de flujo o en cambios apreciables de temperatura. Los cambios considerables en la velocidad implican grandes cambios de presión; en el flujo de gases, estos cambios de presión se acompañan de variaciones significativas tanto en la densidad como en la temperatura. Puesto que se encuentran dos variables adicionales al estudiar el flujo compresible, se requieren dos ecuaciones más. Tanto la ecuación de energía como la ecuación de estado deben aplicarse para resolver los problemas de flujo compresible.

En nuestro estudio de flujo de fluido compresible, debemos tratar principalmente con el flujo unidimensional estable de un gas ideal. A pesar de que muchos flujos reales de interés son más complejos, estas restricciones nos permiten concentrarnos en los efectos de los procesos de flujo básicos.

La termodinámica necesaria para el estudio de flujos compresibles, incluyendo una ecuación de estado, y ecuaciones $T\,ds$, se repasa en la sección siguiente.

12-1 REPASO DE TERMODINÁMICA

La presión, la densidad y la temperatura de una sustancia pueden relacionarse mediante una ecuación de estado. Aunque muchas sustancias tienen un comportamiento complejo, la experiencia demuestra que la mayoría de los gases de interés para la ingeniería, a presión y temperatura moderadas, están bien representados por la ecuación de estado de gas ideal,

$$p = \rho RT \tag{12.1}$$

donde R es una constante para cada gas;[1] R está dada por

$$R = \frac{R_u}{M_m}$$

donde R_u es la constante universal de los gases, $R_u = 8314$ N · m/kgmol · K(1544 pies · lbf/lbmol · R) y M_m es la masa molecular del gas. Aunque ninguna sustancia real se comporta exactamente como un gas ideal,[2] la ecuación 12.1 implica un error menor que 1 por ciento para el aire a temperatura ambiente y presiones tan altas como 30 atm. Para aire a 1 atm, el error de la ecuación es menor que el 1 por ciento para temperaturas tan bajas como 140 K.

El gas ideal tiene otras características que son simples y útiles. En general, la energía interna de una sustancia puede expresarse como $u = u(v, T)$. Por consiguiente,

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

donde $v \equiv 1/\rho$ es el volumen específico. El calor específico a volumen constante se define como $c_v \equiv (\partial u/\partial T)_v$, por lo que

$$du = c_v\, dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

Para cualquier sustancia que cumple la ecuación de estado ideal, $p = \rho RT$, entonces $(\partial u/\partial v)_T = 0$, y consecuentemente $u = u(T)$. Por tanto,

$$du = c_v\, dT \tag{12.2}$$

para un gas ideal; esto significa que la energía interna y los cambios de temperatura pueden relacionarse si se conoce c_v. Además, puesto que $u = u(T)$, entonces $c_v = c_v(T)$.

La entalpía de una sustancia se define como $h \equiv u + p/\rho$. Para un gas ideal, $p = \rho RT$, y por tanto, $h = u + RT$. Como $u = u(T)$ para un gas ideal, entonces h también debe ser sólo una función de la temperatura.

Para obtener una relación entre h y T, expresamos h en su forma más general como

$$h = h(p, T)$$

Entonces

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

Puesto que el calor específico a presión constante se define como $c_p \equiv (\partial h/\partial T)_p$, entonces

$$dh = c_p\, dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

[1] Para aire, $R = 287$ N · m/kg · K (53.3 pies · lbf/lbm · R).
[2] Véase, por ejemplo, [1].

Hemos demostrado que para un gas ideal, h es una función únicamente de T. Por consiguiente, $(\partial h/\partial p)_T = 0$ y

$$dh = c_p\, dT \tag{12.3}$$

De nuevo, como h es una función sólo de T la ecuación 12.3 requiere que c_p sea sólo función de T, para un gas ideal.

Se ha demostrado que los calores específicos para un gas ideal sólo serán funciones de la temperatura. Su diferencia es una constante para cada gas. De

$$h = u + RT$$

podemos escribir

$$dh = du + R\, dT$$

Combinándola con la ecuación 12.3, y empleando la ecuación 12.2, es posible escribir

$$dh = c_p\, dT = du + R\, dT = c_v\, dT + R\, dT$$

Por tanto,

$$c_p - c_v = R \tag{12.4}$$

La relación de los calores específicos se define como

$$k \equiv \frac{c_p}{c_v} \tag{12.5}$$

Utilizando la definición de k, la ecuación 12.4 puede resolverse ya sea para c_p o para c_v en términos de k y R. De tal modo,

$$c_p = \frac{kR}{k-1} \tag{12.6a}$$

y

$$c_v = \frac{R}{k-1} \tag{12.6b}$$

Para un gas ideal, los calores específicos son funciones sólo de la temperatura. Dentro de intervalos de temperatura razonables, los calores específicos de un gas ideal pueden tratarse como constantes en cálculos de exactitud de ingeniería. Bajo estas condiciones,

$$u_2 - u_1 = \int_{u_1}^{u_2} du = \int_{T_1}^{T_2} c_v\, dT = c_v(T_2 - T_1) \tag{12.7a}$$

$$h_2 - h_1 = \int_{h_1}^{h_2} dh = \int_{T_1}^{T_2} c_p\, dT = c_p(T_2 - T_1) \tag{12.7b}$$

Estas ecuaciones pueden usarse evidentemente con provecho para simplificar el análisis.

Los datos para M_m, c_p, c_v, R y k para gases comunes se presentan en el apéndice A, tabla A.6.

La propiedad de la entropía es muy útil en el análisis de flujos compresibles. Los diagramas de estado, en particular el de temperatura-entropía ($T\,s$), son valiosas ayudas en la interpretación física de los resultados analíticos. En vista de que haremos un amplio uso de los diagramas $T\,s$ en la solución de problemas de flujo compresible, vamos a repasar brevemente algunas relaciones útiles que implican la propiedad de la entropía [2, 3].

La entropía se define mediante la ecuación

$$\Delta S \equiv \int_{\text{rev}} \frac{\delta Q}{T} \qquad \text{o} \qquad dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}} \tag{12.8}$$

La desigualdad de Clausius, deducida de la segunda ley, establece que

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Como una consecuencia de la segunda ley, estos resultados pueden extenderse a

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \qquad \text{o} \qquad T\,dS \geq \delta Q \tag{12.9a}$$

En procesos *reversibles*, la igualdad se cumple, y

$$T\,ds = \frac{\delta Q}{dm} \qquad \text{(proceso reversible)} \tag{12.9b}$$

La desigualdad se cumple en procesos *irreversibles*, y

$$T\,ds > \frac{\delta Q}{dm} \qquad \text{(proceso irreversible)} \tag{12.9c}$$

Para un proceso *adiabático*, $\delta Q/dm \equiv 0$. Por tanto,

$$ds = 0 \qquad \text{(proceso adiabático reversible)} \tag{12.9d}$$

y

$$ds > 0 \qquad \text{(proceso adiabático irreversible)} \tag{12.9e}$$

De tal modo un proceso que es reversible y adiabático también es *isentrópico*; la entropía permanece constante durante el proceso. La ecuación 12.9e muestra que la entropía debe *crecer* en un proceso adiabático que es irreversible.

El estudio cuidadoso de las ecuaciones 12.9 muestra que cualesquiera dos de las restricciones —reversible, adiabático o isentrópico— debe implicar la tercera. Por ejemplo, un proceso que es isentrópico y reversible también debe ser adiabático.

Es posible obtener una relación útil entre propiedades (p, v, T, s, u) considerando la primera y la segunda leyes juntas. El resultado es la ecuación de Gibbs, o $T\,ds$,

$$T\,ds = du + p\,dv \tag{12.10a}$$

Esta es una relación entre propiedades, válida para todos los procesos entre estados de equilibrio. Aunque se obtuvo de la primera y segunda leyes, en sí misma, no es un enunciado de ellas.

Una forma alternativa de la ecuación 12.10a puede obtenerse sustituyendo

$$du = d(h - pv) = dh - p\,dv - v\,dp$$

para obtener

$$T\,ds = dh - v\,dp \tag{12.10b}$$

Para un gas ideal, el cambio en la entropía puede evaluarse a partir de la ecuación $T\,ds$ como

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T}\,dv = c_v\frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v}$$

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T}\,dp = c_p\frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

Para calores específicos constantes, estas ecuaciones pueden integrarse para producir

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{v_2}{v_1}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$$

El problema ejemplo 12.1 ilustra el empleo de las relaciones de gas ideal y de las ecuaciones $T\,ds$ para evaluar propiedades termodinámicas y el cambio en la entropía en un proceso.

En el caso especial de un proceso isentrópico, $ds = 0$, y las ecuaciones $T\,ds$ se reducen a

$$0 = du + p\,dv$$

$$0 = dh - v\,dp$$

Para un gas ideal, tenemos

$$0 = c_v\,dT + p\,dv$$

$$0 = c_p\,dT - v\,dp$$

Al resolver para dT se obtiene

$$dT = \frac{v\,dp}{c_p} = -\frac{p\,dv}{c_v}$$

o

$$\frac{dp}{p} + \frac{c_p}{c_v}\frac{dv}{v} = \frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0$$

La integración (para k = constante) resulta en

$$\ln p + k\ln v = \ln c$$

o

$$\ln p + \ln v^k = \ln c$$

Tomando antilogaritmos, esta ecuación se reduce a

$$pv^k = \text{constante} \tag{12.11a}$$

o

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \tag{12.11b}$$

Las ecuaciones 12.11 son relaciones de propiedades para un gas ideal sujeto a un proceso isentrópico.

La información cualitativa que es útil al dibujar diagramas de estado también puede obtenerse de las ecuaciones $T\,ds$. Para terminar nuestro repaso de fundamentos de termodinámica, se evalúan las pendientes de las líneas de presión constante y de volumen constante sobre el diagrama $T\,s$ en el problema ejemplo 12.2.

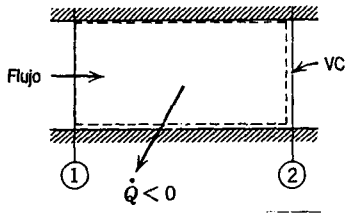
EJEMPLO 12.1 Cambios en las propiedades de un flujo compresible en un ducto

Fluye aire a través de un ducto largo de área constante a 0.15 kg/s. Una sección corta del ducto se enfría por medio de nitrógeno líquido que rodea al ducto. La relación de pérdida de calor del aire en esta sección es 15.0 kJ/s. La presión y temperaturas absolutas y la velocidad de entrada en la sección fría son 188 kPa, 440 K y 210 m/s, respectivamente. En la salida, la presión y la temperatura absolutas son 213 kPa y 351 K. Calcule el área de la sección transversal del ducto y los cambios en la entalpía, energía interna y entropía para este flujo.

PROBLEMA EJEMPLO 12.1

DATOS: Aire que fluye establemente a través de una sección corta de un ducto de área constante que es enfriado por medio de nitrógeno líquido.

$T_1 = 440$ K
$p_1 = 188$ kPa (abs)
$V_1 = 210$ m/s



$T_2 = 351$ K
$p_2 = 213$ kPa (abs)

ENCUENTRE: *a*) El área del ducto. *b*) Δh. *c*) Δu. *d*) Δs.

SOLUCIÓN:
El área del ducto puede determinarse a partir de la ecuación de continuidad.

Ecuación básica:

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en cada sección
3) Gas ideal

Por tanto,

$$0 = \{-[\rho_1 V_1 A_1]\} + \{[\rho_2 V_2 A_2]\}$$

o

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A$$

como $A = A_1 = A_2$ = constante. Empleando la relación de gas ideal, $p = \rho RT$, encontramos

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1.88\times 10^5 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \dfrac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \dfrac{1}{440\ \text{K}} = 1.49\ \text{kg/m}^3$$

De la continuidad,

$$A = \frac{\dot{m}}{\rho_1 V_1} = \frac{0.15\ \dfrac{\text{kg}}{\text{s}} \times \dfrac{\text{m}^3}{1.49\ \text{kg}} \times \dfrac{\text{s}}{210\ \text{m}} = 4.79\times 10^{-4}\ \text{m}^2 \longleftarrow A$$

Para un gas ideal, $dh = c_p dT$, por lo que

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p\, dT = c_p(T_2 - T_1)$$

$$\Delta h = \frac{1.00\ \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times (351 - 440)\ \text{K} = -89.0\ \text{kJ/kg} \longleftarrow \Delta h$$

Además $du = c_v dT$, así que

$$\Delta u = u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v\, dT = c_v(T_2 - T_1)$$

$$\Delta u = \frac{0.717\ \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times (351 - 440)\ \text{K} = -63.8\ \text{kJ/kg} \longleftarrow \Delta u$$

El cambio en la entropía puede obtenerse de la ecuación $T\,ds$,

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v\,dp}{T} = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

o

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} - \int_{p_1}^{p_2} R\frac{dp}{p} = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$= \frac{1.00\ \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \ln\left(\frac{351}{440}\right) - \frac{0.287\ \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \ln\left(\frac{2.13\times 10^5}{1.88\times 10^5}\right)$$

$$\Delta s = -0.262\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K} \longleftarrow \Delta s$$

El propósito de este problema fue repasar el cálculo de propiedades termodinámicas y del cambio en la entropía para un proceso de un gas ideal.

EJEMPLO 12.2 Líneas de propiedad constante sobre el diagrama *T s*

Para un gas ideal, determine la pendiente de *a*) una línea de volumen constante y *b*) una línea de presión constante en el plano *T s*.

PROBLEMA EJEMPLO 12.2

DATOS: Un gas ideal.

ENCUENTRE: *a*) La pendiente de la línea de volumen constante en el plano *T s*.
b) La pendiente de la línea de presión constante en el plano *T s*.

SOLUCIÓN:
Las ecuaciones *T ds* pueden aplicarse.

$$T\,ds = du + p\,dv \tag{12.10a}$$

$$T\,ds = dh - v\,dp \tag{12.10b}$$

Sustituyendo para un gas ideal, $du = c_v\,dT$ y $dh = c_p dT$, obtenemos

$$T\,ds = c_v\,dT + p\,dv$$

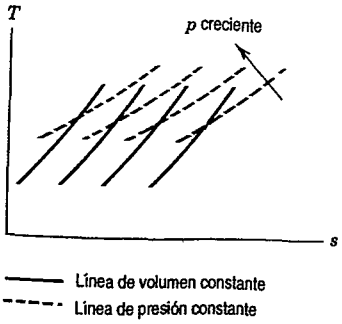
$$T\,ds = c_p\,dT - v\,dp$$

Para un proceso a volumen constante, $dv = 0$. De la primera ecuación,

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{\substack{\text{volumen}\\ \text{constante}}} = \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v = \frac{T}{c_v}$$ pendiente de volumen constante

Para un proceso a presión constante, $dp = 0$. De la segunda ecuación,

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{\substack{\text{presión}\\ \text{constante}}} = \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}$$ pendiente de presión constante



Advierta que la pendiente de cada línea es proporcional en cada punto a la temperatura absoluta. Además, en cualquier punto, la pendiente de una línea de volumen constante es $c_p/c_v = k$ veces mayor que la pendiente de una línea de presión constante.

12-2 PROPAGACIÓN DE ONDAS SONORAS

12-2.1 Velocidad del sonido

Supersónico y *subsónico* son términos familiares; se refieren a velocidades que son, respectivamente, mayor y menor que la velocidad del sonido. La velocidad del sonido (una onda de presión de intensidad infinitesimal) es un parámetro característico importante para el flujo compresible. Previamente presentamos (capítulos 2 y 7) el número de Mach, $M = V/c$, la razón entre la velocidad local del flujo y la velocidad local del sonido, como un importante parámetro adimensional que caracteriza a los flujos compresibles. Antes de estudiar los flujos compresibles, obtendremos una relación general para calcular la velocidad del sonido.

Considere la propagación de una onda sonora de intensidad infinitesimal en un medio no perturbado, como se muestra en la figura 12.1*a*. Nos interesa relacionar la velocidad de propagación de la onda, c, con los cambios en las propiedades del fluido entre los extremos de la onda. Si la presión y la densidad en el medio no perturbado adelante de la onda se denotan por medio de p y ρ, el paso de la onda provocará en ellas cambios infinitesimales que las transformarán en $p + dp$ y $\rho + d\rho$. Puesto que la onda se propaga en un fluido estacionario, la velocidad adelante de la onda, V_x, es cero. La magnitud de la velocidad detrás de la onda, $V_x + dV_x$, será entonces simplemente dV_x. En la figura 12.1*a*, la dirección de movimiento detrás de la onda se ha supuesto hacia la izquierda.[3]

El flujo de la fig. 12.1*a* aparece inestable para un observador estacionario, que observa el

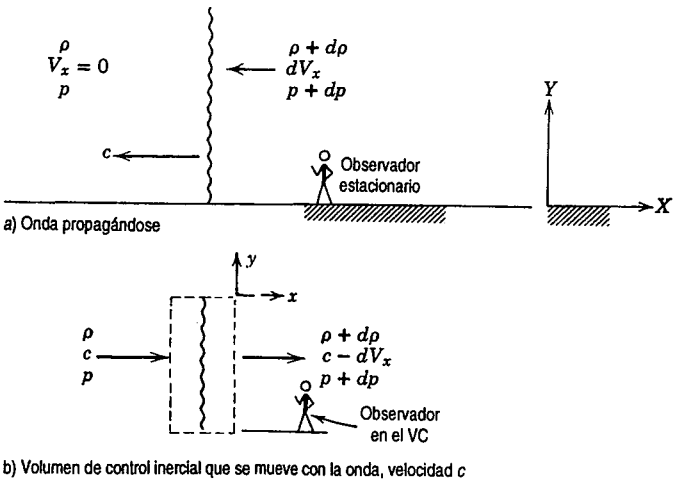


Fig. 12.1 Propagación de una onda sonora mostrando el volumen de control elegido para el análisis.

[3] Se obtiene el mismo resultado final sin importar la dirección supuesta inicialmente para el movimiento detrás de la onda.

movimiento ondulatorio desde un punto fijo en el suelo. Sin embargo, el flujo aparece estable para un observador localizado *en* un volumen de control inercial que se mueve con un segmento de la onda, como se muestra en la figura 12.1*b*. La velocidad de acercamiento al volumen de control es c, y la de alejamiento es $c - dV_x$.

Las ecuaciones básicas pueden aplicarse al volumen de control diferencial mostrado en la figura 12.1*b* (empleamos V_x para la componente x de la velocidad con el fin de evitar confusiones con la energía interna, u).

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en cada sección

Entonces

$$0 = \{-|\rho c A|\} + \{|(\rho + d\rho)(c - dV_x)A|\} \tag{12.12a)}$$

o

$$0 = -\rho c A + \rho c A - \rho \, dV_x A + d\rho c A - \overbrace{d\rho \, dV_x A}^{\approx 0}$$

Ignorando el producto de diferenciales, $d\rho dV_x$, comparada ya sea con $d\rho$ o dV_x, obtenemos

$$0 = -\rho A \, dV_x + cA \, d\rho$$

o

$$dV_x = \frac{c}{\rho} d\rho \tag{12.12b}$$

b. Ecuación de momento

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \overbrace{F_{B_x}}^{=0(3)} - \int_{VC} \overbrace{a_{rf_x}}^{=0(4)} \rho \, d\forall = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_x \rho \, d\forall}^{=0(1)} + \int_{SC} V_x \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.35a}$$

Suposiciones: 3) $F_{B_x} = 0$
4) $a_{rf_x} = 0$

Las fuerzas de superficie que actúan sobre el volumen de control infinitesimal son

$$F_{S_x} = dR_x + pA - (p + dp)A$$

donde dR_x representa todas las fuerzas aplicadas a las porciones horizontales de la superficie de control mostrada en la figura 12.1*b*. Consideramos sólo una parte de una onda sonora en movimiento, por lo que $dR_x = 0$ debido a que no hay movimiento relativo a lo largo de la onda. De tal modo, la fuerza de superfice se simplifica en

$$F_{S_x} = -A\,dp$$

La sustitución en las ecuaciones básicas produce

$$-A\,dp = c\{-|\rho cA|\} + (c - dV_x)\{|(\rho + d\rho)(c - dV_x)A|\}$$

El uso de la ecuación de continuidad, en la forma de la ecuación 12.12*a*, reduce esto a

$$-A\,dp = c\{-|\rho cA|\} + (c - dV_x)\{|\rho cA|\} = (-c + c - dV_x)\{|\rho cA|\}$$

$$-A\,dp = -\rho cA\,dV_x$$

o

$$dV_x = \frac{1}{\rho c}\,dp \tag{12.12c}$$

Con la combinación de las ecuaciones 12.12*b* y 12.12*c*, obtenemos

$$dV_x = \frac{c}{\rho}d\rho = \frac{1}{\rho c}\,dp$$

de la cual

$$dp = c^2\,d\rho$$

o

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

Para evaluar la derivada de una propiedad termodinámica, debemos especificar la propiedad que se va a mantener constante durante la diferenciación. Para el presente caso, el límite, cuando la intesidad tiende a cero, de una onda sonora será

$$\lim_{\text{intensidad} \to 0} \frac{dp}{d\rho} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s\,=\,\text{constante}}$$

Quizá una justificación física para la suposición de propagación isentrópica es que un cambio en la presión infinitesimal es reversible. Por tanto, puesto que hay muy poco tiempo para la transferencia térmica, el proceso es reversible y adiabático; un proceso reversible adiabático debe ser isentrópico. De tal modo, la velocidad de propagación de una onda sonora está dada por

$$c = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

Los datos para los medios sólido y líquido suelen reportarse como el módulo volumétrico,

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} = \rho\frac{dp}{d\rho} \tag{3.8}$$

Para estos medios,

$$c = \sqrt{E_v/\rho} \tag{12.13}$$

Para un gas ideal, la presión y la densidad en flujo isentrópico se relacionan por medio de

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \tag{12.11b}$$

como se mostró anteriormente. Tomando logaritmos, obtenemos

$$\ln p - k \ln \rho = \ln c$$

y diferenciando

$$\frac{dp}{p} - k\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Por tanto,

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = k\frac{p}{\rho}$$

Pero $p/\rho = RT$, por lo que finalmente

$$c = \sqrt{kRT} \tag{12.14}$$

para un gas ideal. Numerosos investigadores han medido con gran precisión la velocidad del sonido en el aire [4]. Los resultados concuerdan bastante con la predicción teórica de la ecuación 12.14.

La característica importante de la propagación del sonido en un gas ideal, como lo muestra la ecuación 12.14, es que la velocidad del sonido es una función únicamente de la temperatura. La variación en la temperatura atmosférica con respecto a la altitud, en un día en condiciones normales, se estudió en el capítulo 3; las propiedades se resumen en la tabla A.3. La variación correspondiente en c se calcula en el problema ejemplo 12.3 y se grafica como una función de la altitud.

EJEMPLO 12.3 Velocidad del sonido en la atmósfera estándar

Calcule la velocidad del sonido al nivel del mar en aire estándar. Evalúe la velocidad del sonido y grafique para altitudes hasta de 15 km.

PROBLEMA EJEMPLO 12.3

DATOS: Aire bajo condiciones atmosféricas estándar.

ENCUENTRE: *a*) La velocidad del sonido al nivel del mar.
b) Grafique la velocidad del sonido para altitudes hasta de 15 km.

SOLUCIÓN:
Considere un gas ideal.

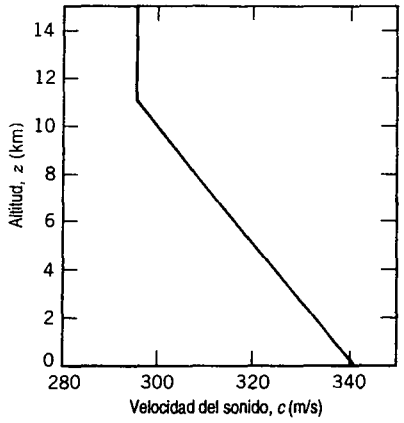
Ecuación de cálculo:

$$c = \sqrt{kRT}$$

De la tabla 3.1, la temperatura a nivel del mar en un día con condiciones estándar es 288 K. De tal modo,

$$c = \left(1.4 \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 288 \text{ K} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right)^{1/2} = 340 \text{ m/s}$$

Las temperaturas a diversas altitudes pueden encontrarse en la tabla A.3. Las velocidades del sonido resultantes se grafican en la siguiente figura.



De la gráfica vemos que la velocidad del sonido en el aire en un día con condiciones estándar varía de 340 m/s a nivel del mar hasta 295 m/s a 11 km de altitud.

La temperatura del aire varía linealmente desde el nivel del mar hasta una altitud de aproximadamente 11 km. La velocidad sónica es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta, de modo que su variación con la altura es no lineal. La no linealidad no es evidente a la escala de esta gráfica.

12-2.2 Tipos de flujo. El cono de Mach

Los flujos para los cuales $M < 1$ son *subsónicos*, en tanto que aquellos con $M > 1$ son *supersónicos*. Los campos de flujo que tienen tanto regiones subsónicas como supersónicas reciben el nombre de *transónicos*. (El régimen transónico ocurre para números de Mach entre aproximadamente 0.9 y 1.2.) Aunque la mayor parte de los flujos dentro de nuestra experiencia son subsónicos, hay casos prácticos importantes donde $M \geq 1$ ocurre en un campo de flujo. Quizá los más obvios son los aviones supersónicos y los flujos transónicos en compresores y ventiladores de aviones. Incluso otro régimen de flujo, flujo *hipersónico* ($M \gtrsim 5$), es de interés en el diseño de misiles y de vehículos espaciales. El Avión Nacional Aeroespacial (NASP) de los Estados Unidos, actualmente en

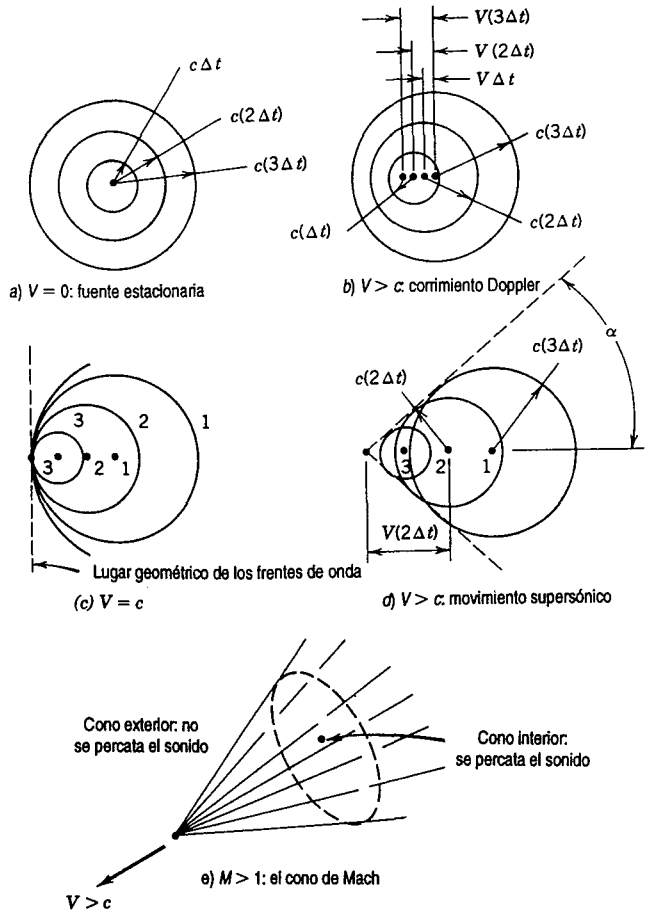


Fig. 12.2 Propagación de ondas sonoras desde una fuente móvil: El cono de Mach.

estudio, volará a números de Mach cercanos a 20. Algunas diferencias cualitativas importantes entre los flujos subsónico y supersónico pueden deducirse de las propiedades de una simple fuente sonora en movimiento.

Considere una fuente puntual que emite perturbaciones infinitesimales instantáneas, las cuales se propagan en todas las direcciones con velocidad c. En cualquier tiempo t, la localización del frente de onda desde la perturbación emitida en el tiempo t_0, se representará por medio de una esfera, con radio $c(t - t_0)$, cuyo centro coincide con la posición de la perturbación al tiempo t_0.

Nos interesa determinar la naturaleza de la propagación de la perturbación para diferentes velocidades de la fuente móvil. Se muestran cuatro casos en la figura 12.2:

1. $V = 0$. El patrón del sonido se propaga uniformemente en todas las direcciones. En el instante Δt después de la emisión, cualquier pulso sonoro dado se localiza en el radio $c\Delta t$ desde la fuente. En el instante $2\Delta t$, el radio es $c(2\Delta t)$. Cada frente de onda es esférico; todos los frentes de onda son esferas concéntricas.

2. $0 < V < c$. La concentricidad del patrón de onda se pierde. Los frentes de onda

individuales son esféricos, pero cada sonido sucesivo se emite desde una posición diferente, $V\Delta t$ alejada de la posición anterior.

Si usted imagina que los círculos mostrados serán los picos de amplitud de un tono senoidal, la misma imagen cualitativa se cumple para una fuente móvil de un sonido continuo. Si esta fuente se mueve con velocidad constante, V, el patrón completo mostrado en la figura 12.2*b* se desplaza junto con el emisor. Por ello un observador estacionario escucha más picos por unidad de tiempo cuando la fuente se acerca que después de que ha pasado. Esto se conoce como el "efecto Doppler". (¿Ha escuchado usted alguna vez el silbato de un tren rápido en un cruce de vía?)

3. $V = c$. El lugar geométrico de la superficie delantera de todas las ondas será un plano en la fuente, perpendicular a la trayectoria de movimiento. Ninguna onda sonora puede viajar enfrente de la fuente. Consecuentemente, un observador enfrente de la fuente no la escuchará cuando ella se acerque.

4. $V > c$. En este caso, el lugar geométrico de las superficies delanteras de las ondas sonoras será un cono. También en este caso, ningún sonido se escuchará frente al cono.

El ángulo del cono puede relacionarse con el número de Mach al cual se mueve la fuente. De la geometría de la figura 12.2*d*,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}$$

o

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{M}\right) \tag{12.15}$$

El cono descrito en la figura 12.2*e* se denomina *cono de Mach*; α es el *ángulo de Mach*. Las regiones dentro y fuera del cono en ocasiones se llaman la *zona de acción* y la *zona de silencio*, respectivamente.

12-3 ESTADO DE REFERENCIA: PROPIEDADES LOCALES DE ESTANCAMIENTO ISENTRÓPICO

Si deseamos describir el estado de un fluido en cualquier punto en un campo de flujo, debemos especificar dos propiedades termodinámicas intensivas independientes (casi siempre la presión y la temperatura), más la velocidad en el punto.[4]

En nuestro estudio del flujo compresible, encontraremos que es conveniente emplear el estado de estancamiento como un estado de referencia. El estado de estancamiento se caracteriza por velocidad cero; las propiedades de estancamiento en cualquier punto en un campo de flujo son aquellas propiedades que existirían en ese punto si la velocidad se redujera a cero. Considere un punto en un campo de flujo que tiene temperatura T, presión p y velocidad V. El estado de estancamiento en ese punto en el campo de flujo se caracterizaría por la presión de estancamiento, p_0, la temperatura de estancamiento, T_0, y la velocidad cero. Antes de que calculemos las propiedades de estancamiento, debemos especificar el proceso por medio del cual se imagina que el fluido se desacelera hasta la velocidad cero.

[4] El estado de una sustancia pura, en ausencia de movimiento, gravedad y efectos superficiales, magnéticos o eléctricos, está definido por dos propiedades termodinámicas intensivas independientes.

Para flujo incompresible (capítulo 6), la integración de la ecuación de Euler, para flujo incompresible sin fricción a lo largo de una línea de corriente, condujo a la ecuación de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.9}$$

En el flujo incompresible, un proceso de desaceleración sin fricción hasta velocidad cero condujo a la presión de estancamiento, p_0, dada por

$$p_0 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \tag{6.12}$$

En el caso de flujo compresible empleamos de nuevo un proceso de desaceleración sin fricción; además, especificamos que el proceso de desaceleración es adiabático. En suma, especificamos un proceso de desaceleración isentrópico para definir las propiedades locales de estancamiento isentrópico:

> Las *propiedades locales de estancamiento isentrópico* son aquéllas que se obtendrían en cualquier punto en un campo de flujo si el fluido en ese punto se desacelerara desde las condiciones locales hasta velocidad cero siguiendo un proceso adiabático sin fricción (isentrópico).

Las propiedades de estancamiento isentrópico son propiedades de referencia que pueden evaluarse en cualquier punto en un campo de flujo. Las variaciones en estas propiedades de punto a punto en un campo de flujo brindan información acerca del proceso de flujo entre puntos. Esto se volverá aparente en nuestro estudio de casos de flujo unidimensionales. Para calcular las propiedades locales de estancamiento isentrópico, debemos imaginar un proceso de desaceleración hipotético a velocidad cero. Al principio del proceso, las condiciones corresponden al flujo real en el punto (velocidad V, presión p, temperatura T, etc.). Al final del proceso la velocidad es cero, y las condiciones son las correspondientes a las propiedades locales de estancamiento isentrópico (presión de estancamiento p_0, temperatura de estancamiento T_0, etc.).

12-3.1 Propiedades locales de estancamiento isentrópico para el flujo de un gas ideal

Necesitamos desarrollar una expresión que describa la relación entre las propiedades del fluido durante el proceso. Puesto que tanto las propiedades iniciales como las finales están especificadas,

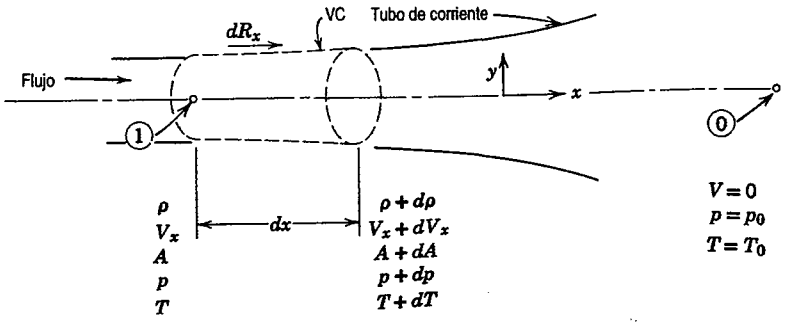


Fig. 12.3 Flujo compresible en un tubo de corriente infinitesimal.

desarrollamos la relación entre las propiedades en forma diferencial. Luego podemos integrar con el propósito de obtener expresiones para las condiciones de estancamiento en términos de las condiciones iniciales correspondientes al flujo real en el punto.

El proceso de desaceleración hipotética se muestra esquemáticamente en la figura 12.3. Estamos interesados en encontrar las propiedades de estancamiento para el flujo en el punto ①. Con objeto de determinar una relación entre las propiedades del fluido durante el proceso de desaceleración, aplicamos las ecuaciones de continuidad y momento al volumen de control de tubo de corriente diferencial estacionario que se muestra.

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0(1)} \int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en cada sección

Entonces

$$0 = \{-|\rho V_x A|\} + \{|(\rho + d\rho)(V_x + dV_x)(A + dA)|\}$$

o

$$\rho V_x A = (\rho + d\rho)(V_x + dV_x)(A + dA) \tag{12.16a}$$

b. Ecuación de momento

Ecuación básica:

$$\underbrace{F_{S_x}}_{=0(3)} + \underbrace{F_{B_x}}_{=0(4)} - \int_{VC} \underbrace{a_{rf_x}}_{=0(1)} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \tag{4.35a}$$

Suposiciones:
3) $F_{B_x} = 0$
4) $a_{rf_x} = 0$
5) Flujo sin fricción

Las fuerzas de superficie que actúan sobre el volumen de control infinitesimal son

$$F_{S_x} = dR_x + pA - (p + dp)(A + dA)$$

La fuerza dR_x se aplica a lo largo de la frontera del tubo de corriente, como se muestra en la figura 12.3. Ahí la presión promedio es $p + dp/2$, y la componente del área en la dirección x es dA. No hay fricción. De tal manera,

demos integrar con
en términos de las

en la figura 12.3.
ajo en el punto ①.
ante el proceso de
n de control de tubo

(4.13)

(12.16a)

(4.35a)

al son

muestra en la figura
lirección x es dA. No

$$F_{S_x} = \left(p + \frac{dp}{2}\right)dA + pA - (p + dp)(A + dA)$$

o

$$F_{S_x} = p\,dA + \underbrace{\frac{dp\,dA}{2}}_{\approx 0} + pA - pA - dp\,A - p\,dA - \underbrace{d\,p\,dA}_{\approx 0}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de momento,

$$-dp\,A = V_x\{-|\rho V_x A|\} + (V_x + d\,V_x)\{|(\rho + d\rho)(V_x + d\,V_x)(A + dA)|\}$$

la cual puede simplificarse utilizando la ecuación 12.16*a* para obtener

$$-dp\,A = (-V_x + V_x + d\,V_x)\,(\rho V_x A)$$

Por último,

$$dp = -\rho V_x\,d\,V_x = -\rho d\left(\frac{V_x^2}{2}\right)$$

o

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V_x^2}{2}\right) = 0 \tag{12.16b}$$

La ecuación 12.16b es una relación entre propiedades durante el proceso de desaceleración. Al desarrollar esta relación, hemos especificado un proceso de desaceleración sin fricción. Antes de que podamos integrar entre los estados inicial y final (estancamiento), debemos especificar la relación que existe entre la presión, p, y la densidad, ρ, a lo largo de la trayectoria del proceso.

Como el proceso de desaceleración es isentrópico, entonces, para un gas ideal, p y ρ se relacionan por medio de la expresión

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \tag{12.11b}$$

Nuestra tarea después de esto es integrar la ecuación 12.16b sujeta a esta relación. A lo largo de la línea de corriente de estancamiento sólo hay una componente de velocidad; V_x es la magnitud de la velocidad. Por ello podemos eliminar el subíndice y escribir

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \tag{12.16c}$$

De $p/\rho^k = \text{constante} = C$, es posible escribir

$$p = C\rho^k \qquad \text{y} \qquad \rho = p^{1/k}C^{-1/k}$$

Luego, de la ecuación 12.16c,

$$-d\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{dp}{\rho} = p^{-1/k}C^{1/k}\,dp$$

Podemos integrar esta ecuación entre el estado inicial y el estado de estancamiento correspondiente

$$-\int_V^0 d\left(\frac{V^2}{2}\right) = C^{1/k}\int_p^{p_0} p^{-1/k}\,dp$$

para obtener

$$\frac{V^2}{2} = C^{1/k}\frac{k}{k-1}\left[p^{(k-1)/k}\right]_p^{p_0} = C^{1/k}\frac{k}{k-1}\left[p_0^{(k-1)/k} - p^{(k-1)/k}\right]$$

$$\frac{V^2}{2} = C^{1/k}\frac{k}{k-1}p^{(k-1)/k}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

Puesto que $C^{1/k} = p^{1/k}/\rho$, entonces

$$\frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p^{1/k}}{\rho}p^{(k-1)/k}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

Puesto que buscamos una expresión para la presión de estancamiento, podemos reescribir esta ecuación como

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} = 1 + \frac{k-1}{k}\frac{\rho}{p}\frac{V^2}{2}$$

y

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{k}\frac{\rho V^2}{2p}\right]^{k/(k-1)}$$

Para un gas ideal, $p = \rho RT$, y por tanto

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{V^2}{kRT}\right]^{k/(k-1)}$$

Además, en un gas ideal la velocidad del sonido es $c = \sqrt{kRT}$, y de este modo

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \qquad (12.17a)$$

La ecuación 12.17*a* nos permite calcular la presión de estancamiento isentrópico en cualquier punto en un campo de flujo de un gas ideal, siempre que conozcamos la presión estática y el número de Mach en ese punto.

Podemos obtener de inmediato expresiones para otras propiedades de estancamiento isentrópico aplicando la relación

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante}$$

entre los estados finales del proceso. De tal modo,

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k$$

y

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/k}$$

De la ecuación de estado de gas ideal, $p = \rho RT$. Por tanto,

$$\frac{T_0}{T} = \frac{p_0}{p}\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p_0}{p}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{-1/k} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k}$$

Usando la ecuación 12.17a, podemos resumir las ecuaciones para determinar las propiedades de estancamiento local isentrópico de un gas ideal como

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \tag{12.17a}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \tag{12.17b}$$

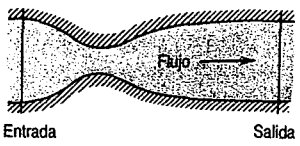
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)} \tag{12.17c}$$

De las ecuaciones 12.17, puede determinarse la razón entre cada propiedad local de estancamiento isentrópico y la propiedad estática correspondiente en cualquier punto en un campo de flujo para un gas ideal, si se conoce el número de Mach local. De hecho, estas razones podrían calcularse definitivamente y tabularse. El procedimiento de cálculo se ilustra en el problema ejemplo 12.4; las razones entre las propiedades locales de estancamiento isentrópico y las correspondientes propiedades estáticas para un gas ideal se tabulan en la tabla E.1 del apéndice E.

El rango del número de Mach para la validez de la suposición de flujo incompresible se investiga en el problema ejemplo 12.5.

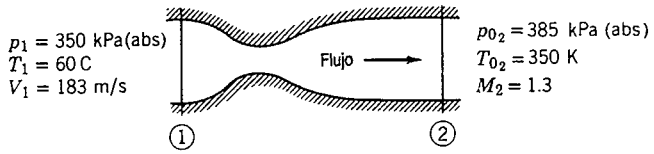
EJEMPLO 12.4 Condiciones locales de estancamiento isentrópico en un canal de flujo

Aire fluye establemente, a través del ducto mostrado, desde 350 kPa (abs), 60 C y 183 m/s en el estado inicial hasta $M = 1.3$ a la salida, donde las condiciones locales de estancamiento isentrópico se sabe que serán 385 kPa (abs) y 350 K. Calcule la presión y la temperatura locales de estancamiento isentrópico en la entrada y la presión y temperatura estáticas en la salida del ducto. Localice los puntos de estado estático de la entrada y de la salida en un diagrama Ts e indique los procesos de estancamiento.



PROBLEMA EJEMPLO 12.4

DATOS: Un flujo estable de aire a través de un ducto como el que se muestra en el dibujo.



ENCUENTRE: *a)* p_{0_1}. *b)* T_{0_1}. *c)* p_2. *d)* T_2.
e) Localice los puntos de estado ① y ② en un diagrama *Ts* e indique los procesos de estancamiento.

SOLUCIÓN:
Para evaluar las condiciones locales de estancamiento isentrópico en la sección ①, debemos calcular el número de Mach, $M_1 = V_1/c_1$. Para un gas ideal, $c = \sqrt{kRT}$. Entonces,

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1.4 \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times (273 + 60)\,\text{K} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1.2} = 366\ \text{m/s}$$

y

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{183}{366} = 0.5$$

Las propiedades locales de estancamiento isentrópico pueden evaluarse a partir de las ecuaciones 12.17. Por consiguiente,

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right]^{k/(k-1)} = [1 + 0.2(0.5)^2]^{3.5} = 1.186$$

y

$$p_{0_1} = 1.186 p_1 = (1.186)(350\ \text{kPa}) = 415\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_1}$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 = 1.05$$

y

$$T_{0_1} = 1.05 T_1 = (1.05)(333\ \text{K}) = 350\ \text{K} \longleftarrow T_{0_1}$$

En la sección ②, pueden aplicarse otra vez las ecuaciones 12.17. Así, de la ecuación 12.17a,

$$\frac{p_{0_2}}{p_2} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right]^{k/(k-1)} = [1 + 0.2(1.3)^2]^{3.5} = 2.77$$

y

$$p_2 = \frac{p_{0_2}}{2.77} = \frac{385\ \text{kPa}}{2.77} = 139\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

De la ecuación 12.17b,

$$\frac{T_{0_2}}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 = 1.338$$

y

$$T_2 = \frac{T_{0_2}}{1.338} = \frac{350\ \text{K}}{1.338} = 262\ \text{K} \longleftarrow T_2$$

El cambio de entropía debe evaluarse para ubicar el estado (2) con respecto al estado (1). Utilizando la ecuación $T\,ds$.

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

o

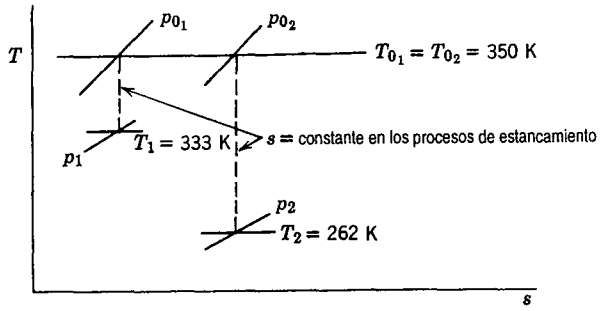
$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v\,dp}{T} = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

La integración da como resultado

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} - \int_{p_1}^{p_2} R\frac{dp}{p} = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R \ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{1.00\ \text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times \ln\left(\frac{262}{333}\right) - \frac{0.287\ \text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times \ln\left(\frac{1.39}{3.50}\right) = 0.0252\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}$$

Por tanto, el estado (2) yace a la derecha del estado (1) sobre el plano Ts, como se indica en el siguiente dibujo:



El proceso que el fluido sigue entre los estados (1) y (2) no está especificado. Sin embargo, no es necesario conocerlo. Un proceso de estancamiento isentrópico único se define en cada punto de estado. Observe que $s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1$.

EJEMPLO 12.5 Límite del número de Mach para flujo incompresible

Hemos obtenido ecuaciones para p_0/p tanto para flujo compresible como para "incompresible". Mediante la escritura de ambas ecuaciones en términos del número de Mach, compare su comportamiento. Determine el número de Mach por abajo del cual las dos ecuaciones concuerdan dentro de la precisión de ingeniería.

PROBLEMA EJEMPLO 12.5

DATOS: Las formas incompresible y compresible de las ecuaciones para la presión de estancamiento, p_0.

Incompresible $$p_0 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \tag{6.12}$$

Compresible $$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \tag{12.17a}$$

ENCUENTRE: *a*) El comportamiento de ambas ecuaciones como una función del número de Mach.

b) El número de Mach por abajo del cual los valores calculados de $(p_0 - p)/p_0$ concuerdan dentro de una precisión de ingeniería.

SOLUCIÓN:

Primero vamos a escribir la ecuación 6.12 en términos del número de Mach. Empleando la ecuación de estado de gas ideal y $c^2 = kRT$,

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\rho V^2}{2p} = 1 + \frac{V^2}{2RT} = 1 + \frac{kV^2}{2kRT} = 1 + \frac{kV^2}{2c^2}$$

De tal modo,

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}M^2 \tag{1}$$

para flujo "incompresible".

La ecuación 12.17a puede desarrollarse empleando el teorema del binomio,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots, \quad |x| < 1$$

En la ecuación 12.17a, $x = [(k-1)/2]M^2$, y $n = k/(k-1)$. Así, la serie converge para $[(k-1)/2]M^2 < 1$, y

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \left(\frac{k}{k-1}\right)\left[\frac{k-1}{2}M^2\right] + \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k}{k-1}-1\right)\frac{1}{2!}\left[\frac{k-1}{2}M^2\right]^2 + \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k}{k-1}-1\right)\left(\frac{k}{k-1}-2\right)\frac{1}{3!}\left[\frac{k-1}{2}M^2\right]^3 + \cdots$$

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}M^2 + \frac{k}{8}M^4 + \frac{k(2-k)}{48}M^6 + \cdots$$

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}M^2\left[1 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{(2-k)}{24}M^4 + \cdots\right] \tag{2}$$

para flujo compresible.

En el límite, cuando $M \to 0$, el término entre corchetes en la ecuación 2 se acerca a 1.0. De tal modo, para flujo a un número de Mach bajo, las ecuaciones incompresible y compresible brindan el mismo resultado. La variación de p_0/p con el número de Mach se muestra en el siguiente dibujo. Cuando aumenta el número de Mach, la ecuación compresible produce una razón más grande, p_0/p.

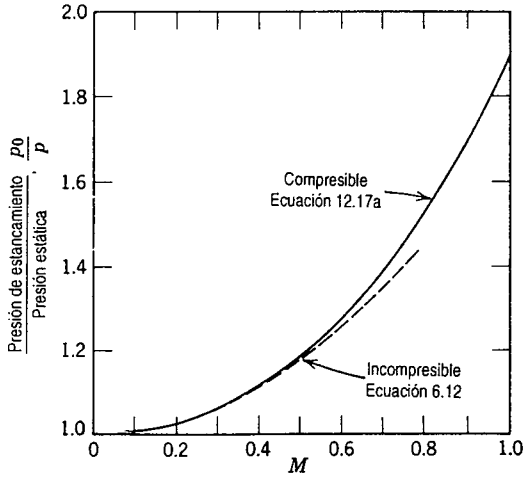
Las e

El término
consiguien
si $M < 0.3$.

12-4 CONDICIONES CF

Las condicior
propiedades t
0 en el estanc
velocidad a ur
dado donde el
como una con
Empleanc

En condicione
vuelven (para



Las ecuaciones 1 y 2 pueden compararse cuantitativamente de manera más simple escribiendo

$$\frac{p_0}{p} - 1 = \frac{k}{2} M^2 \quad (\text{"incompresible"})$$

$$\frac{p_0}{p} - 1 = \frac{k}{2} M^2 \left[1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{(2-k)}{24} M^4 + \cdots \right] \quad (\text{compresible})$$

El término entre corchetes es aproximadamente igual a 1.02 a $M = 0.3$, y a 1.04 a $M = 0.4$. Por consiguiente, para cálculos de precisión de ingeniería, el flujo puede considerarse incompresible si $M < 0.3$. Los dos valores concuerdan dentro del 5 por ciento para $M \lesssim 0.045$.

12-4 CONDICIONES CRÍTICAS

Las condiciones de estancamiento son en extremo útiles como condiciones de referencias para las propiedades termodinámicas; esto no es cierto para la velocidad, puesto que por definición, $V = 0$ en el estancamiento. Un valor útil de referencia para esta velocidad es la *velocidad crítica* —la velocidad a un número de Mach igual a la unidad. Incluso si no hay un punto en un campo de flujo dado donde el número de Mach sea igual a la unidad, dicha condición hipotética sigue siendo útil como una condición de referencia.

Empleando asteriscos para denotar las condiciones a $M = 1$, entonces, por definición

$$V^* \equiv c^* \tag{12.18}$$

En condiciones críticas, las ecuaciones 12.17 para propiedades de estancamiento isentrópico se vuelven (para $k = 1.4$)

$$\frac{p_0^*}{p^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2} \right]^{k/(k-1)} = 1.893$$

$$\frac{T_0^*}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = 1.200$$

$$\frac{\rho_0^*}{\rho^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{1/(k-1)} = 1.577$$

La velocidad crítica puede escribirse ya sea en términos de la temperatura crítica, T^*, o la temperatura de estancamiento crítica, T_0^*.

Para un gas ideal, $c^* = \sqrt{kRT^*}$, y en consecuencia, $V^* = \sqrt{kRT^*}$. Como

$$T^* = \frac{T_0^*}{1 + (k-1)/2} = \frac{2}{k+1} T_0^*$$

entonces

$$V^* = c^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0^*} \tag{12.19}$$

Usaremos tanto las condiciones de estancamiento como las críticas como condiciones de referencia en el siguiente capítulo cuando consideremos una diversidad de flujos compresibles unidimensionales.

12-5 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el capítulo 12, usted será capaz de efectuar lo siguiente:

1. Definir los términos:
   - número de Mach
   - flujo subsónico
   - flujo supersónico
   - flujo transónico
   - cono de Mach
   - flujo hipersónico
   - ángulo de Mach
   - zona de acción
   - zona de silencio
   - propiedades locales de estancamiento isentrópico
   - condiciones críticas
2. Para un gas ideal, escribir expresiones para
   a) el cambio en la energía interna y la entalpía
   b) las ecuaciones $T\,ds$
   c) la relación entre la presión y la densidad en un proceso isentrópico
3. Obtener una expresión para la velocidad del sonido en un medio y mostrar que, para un gas ideal, $c = \sqrt{kRT}$.
4. Escribir (y deducir) expresiones para las propiedades locales de estancamiento isentrópico (temperatura, presión y densidad) para el flujo de un gas ideal.
5. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionen con el material que usted ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Zucrow, M. J., y J. D. Hoffman, *Gas Dynamics, Vol. 1.* Nueva York: Wiley, 1986, Capítulo 1.
2. Van Wylen, G. J., y R. E. Sonntag, *Fundamentals of Classical Thermodynamics (English/SI Version),* 3a. ed. Nueva York: Wiley, 1986, Capítulo 7.

PROBLEMAS

3.
4.
12.1
12.2
12.3
12.4
12.5
12.6
12.7
12.8
12

3. Moran, M. J., y H. N. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*. Nueva York: Wiley, 1988, Capítulo 6.

4. Wong, G. S. K., "Speed of Sound in Standard Air", *J. Acoustical Society of America, 79*, 5, mayo 1986, pp. 1359-1366.

PROBLEMAS

12.1 Cinco kg de aire en un sistema cerrado se expanden reversiblemente con entropía constante desde 300 kPa (abs), 60 C, hasta 150 kPa (abs). Calcule la temperatura del aire después de la expansión. Muestre los puntos de estado del proceso sobre un diagrama $T\,s$.

12.2 Se comprime aire irreversiblemente desde 100 kPa (abs), 5 C, hasta 200 kPa (abs), 115 C. Calcule el cambio en la entropía del aire. Muestre los puntos de estado del proceso en un diagrama $T\,s$.

12.3 Se enfría aire a presión constante desde 858 K y 4.5 MPa (manométrica) hasta 15 C. Ilustre el proceso en un diagrama $T\,s$. Calcule el cambio en la entropía específica para el aire si éste se comporta como un gas ideal. Evalúe el calor transferido por unidad de masa si el proceso es reversible.

12.4 Se comprime aire isotérmicamente desde condiciones estándar hasta 4.5 MPa (manométrica). Indique el proceso sobre un diagrama $T\,s$. Calcule el cambio en la entropía específica para el proceso si el aire se comporta como un gas ideal. Evalúe el calor transferido por unidad de masa si el proceso es reversible.

12.5 Se expande aire en un proceso de flujo estable a través de una turbina. Las condiciones iniciales son 1300 C y 2.0 MPa (abs). Las condiciones finales son 500 C y presión atmosférica. Muestre este proceso sobre un diagrama $T\,s$. Evalúe los cambios en la energía interna, la entalpía y la entropía específica en este proceso.

12.6 ¿Es posible una expansión adiabática de aire desde 300 kPa (abs), 60 C hasta 150 kPa (abs), 27 C? Justifique su respuesta. Muestre los puntos de estado del proceso sobre un diagrama $T\,s$.

12.7 Diez lbm de aire se enfrían de 500 a 100 F en un tanque cerrado. La presión inicial es 400 psia. Calcule los cambios en la entropía, la energía interna y la entalpía. Indique los puntos de estado del proceso sobre un diagrama $T\,s$.

12.8 En un sistema cerrado, un gas se somete a un ciclo conformado por los siguientes procesos: 1-2 compresión isotérmica reversible, 2-3 calentamiento a volumen constante reversible, 3-4 expansión a presión constante reversible y 4-1 expansión adiabática reversible.

a) Dibuje los diagramas $p\nu$ y $T\,s$ del ciclo.

b) Indique si cada una de las siguientes cantidades es positiva, cero, negativa o de signo indeterminado:

$$\oint \delta W, \quad \oint \delta Q, \quad \oint dS, \quad \oint dU, \quad \oint dH$$

12.9 Un gas ideal se calienta a volumen constante del estado ① al estado ②, se expande isotérmicamente al estado ③, se expande adiabáticamente al estado ④, el cual está a la misma presión que el estado ①, y finalmente regresa al estado ① por medio de un proceso a presión constante. Los cuatro procesos son reversibles.

a) Dibuje los diagramas $p\nu$ y $T\,s$ del ciclo.

b) Indique si cada una de las siguientes cantidades es positiva, cero, negativa o de signo indeterminado:

$$\oint \delta Q, \quad \oint \delta W, \quad \oint du, \quad \oint dh, \quad \oint ds$$

12.10 A una turbina entra aire en un flujo estable de 0.5 kg/s con velocidad despreciable. Las condiciones de entrada son 1300 C y 2.0 MPa (abs). El aire se expande a través de la turbina a presión atmosférica. Si la temperatura y velocidad reales en la salida de la turbina son 500 C y 200 m/s, determine la potencia producida por la turbina. Marque los puntos de estado correspondientes a este proceso en un diagrama Ts.

12.11 Un tanque contiene 10 m^3 de aire comprimido a 15 C. La presión manométrica en el tanque es 4.50 MPa. Evalúe el trabajo requerido para llenar el tanque comprimiendo aire a partir de condiciones atmosféricas estándar en *a)* una compresión isotérmica y *b)* una compresión isentrópica seguida por un enfriamiento a presión constante. ¿Cuál es la temperatura pico del proceso de compresión isentrópica? Calcule la energía extraída durante el enfriamiento en el proceso *b)*. Suponga comportamiento de gas ideal y procesos reversibles. Señale los puntos de estado sobre un diagrama Ts para cada proceso.

12.12 Gas natural, con las propiedades termodinámicas del metano, fluye en un gasoducto subterráneo de 0.6 m de diámetro. La presión manométrica en la entrada de una estación compresora es 0.5 MPa; la presión de salida es 8.0 MPa (manométrica). La temperatura y la velocidad del gas a la entrada son 13 C y 32 m/s, respectivamente. La eficiencia del compresor es $\eta = 0.85$. Calcule la relación de flujo másico del gas natural a través del gasoducto. Señale sobre un diagrama Ts los puntos de estado correspondientes a la entrada y salida del compresor. Evalúe la temperatura y velocidad del gas en la salida del compresor y la potencia requerida para accionar este último.

12.13 En un proceso isotérmico, 0.1 pies cúbicos de aire estándar por minuto (PCME) se bombean dentro de un globo. La tensión en el tejido plástico del globo está dada por $\sigma = kA$, donde $k = 200$ lbf/pies^3 y A es el área de la superficie del globo en pies^2. Calcule el tiempo necesario para aumentar el radio del globo de 5 a 7 pulgadas.

12.14 Un avión vuela a 960 km/hr a través de aire a 82 kPa y 0 C. Calcule el número de Mach del avión.

12.15 Un aeroplano vuela a 180 m/s y 500 m de altura en un día con condiciones estándar. Asciende a 15 km y vuela a 320 m/s. Calcule el número de Mach de vuelo en ambos casos.

12.16 El avión Boeing 727 del problema ejemplo 9.8 vuela a 520 mph y 33 000 pies de altura en un día con condiciones estándar. Calcule el número de Mach de vuelo del avión. Si el número de Mach de operación máximo permisible para el avión es 0.9, ¿cuál es la velocidad de vuelo correspondiente?

12.17 Las características de funcionamiento real del avión de reconocimiento "Blackbird" Lockheed SR-71 nunca se dieron a conocer. Sin embargo, se cree que volaba a $M = 3.3$ y 85 000 pies de altitud. Evalúe la velocidad del sonido y la velocidad de vuelo en estas condiciones. Compare con la velocidad de una bala en la boca de un rifle 30-06 (700 m/s).

12.18 ¿Cuál es la velocidad de sonido en bióxido de carbono a 150 C? ¿Cuál es la velocidad acústica en el agua a 20 C?

12.19 Se observa que la velocidad del sonido en acero será aproximadamente de 5.3 km/s. Estime el módulo volumétrico para el acero. Compare su estimación con el módulo volumétrico del mercurio. Calcule la velocidad del sonido en mercurio.

12.20 El heptano y el octano se emplean para definir los puntos de octanaje 0 y 100 para la gasolina. Emplee los datos del apéndice A para estimar el módulo volumétrico de la gasolina. Compare las velocidades del sonido en la gasolina y el agua.

‡12.21 Use los datos del volumen específico de una tabla de vapor para calcular y graficar la velocidad del sonido en agua líquida saturada, arriba del intervalo de temperatura de 32 a 400 F.

‡ Tal vez usted desee emplear programas de computadora sencillos para ayudarse a resolver los problemas marcados con doble obelisco.

12.22

12.23

12.24

12.25

12.26

12.27

12.28

12.29

12.30

12.31

12.32

12.33

12.34

12.22 El régimen de flujo transónico empieza alrededor de un valor $M = 0.9$. Compare las velocidades de flujo para las cuales el número de Mach es igual a 0.9 en *a*) aire y *b*) vapor de baja presión a 75 C (suponiendo que el vapor se comporta como un gas ideal), y verifique el resultado utilizando los datos de la tabla de vapor.

12.23 Datos publicados indican que el avión F-5G puede acelerar de $M = 0.9$ a $M = 1.2$ en 30 s, y de $M = 0.9$ a $M = 1.6$ en 80 s a 10 km de altura en un día con condiciones estándar. Exprese las relaciones promedio de aceleración del avión en *gs*.

12.24 Datos publicados indican que el avión F-5G es capaz de sustentar giros horizontales a una relación de 6°/s a $M = 0.7$ a 30 000 pies de altura. A $M = 1.6$ el avión puede sustentar un giro de 3.5°/s. Calcule el radio de curvatura y la aceleración producidos por estos giros.

12.25 La temperatura varía linealmente desde el nivel del mar hasta aproximadamente 11 km de altura en la atmósfera estándar. Evalúe el *gradiente térmico vertical* —la relación de reducción de la temperatura con la altitud— en la atmósfera estándar. Obtenga una expresión para la relación de cambio de la velocidad del sonido con la altura en un gas ideal bajo condiciones atmosféricas estándar. Evalúe a nivel del mar y a 10 km de altura.

12.26 Se emplean mezclas de helio y oxígeno en lugar de aire en tareas submarinas de larga duración para reducir el riesgo de provocar "aeroembolismos" durante la descompresión debido a la liberación de burbujas de nitrógeno en la corriente sanguínea. El habla del "acuanauta" que respira esta mezcla es extraña, debido parcialmente a que la velocidad del sonido cambia en la mezcla. Estime la constante de gas, la razón de calor específico y la velocidad del sonido en condiciones estándar en una mezcla que contiene 20 por ciento de oxígeno y 80 por ciento de helio en volumen.

12.27 Aire a 20 C fluye a 150 m/s. Se dispara una bala dentro de la corriente de aire a 800 m/s. (La dirección de la bala es opuesta a la del flujo de aire.) Calcule *a*) el número de Mach del flujo de aire, *b*) el número de Mach de la bala si ésta fuera disparada en aire quieto y *c*) el número de Mach de la bala con respecto al aire en movimiento.

12.28 La fotografía de una bala muestra un ángulo de Mach de 28°. Determine la velocidad de la bala en aire estándar.

12.29 Aire a 25 C fluye a $M = 1.9$. Determine la velocidad y el ángulo de Mach.

12.30 Con frecuencia se efectúan mediciones de flujos de aire de muy alta velocidad disparando proyectiles aguas arriba dentro de un flujo de gas de alta velocidad. Se lanza un proyectil a 4500 m/s en una corriente de helio a $M = 3.5$ y $T = -20$ C. Calcule el número de Mach del proyectil con respecto a la corriente de gas. ¿Qué ángulo de Mach esperaría en una fotografía?

12.31 Se lanza un proyectil dentro de un gas en el cual la presión es 50 psia y la densidad 0.27 lbm/pies^3. Se observa experimentalmente que un cono de Mach emana desde el proyectil con ángulo total de 20°. ¿Cuál es la velocidad del proyectil con respecto al gas?

12.32 Un avión F-4 pasa a alta velocidad sobre un campo de aterrizaje en un día en el que $T = 35$ C. El avión vuela a $M = 1.4$ y 200 m de altura. Calcule la velocidad del avión. ¿Qué tanto después de que el avión pasa directamente sobre el punto A en el suelo su cono de Mach lo hace sobre dicho punto?

12.33 La National Transonic Facility (NTF) es un túnel de viento de alta velocidad diseñado para operar con aire a temperaturas criogénicas para reducir la viscosidad, aumentando de esa manera el número de Reynolds unitario (Re/x) y reduciendo los requerimientos de potencia de bombeo. La operación se prevé a temperaturas de −270 F y menores. Un estiograma tomado en la NTF muestra un ángulo de Mach de 57° donde $T = -270$ F y $p = 1.3$ psia. Evalúe el número de Mach y la velocidad de flujo locales. Calcule el número de Reynolds unitario para el flujo.

12.34 Un avión F-5G pasa por arriba a 3 km de altura. El avión vuela a $M = 1.35$; suponga que la temperatura del aire tiene el valor constante de 30 C. Encuentre la velocidad del aire del avión. Un viento frontal sopla a 10 m/s. ¿Qué tanto después de que el avión pase directamente arriba su sonido alcanzará un punto en el suelo?

12.35 Un avión supersónico vuela a 10 000 pies de altura a una velocidad de 3000 pies/s en un día con condiciones estándar. ¿Qué tanto después de pasar directamente arriba de un observador en el suelo éste escucha el sonido del avión?

12.36 Para las condiciones del problema 12.34, encuentre la posición a la cual se emite la onda sonora que primero incide en el punto sobre el suelo.

12.37 El avión supersónico Concorde vuela a $M = 2.2$ a 17 km de altura en un día estándar. ¿Cuánto tiempo después de que el avión pasa directamente arriba de un observador en el suelo se escucha su sonido?

12.38 Fluye aire en un ducto a $T = 50$ F y $p = 10$ psia. Calcule la presión de estancamiento isentrópico si la velocidad del aire es *a*) 200 pies/s y *b*) 2000 pies/s.

12.39 Un avión está volando a 1500 m de altura. En un punto en el avión donde la velocidad relativa del aire es cero, la temperatura es 49 C. Determine el número de Mach y la velocidad del avión.

12.40 La densidad máxima en un campo de flujo compresible ocurre en condiciones de estancamiento. Evalúe los números de Mach para un flujo de aire al cual ρ_0 y ρ difieren en 2 y 5 por ciento. Comente acerca del significado de estos resultados.

12.41 La presión en la nariz de un avión en vuelo es 44.3 kPa (abs). (La velocidad del aire relativa a la nave es cero en este punto.) Estime el número de Mach, la velocidad y la altura del avión, si el aire no perturbado está a 27.6 kPa (abs) y −50 C.

12.42 Considere un flujo de aire estándar a 600 m/s. ¿Cuál es la presión local de estancamiento isentrópico? ¿La entalpía de estancamiento? ¿La temperatura de estancamiento?

12.43 Un cuerpo se mueve por aire estándar a 200 m/s. ¿Cuál es la presión en un punto sobre el cuerpo donde la velocidad del aire relativa al cuerpo es cero? Suponga *a*) flujo compresible y *b*) flujo incompresible.

12.44 Un avión DC-10 vuela a 12 km de altura en un día con condiciones estándar. Un tubo de pitot estático en la nariz del avión mide presiones de estancamiento y estática de 29.6 kPa y 19.4 kPa. Calcule *a*) el número de Mach de vuelo del avión, *b*) la velocidad del avión y *c*) la temperatura de estancamiento que registraría una sonda sobre el avión.

12.45 El avión supersónico anglo-francés "Concorde" vuela a $M = 2.2$ a 20 km de altura. Evalúe la velocidad del sonido, la velocidad de vuelo del avión y el ángulo de Mach. Compare la velocidad del avión con la velocidad de una bala en la boca de un rifle de calibre .22 (460 m/s). ¿Cuál es la máxima temperatura del aire en puntos de estancamiento sobre la estructura del avión?

12.46 Un avión jet de pasajeros vuela a $M = 0.85$ y 12.5 km de altura en un día en condiciones estándar. Evalúe la presión de estancamiento registrada por medio de una sonda sobre el avión. ¿Qué velocidad se calcularía a partir de la ecuación incompresible de Bernoulli? ¿Qué porcentaje de error hay en esta velocidad en comparación con la velocidad real del avión?

12.47 Un cañón de bala de 12 libras de ánima lisa empleado sobre un buque velero dispara un proyectil esférico de hierro fundido, con diámetro $D = 110$ mm y masa $m = 5.44$ kg, horizontalmente a nivel del mar en un día con condiciones estándar. Inicialmente el proyectil viaja a velocidad supersónica, pero es frenado rápidamente por el arrastre aerodinámico. En el instante en que la velocidad es sónica, estime *a*) la aceleración horizontal del proyectil (suponga que el coeficiente de arrastre para la esfera a velocidad sónica es $C_D = 1.3$), *b*) la presión máxima sobre la superficie del proyectil y *c*) la máxima temperatura del aire cerca de la superficie del proyectil.

12.48 La sección de prueba de un túnel de viento supersónico se diseñó para tener $M = 3.0$ a 60 F y 5 psia. El fluido es aire. Determine las condiciones de entrada requeridas (estancamiento), T_0 y p_0. Calcule la relación de flujo másico requerida en un área de sección de prueba de 2.0 pies^2.

12.49 Aire fluye establemente a través de un tramo de un ducto aislado de área constante (① denota la entrada y ② denota la salida). Las propiedades cambian a lo largo del ducto como resultado de la fricción.

12.50

12.51

12.52

12.53

12.54

12.55

a) Empezando con la forma del volumen de control de la primera ley de la termodinámica, demuestre que la ecuación puede reducirse a

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = \text{constante}$$

b) Denotando la constante por h_0 (la entalpía de estancamiento), muestre que para el flujo adiabático de un gas ideal con fricción

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$$

c) ¿Para este flujo, ¿$T_{0_1} = T_{0_2}$? ¿ $p_{0_1} = p_{0_2}$?

12.50 Según la revista *Popular Science*, la máxima velocidad del aire en el carburador de venturi variable de Ford es aproximadamente 430 pies/s. En condiciones atmosféricas de un día estándar, evalúe la presión estática mínima en el venturi. ¿Qué porcentaje de error en la presión estática calculada resultaría si este cálculo se hiciera suponiendo flujo incompresible?

12.51 En el vuelo de aviones a velocidades supersónicas, los coeficientes de sustentación y arrastre son funciones exclusivas del número de Mach. Un avión de pasajeros supersónico con envergadura de 75 m va a volar a 780 m/s y a 20 km de altura en un día con condiciones estándar. Se va a medir el funcionamiento del avión a partir de pruebas en un modelo con envergadura de 0.9 m en un túnel de viento supersónico. El túnel de viento se va a alimentar de un gran depósito de aire comprimido, el cual puede calentarse si se desea. La temperatura estática del aire en la sección de prueba será de 10 C para evitar el congelamiento de la humedad. ¿A qué velocidad del aire deben efectuarse las pruebas del túnel de viento para duplicar el número de Mach del prototipo? ¿Cuál debe ser la temperatura de estancamiento en el depósito? ¿Qué presión se requiere en el depósito si la presión en la sección de prueba va a ser de 10 kPa (abs)?

12.52 La sección de prueba de un túnel de viento transónico opera a $M = 1.2$, con $T = -34$ C y $p = 41.8$ kPa (abs). Calcule las condiciones locales de estancamiento isentrópico para este flujo. Una onda de choque normal se forma adelante de un tubo de pitot estático situado en la corriente de flujo. El tubo de carga total mide una presión de estancamiento de 100.6 kPa (abs). Determine la pérdida en la presión de estancamiento en la onda de choque normal. ¿En qué porcentaje se reduce la presión local de estancamiento isentrópico en comparación con el valor aguas arriba?

12.53 La sección de prueba de un túnel de viento supersónico opera a $M = 1.8$, con $T = -80$ C y $p =$ 258 kPa (manométrica). Una onda de choque normal que permanece frente de un tubo de carga total reduce la presión de estancamiento en 18.7 por ciento. Calcule *a*) las condiciones locales de estancamiento isentrópico para las condiciones de la sección de prueba y *b*) la presión registrada por el tubo de carga total.

12.54 Datos publicados indican que el avión F-5G tiene una velocidad máxima de $M = 2.1$ a 36 000 pies de altitud en un día con condiciones estándar. Calcule la velocidad de vuelo del avión. Determine la presión local de estancamiento isentrópico que corresponde a estas condiciones de vuelo. Debido a que la velocidad del avión es supersónica, una onda de choque normal ocurre en el frente de un tubo de carga total. La presión de estancamiento disminuye en 32.6 por ciento a través de la onda de choque. Evalúe la presión de estancamiento registrada por una sonda sobre el avión. ¿Cuál es la temperatura máxima del aire en puntos de estancamiento sobre la estructura del avión?

12.55 Las características de funcionamiento real del avión de reconocimiento "Blackbird" Lockheed SR-71 eran información clasificada. Sin embargo, se pensaba que volaba a $M = 3.3$ a 26 km de altura. Calcule la velocidad de vuelo del avión en estas condiciones. Determine la presión local de estancamiento isentrópico. En virtud de que la velocidad del avión es supersónica, ocurre una onda de choque normal en el frente de un tubo de carga total. La presión de estancamiento disminuye en 74.7 por ciento a través de la onda de choque. Evalúe la presión de estancamiento registrada por

una sonda sobre el avión. ¿Cuál es la temperatura máxima del aire en puntos de estancamiento sobre la estructura del avión?

12.56 Entra aire a un ducto largo aislado a $M_1 = 0.2$, $T_1 = 286$ K y $p_1 = 98.5$ kPa (abs). Aguas abajo las propiedades son $M_2 = 0.6$, $T_2 = 268.9$ K y $p_2 = 31.3$ kPa (abs). (Se incluyen cuatro cifras significativas para minimizar errores de redondeo.) Evalúe las condiciones locales de estancamiento isentrópico *a*) en la sección de entrada y *b*) en la sección de salida. Calcule el cambio en la entropía específica en la entrada del ducto. Grafique los puntos de estado estático y de estancamiento en un diagrama T-s.

12.57 Entra aire a una cámara de combustión a $M_1 = 0.2$, $T_1 = 580$ K y $p_1 = 1.0$ MPa (abs). La adición de calor causa que las propiedades a la salida sean $M_2 = 0.4$, $T_2 = 1727$ K y $p_2 = 852.7$ kPa (abs). (Se incluyen cuatro cifras significativas para minimizar errores de redondeo.) Evalúe las condiciones locales de estancamiento isentrópico *a*) en la entrada y *b*) en la salida de la cámara de combustión. Calcule el cambio en la entropía específica a través del combustor. Grafique los puntos de estado estático y de estancamiento en un diagrama T-s.

12.58 Aire pasa por una onda de choque normal en un túnel de viento supersónico. Las condiciones aguas arriba son $M_1 = 1.8$, $T_1 = 270$ K y $p_1 = 10.0$ kPa (abs). Las condiciones aguas abajo son $M_2 = 0.6165$, $T_2 = 413.6$ K y $p_2 = 36.13$ kPa (abs). (Se incluyen cuatro cifras significativas para minimizar errores de redondeo.) Evalúe las condiciones locales de estancamiento isentrópico *a*) aguas arriba y *b*) aguas abajo de la onda de choque normal. Calcule el cambio en la entropía específica a través de la onda de choque. Grafique los puntos de estado estático y de estancamiento en un diagrama T-s.

12.59 Entra aire a una turbina a $M_1 = 0.4$, $T_1 = 2350$ F y $p_1 = 90.0$ psia. Las condiciones a la salida de la turbina son $M_2 = 0.8$, $T_2 = 1200$ F y $p_2 = 3.00$ psia. (Se incluyen cuatro cifras significativas para minimizar errores de redondeo.) Evalúe las condiciones locales de estancamiento isentrópico *a*) en la entrada de la turbina y *b*) en la salida de la turbina. Calcule el cambio en la entropía específica a través de la turbina. Grafique los puntos de estado estático y de estancamiento en un diagrama T-s.

12.60 Un Boeing 747 vuela a $M = 0.87$ y a una altura de 13 km en un día con condiciones estándar. Se localiza una ventana en la cabina del piloto donde el número de Mach del flujo externo es 0.2 relativo a la superficie del avión. La cabina está presurizada a una altitud equivalente de 2500 m en una atmósfera estándar. Estime la diferencia de presión de un lado al otro de la ventana. Asegúrese de especificar la dirección de la fuerza de presión neta.

12.61 Considere de nuevo el compresor del gasoducto del problema 12.12. Calcule las condiciones locales de estancamiento isentrópico para el flujo de gas *a*) en la entrada del compresor y *b*) en la salida del compresor. Calcule el cambio en la entropía específica a través del compresor. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento sobre un diagrama T-s. (La temperatura y el número de Mach a la salida del compresor son 572 K y 0.0762, respectivamente.)

12.62 Fluye aire establemente por un ducto de área constante. En la sección ①, el aire está a 60 psia, 600 R y 500 pies/s. Como resultado de la transferencia térmica y de la fricción, el aire en la sección ② aguas abajo se encuentra a 40 psia, 800 R. Calcule la transferencia térmica por libra de aire entre las secciones ① y ② así como la presión de estancamiento en la sección ②.

12.63 Fluye aire por un ducto de área constante. En la sección ①, las condiciones son 550 K, 973 kPa (abs) y $M_1 = 0.20$. En la sección ②, el flujo se encuentra a 1100 K, 910 kPa (abs) y $M_2 = 0.30$. Calcule la entalpía de estancamiento, la temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento en las secciones ① y ②. ¿El flujo es isentrópico? Justifique su respuesta.

12.64 Considere un flujo adiabático y estable de aire a través de una larga tubería recta con $A = 0.05$ m^2. En la entrada (sección ①), el aire está a 200 kPa (abs), 60 C y 146 m/s. Aguas abajo en la sección ②, las condiciones del aire son 95.6 kPa (abs) y 280 m/s. Determine p_{0_1}, p_{0_2}, T_{0_1}, T_{0_2} y el cambio

de entropía para el flujo. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento sobre un diagrama T s.

12.65 Fluye aire establemente a través de un ducto de área constante. En la sección ①, el aire se encuentra a 60 psia, 600 R y 500 pies/s. Como un resultado de la transferencia del calor y la fricción, el aire en la sección ② aguas abajo está a 40 psia, 800 R. Determine p_{0_1}, p_{0_2}, T_{0_1}, T_{0_2} y el cambio de entropía para el flujo. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento sobre un diagrama T s.

12.66 Todos los aviones modernos de alta velocidad emplean "computadoras de datos de aire" para calcular la velocidad del aire a partir de la presión dinámica medida. Evalúe el número de Mach subsónico arriba del cual la ecuación incompresible de Bernoulli predice un error de velocidad de 2 por ciento comparada con la verdadera velocidad del aire, calculada incluyendo efectos de compresibilidad. Suponga un vuelo a 10 km de altitud en un día con condiciones estándar. ¿El resultado que usted obtiene es independiente de las condiciones de corriente libre?

12.67 La *razón de presión crítica*, p^*/p_0^*, es la razón entre la presión estática y la presión local de estancamiento isentrópico en la condición en que $V = V^* = c^*$. Para un gas ideal, la razón de presión crítica es una función sólo de la razón de calor específico, k. Muestre que para el aire, $p^*/p_0^* = 0.5283$. Por comparación, evalúe las razones de presión crítica para gases con los valores de k máximo y mínimo dados en la tabla A.6.

12.68 Las llantas en una ligera bicicleta moderna se inflan hasta 800 kPa (manométrica). Considere un día en el que una llanta está en equilibrio con el ambiente a 37 C. Calcule las condiciones críticas (temperatura, presión y velocidad de flujo) que corresponden a estas condiciones de estancamiento.

12.69 Un tanque de una gasolinera contiene aire a 800 kPa (manométrica) y 30 C. Calcule las condiciones críticas (temperatura, presión y velocidad de flujo) que corresponden a estas condiciones de estancamiento.

12.70 Un cartucho de CO_2 se emplea para impulsar un cohete de juguete. El gas en el cartucho está presurizado a 45 MPa (manométrica) y se encuentra a 25 C. Calcule las condiciones críticas (temperatura, presión y velocidad de flujo) que corresponden a estas condiciones de estancamiento.

12.71 Un extinguidor de incendios, lleno con gas dióxido de carbono, está presurizado a 35 MPa (manométrica) y almacenado a 30 C. Calcule las condiciones críticas (temperatura, presión y velocidad de flujo) que corresponden a estas condiciones de estancamiento.

12.72 El depósito de almacenamiento de gas de un túnel de viento de alta velocidad contiene helio a 2500 K y 6.0 MPa (manométrica). Calcule las condiciones críticas (temperatura, presión y velocidad de flujo) que corresponden a estas condiciones de estancamiento.

12.73 Las condiciones de estancamiento en un motor de cohete con propulsor sólido son $T_0 = 3500$ K y $p_0 = 40$ MPa (manométrica). Las condiciones críticas ocurren en la garganta de la tobera del cohete donde el número de Mach es igual a uno. Evalúe la temperatura, presión y velocidad de flujo en la garganta. Suponga un comportamiento de gas ideal con $R = 323$ J/kg · K y $k = 1.2$.

12.74 Considere el ducto de gas natural del problema 12.12. Calcule las condiciones críticas (temperatura, presión y velocidad de flujo) que corresponden a las condiciones de entrada del compresor.

12.75 La corriente de gas caliente en la entrada de la turbina de un motor de reacción JT9-D se encuentra a 2350 F, 140 kPa (abs) y $M = 0.32$. Calcule las condiciones críticas (temperatura, presión y velocidad de flujo) que corresponden a estas condiciones. Suponga propiedades de fluido equivalentes a las de aire puro.

Capítulo 13

Flujo compresible, unidimensional y estable

Las propiedades del fluido en flujo compresible son afectadas por el cambio en el área, la fricción, la transferencia de calor y las ondas de choque normales. En este capítulo cada uno de estos efectos se considerará por separado para un flujo compresible, unidimensional y estable.

El flujo isentrópico, en el cual el área es la variable independiente (se ignoran la fricción y la transferencia de calor), se considera primero para un fluido general. Luego se consideran con mayor detalle el flujo isentrópico de un gas ideal y las aplicaciones en toberas.

Después del flujo isentrópico, se tratan el flujo adiabático en un ducto de área constante con fricción y el flujo sin fricción en un ducto de área constante con transferencia de calor. El capítulo concluye con un análisis de las ondas de choque normales y los flujos supersónicos en canales con ondas de choque.

13-1 ECUACIONES BÁSICAS PARA EL FLUJO ISENTRÓPICO

Considere el flujo isentrópico, unidimensional y estable de cualquier fluido compresible a través de un canal de sección transversal arbitraria; una parte de tal ducto se muestra en la figura 13.1. Para desarrollar las ecuaciones gobernantes correspondientes a este flujo, aplicamos las ecuaciones

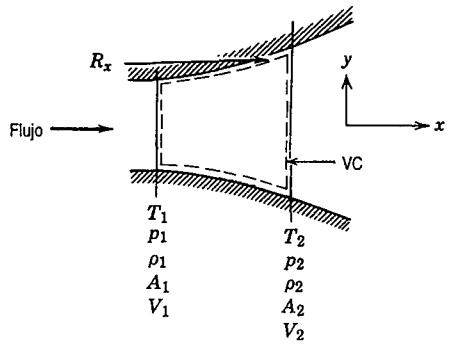


Fig. 13.1 Volumen de control para el análisis de un flujo isentrópico general.

básicas, deducidas en el capítulo 4, al volumen de control fijo y finito de la figura 13.1. Las propiedades en las secciones ① y ② se marcan con subíndices apropiados; R_x es la componente x de la fuerza superficial que actúa sobre el volumen de control.

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo unidimensional

Entonces

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

Utilizando magnitudes escalares y eliminando los signos de valor absoluto se obtiene la forma familiar

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \dot{m} = \text{constante} \tag{13.1a}$$

b. Ecuación de momento

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(3)} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposiciones: 3) $F_{B_x} = 0$

La fuerza superficial será producto de las fuerzas de presión en las superficies ① y ②, y de la fuerza de presión distribuida, R_x, a lo largo de las paredes del canal. La sustitución produce

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = V_1\{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

Empleando magnitudes escalares y eliminando los signos del valor absoluto, obtenemos

$$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13.1b}$$

c. Primera ley de la termodinámica

Ecuación básica:

$$\cancel{\dot{Q}}^{=0(4)} - \cancel{\dot{W}_s}^{=0(5)} - \cancel{\dot{W}_{corte}}^{=0(6)} - \cancel{\dot{W}_{otro\ tipo}}^{=0(6)} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} e\rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

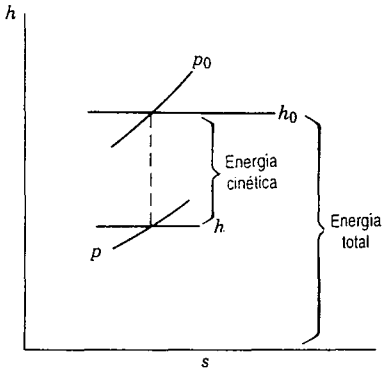


Fig. 13.3 Diagrama esquemático *hs* que ilustra la interpretación de la energía por unidad de masa en un flujo.

sugiere otra interpretación para la entalpía de estancamiento: la entalpía de estancamiento, h_0, representa la energía total por unidad de masa del fluido que fluye. La energía cinética por unidad de masa se representa por medio de la diferencia de entalpía, $h_0 - h$, como se ilustra gráficamente en la figura 13.3.

Las ecuaciones de la 13.1a a la 13.1f son las formas simplificadas de las ecuaciones básicas que describen el flujo isentrópico, unidimensional y estable de cualquier fluido compresible. Hay seis ecuaciones independientes. Si todas las propiedades del flujo se conocen en el estado ①, entonces tenemos un total de siete incógnitas (p_2, A_2, V_2, ρ_2, h_2, s_2 y R_x) en estas seis ecuaciones. En consecuencia, un flujo isentrópico puede proceder a una diversidad de estados a partir del estado ①. Cada uno de tales estados debe tener $s_2 = s_1$, cumpliéndose la ecuación 13.1d. Esto deja, en efecto, seis incógnitas y cinco ecuaciones, y el problema es indeterminado. Para determinar las condiciones en el estado ②, debe especificarse una de las seis incógnitas.

¿Qué es lo que provoca que las propiedades de un fluido cambien en un flujo isentrópico? Sin duda usted reconocerá que es la variación del área. En la siguiente sección, analizamos el efecto de la variación del área sobre las propiedades en flujo isentrópico.

13-2 EFECTO DE LA VARIACIÓN DEL ÁREA SOBRE LAS PROPIEDADES EN FLUJO ISENTRÓPICO

Al considerar el efecto de la variación del área sobre las propiedades de fluido en flujo isentrópico, debemos estar interesados principalmente en la velocidad y la presión. Deseamos determinar el efecto de un cambio en el área, A, en la velocidad, V, y en la presión, p; esto es, para un cambio dA en el área, ¿dV y dp son positivas o negativas?

Para responder estas cuestiones, conviene trabajar con las formas diferenciales de las ecuaciones gobernantes. Éstas se obtuvieron para el volumen de control diferencial de la figura 12.3 (sección 12-3.1). La ecuación de momento diferencial para flujo isentrópico se reduce a

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \qquad (12.16c)$$

o

$$dp = -\rho V\, dV$$

Dividiendo entre ρV^2, obtenemos

$$\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V} \tag{13.2}$$

Una forma diferencial conveniente de la ecuación de continuidad puede obtenerse de la ecuación 13.1a,

$$\rho A V = \text{constante} \tag{13.1a}$$

Al tomar los logaritmos naturales en ambos lados,

$$\ln \rho + \ln A + \ln V = \ln C$$

Diferenciando,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \tag{13.3}$$

La solución de la ecuación 13.3 para dA/A produce

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V} - \frac{d\rho}{\rho}$$

Sustituyendo de la ecuación 13.2,

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} - \frac{d\rho}{\rho}$$

o

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2}\left[1 - \frac{V^2}{dp/d\rho}\right]$$

Después de esto recordamos que en un proceso isentrópico, $dp/d\rho = \partial p/\partial \rho_s = c^2$, por lo que

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2}\left[1 - \frac{V^2}{c^2}\right] = \frac{dp}{\rho V^2}[1 - M^2] \tag{13.4}$$

De la ecuación 13.4, vemos que para $M < 1$, un cambio de área provoca un cambio de presión del mismo signo (dA positiva significa dp positiva para $M < 1$); para $M > 1$, un cambio de área ocasiona un cambio de presión de signo opuesto.

Al sustituir la ecuación 13.2 en la ecuación 13.4, obtenemos

$$\frac{dA}{A} = \frac{-dV}{V}[1 - M^2] \tag{13.5}$$

De acuerdo con la ecuación 13.5, vemos que para $M < 1$ un cambio de área provoca un cambio de velocidad de signo opuesto (dA positiva significa dV negativa para $M < 1$); para $M > 1$ un cambio de área ocasiona un cambio de velocidad del mismo signo.

Estos resultados se resumen en la figura 13.4. Para flujos subsónicos ($M < 1$), la aceleración del flujo en una *tobera* requiere un pasaje cuya sección transversal disminuya; el área debe reducirse para provocar un aumento de velocidad. Lo anterior produce un pasaje con una forma

como la que se muestra en la parte superior izquierda de la figura 13.4, y este resultado concuerda con nuestra experiencia. Un *difusor* subsónico requiere que el área del pasaje aumente para provocar una disminución de velocidad. También en este caso este resultado concuerda con nuestra experiencia.

En flujos supersónicos ($M > 1$), los efectos del cambio de área son diferentes. De acuerdo con la ecuación 13.5, una *tobera supersónica* debe construirse con un aumento de área en la dirección de flujo. Un *difusor supersónico* debe ser un canal convergente. A pesar de que estas predicciones pueden ser contrarias a nuestra experiencia, los experimentos de laboratorio muestran que son válidas. También podemos recordar haber visto toberas divergentes diseñadas para producir flujo supersónico en misiles y vehículos de lanzamiento.

¿Qué pasa con el caso restante, $M = 1$? Una inspección más amplia de la ecuación 13.5 muestra que en $M = 1$, $dA/dV = 0$; esto significa que el área del canal debe pasar por un mínimo o un máximo en $M = 1$. La inspección de la figura 13.4 indica que $M = 1$ puede alcanzarse sólo en una *garganta*, o sección de área mínima.

Para acelerar el flujo desde el reposo hasta velocidad supersónica ($M > 1$) se requiere primero una *tobera convergente* subsónica. Bajo condiciones apropiadas, el flujo estará en $M = 1$ en la garganta, donde el área es un mínimo. Es posible una aceleración adicional si un segmento de *tobera divergente* supersónica se añade aguas abajo de una garganta. El flujo isentrópico en toberas convergentes se tratará en la sección 13-3.4, y el flujo isentrópico en toberas convergentes-divergentes se cubrirá en la sección 13-3.5.

Desacelerar el flujo de una velocidad supersónica ($M > 1$) a una subsónica requiere primero un difusor supersónico (convergente). En teoría, la velocidad de flujo podría reducirse isentrópicamente a $M = 1$ en una garganta donde el área fuera un mínimo, y una desaceleración isentrópica adicional podría tomar lugar en una sección de un difusor subsónico divergente. En la práctica, el flujo supersónico no puede desacelerarse exactamente hasta $M = 1$ en la garganta debido a que el flujo sónico cerca de ella es inestable en un gradiente de presión creciente (adverso). (Las perturbaciones que siempre se presentan en un flujo subsónico real se propagan aguas arriba,

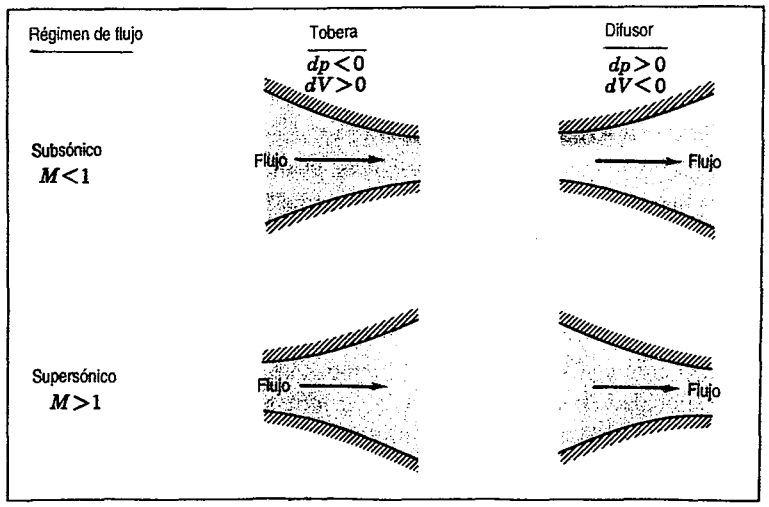


Fig. 13.4 Formas de tobera y de difusor como una función del número de Mach inicial.

perturbando el flujo sónico en la garganta y provocando la formación de ondas de choque y su desplazamiento aguas arriba, donde se descargan desde la entrada del difusor supersónico.)

El área de la garganta de un difusor supersónico real debe ser ligeramente más grande que el requerido para reducir el flujo a $M = 1$. En las condiciones aguas abajo apropiadas, se forma una débil onda de choque normal en el canal divergente justo aguas abajo de la garganta. El flujo que se desprende de la onda de choque es subsónico y se desacelera en el canal divergente. De modo que la desaceleración del flujo supersónico a subsónico no puede ocurrir isentrópicamente en la práctica, ya que la débil onda de choque normal ocasiona un aumento en la entropía. Las ondas de choque normales se analizarán en la sección 13-6.

En flujos que se aceleran (gradientes de presión favorables), la idealización de flujo isentrópico es por lo general un modelo realista del comportamiento de flujo real. Cuando se trata de flujos que se desaceleran, la idealización de flujo isentrópico puede no ser un modelo realista debido a los gradientes de presión adversos y a la posibilidad concurrente de separación de flujo, como se analizó para el flujo de capa límite incompresible en el capítulo 9.

13-3 FLUJO ISENTRÓPICO DE UN GAS IDEAL

13-3.1 Ecuaciones básicas

En la sección 13-1, aplicamos las ecuaciones básicas a un volumen de control finito correspondiente al flujo isentrópico, unidimensional y estable de cualquier fluido compresible. Para restringir nuestro análisis a un gas ideal, sólo necesitamos modificar la ecuación de estado. Para un gas ideal, la ecuación de estado es $p = \rho RT$. Además, en el caso del flujo isentrópico de un gas ideal, tenemos la ecuación de proceso, p/ρ^k = constante. Por tanto, para el flujo isentrópico de un gas ideal, podemos resumir las ecuaciones básicas como sigue:

Continuidad:	$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \rho V A = \dot{m}$	(13.1a)
Momento:	$R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1$	(13.1b)
Primera ley:	$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h + \frac{V^2}{2}$	(13.1c)
Segunda ley:	$s_1 = s_2 = s$	(13.1d)
Ecuación de estado:	$p = \rho RT$	(12.1)
Ecuación de proceso:	p/ρ^k = constante	(12.11b)

Éstas son las ecuaciones gobernantes para el flujo isentrópico, unidimensional y estable de un gas ideal. Si se conocen todas las propiedades en el estado ①, tenemos entonces ocho incógnitas (ρ_2, A_2, V_2, p_2, h_2, s_2, T_2 y R_x) en estas seis ecuaciones. Sin embargo, disponemos de la conocida relación entre h y T para un gas ideal, $dh = c_p dT$. Para un gas ideal con calores específicos constantes,

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \, \Delta T = c_p \, (T_2 - T_1) \tag{12.7b}$$

Por consiguiente, como en el caso general (sección 13-1), el problema es indeterminado. Una

condición (aparte de s_2) debe especificarse en el estado ② antes de que puedan determinarse por completo las condiciones en dicho estado.

13-3.2 Condiciones de referencia para el flujo isentrópico de un gas ideal

En el capítulo 12 (sección 12-3.1) se desarrollaron expresiones para las propiedades locales de estancamiento isentrópico para un gas ideal. Para completar la exposición, se repiten aquí estas expresiones.

Presión de estancamiento:
$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)} \tag{12.17a}$$

Temperatura de estancamiento:
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \tag{12.17b}$$

Densidad de estancamiento:
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)} \tag{12.17c}$$

Como se mostró en la sección 13-1, las propiedades de estancamiento son constantes en todas partes en un campo de flujo isentrópico estable.

Las condiciones críticas —propiedades del flujo en las cuales el número de Mach es la unidad— se presentaron en la sección 12-3.2. Puesto que las propiedades de estancamiento son constantes en un flujo isentrópico, entonces de las ecuaciones 12-17 podemos escribir, para $k = 1.4$,

$$\frac{p_0}{p^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{k/(k-1)} = 1.893; \qquad \frac{p^*}{p_0} = 0.5283$$

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = 1.200; \qquad \frac{T^*}{T_0} = 0.8333$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{1/(k-1)} = 1.577$$

Además, de la ecuación 12.19, tenemos

$$V^* = c^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0}$$

En la sección 13-2, vimos que era necesario que un pasaje tuviera una sección de área mínima (una garganta) para acelerar un flujo isentrópicamente desde el reposo hasta un número de Mach más grande que la unidad. Además, en tal flujo, $M = 1$ en la garganta. Si el área a la cual el número de Mach es la unidad se denomina A^*, es posible entonces expresar el contorno de un pasaje en términos de la razón de áreas A/A^*.

Para flujo unidimensional y estable, la ecuación de continuidad puede escribirse

$$\rho AV = \text{constante} = \rho^* A^* V^*$$

Por tanto,

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{V^*}{V} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{c^*}{Mc} = \frac{1}{M}\frac{\rho^*}{\rho}\sqrt{\frac{T^*}{T}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{\frac{T^*/T_0}{T/T_0}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\frac{\left[1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right]^{1/(k-1)}}{\left[1+\dfrac{k-1}{2}\right]^{1/(k-1)}}\left[\frac{1+\dfrac{k-1}{2}M^2}{1+\dfrac{k-1}{2}}\right]^{1/2}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1+\dfrac{k-1}{2}M^2}{1+\dfrac{k-1}{2}}\right]^{(k+1)/2(k-1)} \tag{13.6}$$

De la ecuación 13.6, vemos que una elección de M produce un valor único de A/A^*. La variación de A/A^* con M se muestra en la figura 13.5. La curva es de doble valor; para cualquier A/A^* diferente de la unidad, hay dos posibles valores del número de Mach. Esto es congruente con los resultados de la sección 13-2 (véase la figura 13.4), donde se encontró que se requiere un pasaje convergente-divergente con una sección de área mínima para acelerar de la velocidad subsónica a la supersónica.

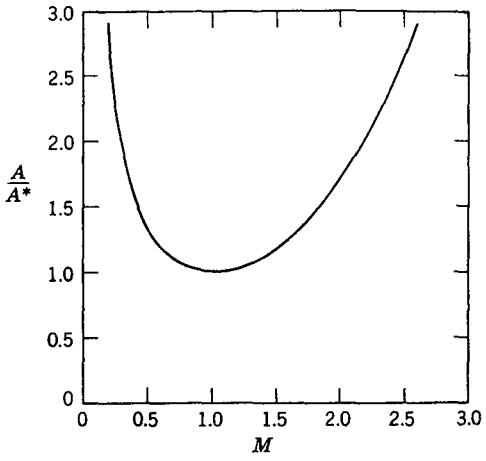


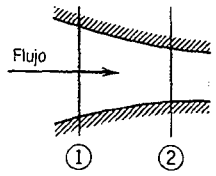
Fig. 13.5 Variación de A/A^* con el número de Mach en el flujo isentrópico de un gas ideal con $k = 1.4$.

EJEMPLO 13.1 Fluido isentrópico en un canal convergente

Fluye aire isentrópicamente en un canal. En la sección ①, el número de Mach es 0.3, el área es 0.001 m² y la presión absoluta y la temperatura son 650 kPa y 62 C, respectivamente. En la sección ②, el número de Mach es 0.8. Dibuje la forma del canal, elabore un diagrama *Ts* para el proceso y evalúe las propiedades en la sección ②.

PROBLEMA EJEMPLO 13.1

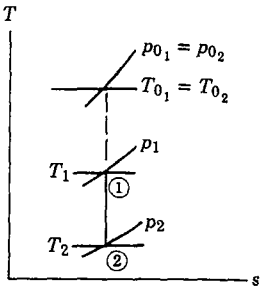
DATOS: Un flujo isentrópico de aire en un canal. En las secciones ① y ② se proporcionan los siguientes datos: $M_1 = 0.3$, $T_1 = 62$ C, $p_1 = 650$ kPa (abs), $A_1 = 0.001$ m^2 y $M_2 = 0.8$.



ENCUENTRE: *a*) Dibuje la forma del canal.
b) Elabore un diagrama *Ts* para el proceso.
c) Las propiedades en la sección ②.

SOLUCIÓN:

Acelerar un flujo subsónico requiere una tobera convergente. La forma del canal debe ser como se muestra.



En el plano *Ts*, el proceso sigue una línea, s = constante. Las condiciones de estancamiento permanecen fijas para flujo isentrópico.

En consecuencia, puede calcularse la temperatura de estancamiento en la sección ② (para el aire, $k = 1.4$) de

$$T_{0_2} = T_{0_1} = T_1\left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right]$$

$$= (62 + 273)\text{ K}\left[1 + \frac{1.4-1}{2}(0.3)^2\right]$$

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 341\text{ K} \longleftarrow T_{0_1}, T_{0_2}$$

y

$$T_2 = \frac{T_{0_2}}{\left[1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right]} = \frac{341\text{ K}}{[1 + 0.2(0.8)^2]} = 302\text{ K o }29\text{ C} \longleftarrow T_2$$

Además, para un gas ideal,

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = \left[1.4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 302\text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 3.48\text{ m/s} \longleftarrow c_2$$

De la definición del número de Mach,

$$V_2 = M_2 c_2 = (0.8)348\text{ m/s} = 278\text{ m/s} \longleftarrow V_2$$

Utilizando la relación isentrópica, p/ρ^k = constante, y la ecuación de estado de gas ideal, obtenemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{302\text{ K}}{335\text{ K}}\right)^{3.5} = 0.696$$

y

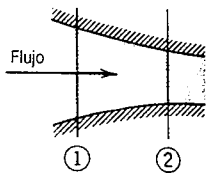
$$p_2 = 0.696\,p_1 = (0.696)650\text{ kPa (abs)} = 452\text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

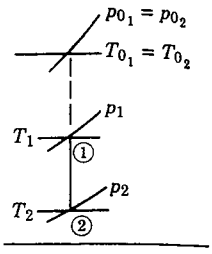
Además,

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 4.52\times 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\text{ N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{302\text{ K}} = 5.21\text{ kg/m}^3 \longleftarrow \rho_2$$

****13-3.3 Tabl**

2) se proporcionan los
001 m² y $M_2 = 0.8$.





T_{0_1}, T_{0_2}

29 C T_2

c_2

V_2

gas ideal, obtenemos

(abs) p_2

21 kg/m³ ρ_2

De la ecuación de continuidad,

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \text{constante}$$

por lo que

$$A_2 = A_1 \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{V_1}{V_2} = A_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(k-1)} \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2} = A_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(k-1)} \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{kRT_1}{kRT_2}}$$

o

$$A_2 = A_1 \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{(k+1)/2(k-1)} = 0.001 \text{ m}^2 \times \frac{0.3}{0.8}\left(\frac{335}{302}\right)^3 = 5.12 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \longleftarrow A_2$$

De tal modo, $A_2 < A_1$, como se esperaba. Por último,

$$p_{0_2} = p_2\left[1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right]^{k/(k-1)} = 452 \text{ kPa}[1 + 0.2(0.8)^2]^{3.5}$$

$$p_{0_2} = 689 \text{ kPa (abs)} \quad \longleftarrow p_{0_2}$$

La presión de estancamiento debe ser constante en un flujo isentrópico. La verificación produce

$$p_{0_1} = p_1\left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{k/(k-1)} = 650 \text{ kPa}[1 + 0.2(0.3)^2]^{3.5}$$

$$p_{0_1} = 692 \text{ kPa (abs)}$$

La discrepancia entre los valores calculados de p_{0_1} y p_{0_2} se debe al empleo de temperaturas redondeadas hasta tres cifras significativas para calcular p_{0_2}. Por consiguiente, observamos otra vez para flujo isentrópico que $T_{0_1} = T_{0_2}$ y $p_{0_1} = p_{0_2}$.

**13-3.3 Tablas para el cálculo del flujo isentrópico de un gas ideal

En la sección anterior, vimos (ecuaciones 12.17a, 12.17b, 12.17c y 13.6) que las propiedades en un punto en un flujo compresible de un gas ideal pueden relacionarse con condiciones de referencia apropiadas mediante funciones del número de Mach local. Esto posibilita tabularlas o graficarlas como funciones del número de Mach para una k dada.

La tabla E.1 del apéndice E lista los valores de T/T_0, p/p_0 ρ/ρ_0 y A/A^* como funciones de M para el flujo isentrópico de un gas ideal, con $k = 1.4$.[1] El uso de las tablas puede reducir la labor de cálculo significativamente.

Como las condiciones de referencia permanecen constantes en el flujo isentrópico, la razón de las propiedades en dos puntos en un flujo puede determinarse fácilmente a partir de las tablas. El empleo de las mismas se ilustra en el problema ejemplo 13.2.

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

[1] Es fácil programar las ecuaciones 12.17a, 12.17b, 12.17c y 13.6 en una calculadora o computadora personal. Así pueden generarse tablas para cualquier valor deseado de k. Olfe [2] ha escrito un paquete de software comercial que incluye soluciones con tablas.

EJEMPLO 13.2 Flujo isentrópico en un canal convergente: solución por medio de tablas

Fluye aire isentrópicamente en un canal. En la sección ①, el número de Mach es 0.3, el área es 0.001 m^2 y la presión absoluta y la temperatura son 650 kPa y 62 C, respectivamente. Evalúe las propiedades en la sección ②, donde el número de Mach es 0.8, utilizando tablas de flujo isentrópico. (Note que éstos son los datos del ejemplo 13.1.)

PROBLEMA EJEMPLO 13.2

DATOS: Un flujo de aire isentrópico en un canal. En las secciones ① y ② se brindan los siguientes datos: $M_1 = 0.3$, $T_1 = 62$ C, $p_1 = 650$ kPa (abs), $A_1 = 0.001$ m^2 y $M_2 = 0.8$.

ENCUENTRE: Las propiedades en la sección ②, empleando tablas de flujo isentrópico.

SOLUCIÓN:
El diagrama *Ts* se dibujó en el problema ejemplo 13.1. De la tabla E.1, apéndice E, encontramos

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
0.3	0.9823	0.9395	0.9564	2.035
0.8	0.8865	0.6560	0.7400	1.038

Para flujo isentrópico, $T_{0_1} = T_{0_2} = T_0$. De tal modo,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_0}\frac{T_0}{T_1} = \frac{(T/T_0)_2}{(T/T_0)_1} = \frac{0.8865}{0.9823} = 0.9025$$

$$T_2 = 0.9025T_1 = 0.9025(273+62)\ \text{K} = 302\ \text{K} \longleftarrow T_2$$

Además, $p_{0_2} = p_{0_1} = p_0$, por lo que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_0}\frac{p_0}{p_1} = \frac{(p/p_0)_2}{(p/p_0)_1} = \frac{0.6560}{0.9395} = 0.6982$$

$$p_2 = 0.6982\,p_1 = 0.6982(650\ \text{kPa}) = 454\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

y

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 4.54\times10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\times\frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}}\times\frac{1}{302\ \text{K}} = 5.24\ \text{kg/m}^3 \longleftarrow \rho_2$$

Las propiedades de estancamiento son

$$T_{0_2} = T_{0_1} = \frac{T_1}{(T/T_0)_1} = \frac{(273+62)\ \text{K}}{0.9823} = 341\ \text{K} \longleftarrow T_{0_2}$$

y

$$p_{0_2} = p_{0_1} = \frac{p_1}{(p/p_0)_1} = \frac{650\ \text{kPa}}{0.9395} = 692\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_2}$$

El área puede calcularse empleando A/A^*. Por consiguiente, puesto que A^* = constante,

La velocid

13-3.4 Flujo isentrópic

En esta secci
nes. El flujo
un gran depó
de una bomb
La conti
condiciones
plano de sa
contrapresió
en la presión
a considerar
Cuando
partes, comc
Si la co
a través de l
condición *ii*
contrapresió
¿Qué su
rá aumentar

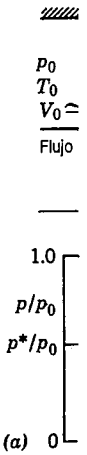


Fig. 13.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A^*}\frac{A^*}{A_1} = \frac{(A/A^*)_2}{(A/A^*)_1} = \frac{1.038}{2.035} = 0.5101$$

$$A_2 = 0.5101A_1 = 0.5101(0.001\ \text{m}^2) = 5.10 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \longleftarrow A_2$$

La velocidad en la sección ② puede calcularse de $V_2 = M_2 c_2$.

13-3.4 Flujo isentrópico en una tobera convergente

En esta sección investigamos la operación de una tobera convergente bajo diversas contrapresiones. El flujo a través de la tobera convergente que se muestra en la figura 13.6 es alimentado desde un gran depósito, donde se suponen condiciones de estancamiento; el flujo se induce por medio de una bomba de vacío aguas abajo y se controla mediante la válvula mostrada.

La contrapresión, p_b, a la cual descarga la tobera, se controla por medio de una válvula. Las condiciones de estancamiento aguas arriba (T_0, p_0, etc.) se mantienen constantes. La presión en el plano de salida de la tobera es p_e. Deseamos investigar el efecto de las variaciones en la contrapresión sobre la distribución de presión a través de la tobera, la relación de flujo másico y en la presión del plano de salida. Los resultados se ilustran gráficamente en la figura 13.6. Vamos a considerar cada uno de los casos mostrados.

Cuando la válvula está cerrada, no hay flujo a través de la tobera. La presión es p_0 en todas partes, como indica la condición *i*) en la figura 13.6*a*.

Si la contrapresión, p_b, se reduce después de esto a una ligeramente menor que p_0, habrá flujo a través de la tobera con una reducción en la presión en la dirección del mismo, como indica la condición *ii*). El flujo en el plano de salida será subsónico con la presión en dicho plano igual a la contrapresión.

¿Qué sucede cuando continuamos reduciendo la contrapresión? La relación de flujo continuará aumentando, y la presión del plano de salida continuará disminuyendo, como muestra la

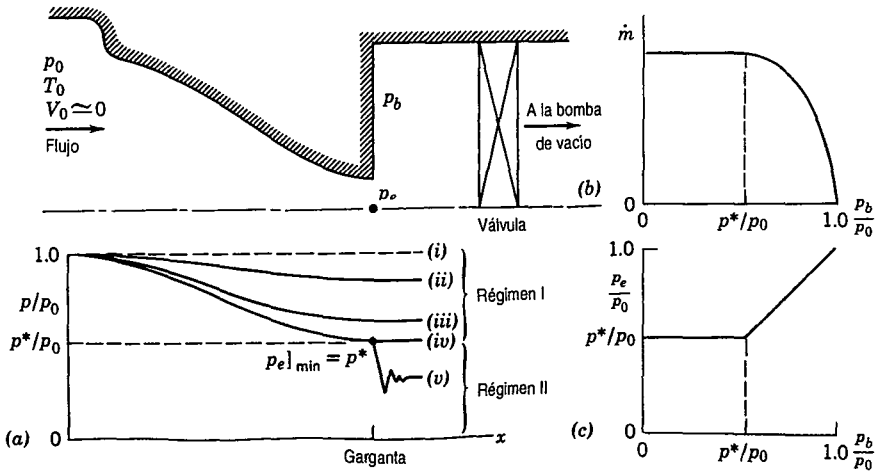


Fig. 13.6 Tobera convergente que opera a diferentes contrapresiones.

condición *iii*), en la figura 13.6. ¿Estas tendencias continuarán indefinidamente conforme se disminuya la contrapresión?

Recuerde de nuestro análisis previo que, en un canal convergente, el número de Mach no puede aumentar más allá de la unidad en flujo isentrópico. De tal modo, con una disminución continua de la contrapresión, el flujo en el plano de salida de la tobera a la larga alcanzará un número de Mach igual a la unidad. La presión correspondiente es la presión crítica, p^*. La condición *iv*) ilustra la correspondiente al caso en que M_e es igual a la unidad y p_b/p_0 es igual a p^*/p_0.

De la ecuación 12.17a, con $M = 1$, la razón de presión crítica para un gas ideal está dada por

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

Para $k = 1.4$, $p^*/p_0 = 0.528$.

¿Qué ocurre cuando la contrapresión se reduce aún más, por debajo de p^*, tal como la condición *v*)? Puesto que el número de Mach de la garganta es la unidad ($V_e = c_e$), la información acerca de las condiciones en el ducto de escape no pueden transmitirse aguas arriba. En consecuencia, las reducciones en p_b por debajo de p^* no tienen efecto en las condiciones de flujo en la tobera; de tal modo que, ni la distribución de presión a través de la tobera ni la presión de salida en la misma ni la relación de flujo másico son afectadas al reducir p_b por debajo de p^*. Cuando p_b es menor o igual que p^*, se dice que la tobera estará *estrangulada*.

Para p_b menor que p^*, el flujo que sale de la tobera se expandirá para igualar la contrapresión más baja, como se muestra en el caso de la condición *v*) en la figura 13.6*a*. Este proceso de expansión no confinada es tridimensional; la distribución de presión no puede predecirse mediante una teoría unidimensional. Los experimentos muestran que una serie de ondas de choque se forman en la corriente de salida, lo que resulta en un aumento de la entropía.

El flujo a través de una tobera convergente puede dividirse en dos regímenes:

1. En el régimen I, $1 \geq p_b/p_0 \geq p^*/p_0$. El flujo en la garganta es isentrópico; $p_e = p_b$.
2. En el régimen II, $p_b/p_0 < p^*/p_0$. El flujo en la garganta es isentrópico, pero ocurre una expansión no isentrópica en el flujo que abandona la tobera ; $p_e = p^* > p_b$.

El proceso de flujo correspondiente al régimen II se muestra en un diagrama *Ts* en la figura 13.7.

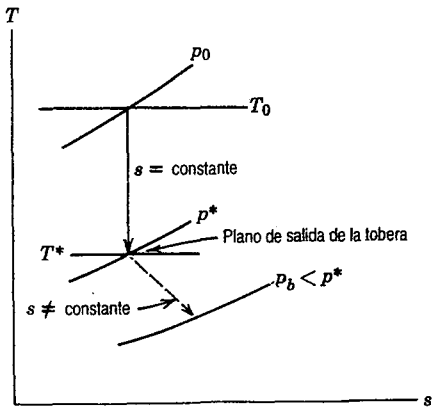


Fig. 13.7 Diagrama esquemático *Ts* para un flujo estrangulado a través de una tobera convergente.

Dos problemas que implican toberas convergentes se resuelven en los problemas ejemplo 13.3 y 13.4.

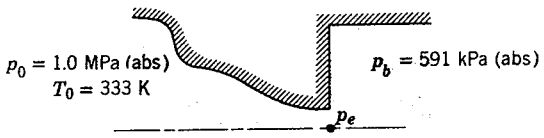
A pesar de que el flujo isentrópico es una idealización, con frecuencia es una muy buena aproximación para el comportamiento real de las toberas. Como una tobera es un dispositivo que acelera un flujo, el gradiente de presión interna es favorable. Esto tiende a mantener delgadas las capas límite de la pared y a minimizar los efectos de la fricción.

EJEMPLO 13.3 Flujo isentrópico en una tobera convergente

Una tobera convergente, con un área de garganta de 0.001 m^2, se opera con aire a una contrapresión de 591 kPa (abs). La tobera es alimentada desde un gran depósito donde la presión de estancamiento absoluta y la temperatura son 1.0 MPa y 60 C. El número de Mach de salida y la relación de flujo másico se van a determinar empleando *i*) relaciones de flujo isentrópico *ii*) tablas para flujo isentrópico.

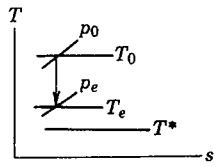
PROBLEMA EJEMPLO 13.3

DATOS: Un flujo de aire a través de una tobera convergente en las condiciones indicadas: el flujo es isentrópico.



ENCUENTRE:
(a) M_e. (b) $\dot{m}$.

SOLUCIÓN:
El primer paso es verificar la estrangulación. La razón de presiones es



$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{5.91 \times 10^5}{1.0 \times 10^6} = 0.591 > 0.528$$

de manera que el flujo no está estrangulado. Por consiguiente, $p_b = p_e$, y el flujo es isentrópico, como se señala en el diagrama *Ts*.

i) Relaciones de flujo isentrópico

Como p_0 = constante, M_e puede determinarse a partir de la razón de presiones,

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

Resolviendo para M_e, puesto que $p_e = p_b$, obtenemos

$$1 + \frac{k-1}{2} M_e^2 = \left(\frac{p_0}{p_b}\right)^{(k-1)/k}$$

y

$$M_e = \left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_b}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\frac{2}{k-1}\right\}^{1/2} = \left\{\left[\left(\frac{1.0\times 10^6}{5.91\times 10^5}\right)^{0.286} - 1\right]\frac{2}{1.4-1}\right\}^{1/2} = 0.9 \longleftarrow M_e$$

La relación de flujo másico estará dada por

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e = \rho_e M_e c_e A_e$$

Consecuentemente, necesitamos T_e para encontrar ρ_e y c_e. Como T_0 = constante,

$$\frac{T_0}{T_e} = 1 + \frac{k-1}{2}M_e^2$$

o

$$T_e = \frac{T_0}{1+\frac{k-1}{2}M_e^2} = \frac{(273+60)\text{ K}}{1+0.2(0.9)^2} = 287\text{ K}$$

$$c_e = \sqrt{kRT_e} = \left[1.4 \times 287\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 287\text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 340\text{ m/s}$$

y

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = \frac{5.91\times 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 287\text{ K}} = 7.18\text{ kg/m}^3$$

Por último,

$$\dot{m} = \rho_e M_e c_e A_e = 7.18\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.9 \times 340\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.001\text{ m}^2 = 2.20\text{ kg/s} \longleftarrow \dot{m}$$

*ii) **Tablas para flujo isentrópico*

La razón de presiones es

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{5.91\times 10^5}{1.0\times 10^6} = 0.591 > 0.528$$

por lo que el flujo no está estrangulado. De manera que $p_e = p_b$, y el flujo es isentrópico. De la tabla E.1, apéndice E, $p/p_0 = 0.591$ a $M = 0.90$. En consecuencia,

$$M_e = 0.90 \longleftarrow M_e$$

El procedimiento más simple al usar las tablas es expresar el resultado deseado en términos de razones de propiedades, las cuales pueden determinarse a partir de las tablas. Por consiguiente,

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e = \rho_e M_e c_e A_e = \rho_e M_e \sqrt{kRT_e} A_e$$

$$\dot{m} = \rho_0 \frac{\rho_e}{\rho_0} M_e \sqrt{kRT_0}\sqrt{\frac{T_e}{T_0}} A_e = \frac{p_0}{RT_0}\frac{\rho_e}{\rho_0} M_e \sqrt{kRT_0}\sqrt{\frac{T_e}{T_0}} A_e$$

o finalmente,

$$\dot{m} = \frac{\rho_e}{\rho_0}\sqrt{\frac{T_e}{T_0}}\, p_0 M_e \sqrt{\frac{k}{RT_0}} A_e$$

Utilizando las razones de propiedades para $M_e = 0.9$ obtenemos

$$\dot{m} = (0.6870)(0.8606)^{1/2}\left(1.0 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)(0.9)$$

$$\times\left[1.4 \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{287\ \text{N} \cdot \text{m}} \times \frac{1}{333\ \text{K}} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2}(0.001\ \text{m}^2)$$

$$\dot{m} = 2.20\ \text{kg/s}$$

EJEMPLO 13.4 Flujo estrangulado en una tobera convergente

Fluye aire isentrópicamente a través de una tobera convergente. En la sección donde el área de la tobera es 0.013 pies^2, la presión, temperatura y número de Mach locales son 60 psia, 40 F y 0.52, respectivamente. La contrapresión es 30 psia. Se van a determinar el número de Mach en la garganta, la relación de flujo másico y el área de la garganta, empleando *i*) relaciones de flujo isentrópico y *ii*) tablas para flujo isentrópico.

PROBLEMA EJEMPLO 13.4

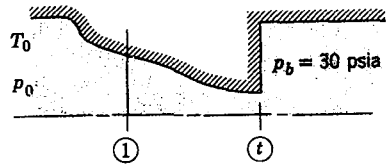
DATOS: Aire que fluye a través de una tobera convergente en las condiciones mostradas.

$M_1 = 0.52$

$T_1 = 40$ F

$p_1 = 60$ psia

$A_1 = 0.013$ pies^2



ENCUENTRE: *a*) M_t. *b*) $\dot{m}$. *c*) A_t.

SOLUCIÓN:

i) Relaciones de flujo isentrópico

Primero verificamos la estrangulación para determinar si el flujo es isentrópico descendiendo a p_b. Para verificarlo, evaluamos las condiciones de estancamiento.

$$\frac{p_0}{p_1} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right]^{k/(k-1)} = [1 + 0.2(0.52)^2]^{3.5} = 1.20$$

y

$$p_0 = 1.20 p_1 = (1.2)60\ \text{psia} = 72.0\ \text{psia}$$

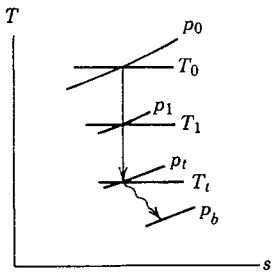
La razón de contrapresión es

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{30.0}{72.0} = 0.417 < 0.528$$

¡de modo que el flujo está estrangulado! Para flujo en esta última condición,

$$M_t = 1.0 \longleftarrow M_t$$

El diagrama Ts es



La relación de flujo másico puede encontrarse a partir de las condiciones en la sección (1), empleando $\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1$.

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT_1}$$

$$= 0.52\left[1.4 \times 53.3 \frac{\text{pie} \cdot \text{lbf}}{\text{lbm} \cdot \text{R}} \times (460 + 40)\ \text{R} \times 32.2 \frac{\text{lbm}}{\text{slug}} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{pie}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_1 = 570 \text{ pies/s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 60 \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times \frac{\text{lbm} \cdot \text{R}}{53.3 \text{ pies} \cdot \text{lbf}} \times \frac{1}{500\ \text{R}} \times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2} = 0.324 \text{ lbm/pie}^3$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = 0.324 \frac{\text{lbm}}{\text{pie}^3} \times 570 \frac{\text{pie}}{\text{s}} \times 0.013 \text{ pies}^2 = 2.40 \text{ lbm/s} \longleftarrow \dot{m}$$

El área de la garganta puede calcularse aplicando la continuidad entre la sección (1) y la garganta, esto es, $\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_t V_t A_t$, por lo que

$$A_t = A_1 \frac{\rho_1}{\rho_t} \frac{V_1}{V_t} = A_1 \frac{p_1}{RT_1} \frac{RT_t}{p_t} \frac{M_1 \sqrt{kRT_1}}{M_t \sqrt{kRT_t}} = A_1 \frac{p_1}{p_t} \frac{M_1}{M_t} \sqrt{\frac{T_t}{T_1}}$$

En flujo isentrópico, T_0 = constante, de manera que

$$\frac{T_t}{T_1} = \frac{T_t}{T_0} \frac{T_0}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_t^2} = \frac{1 + (0.2)(0.52)^2}{1.2} = 0.878$$

Además,

$$\frac{p_0}{p_t} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_t^2\right]^{k/(k-1)} = (1.2)^{3.5} = 1.89$$

por lo que

$$p_t = \frac{p_0}{1.89} = \frac{72.0 \text{ psia}}{1.89} = 38.1 \text{ psia}$$

La sustitución produce

$$A_t = A_1 \frac{p_1}{p_t} \frac{M_1}{M_t} \sqrt{\frac{T_t}{T_1}} = 0.013 \text{ pies}^2 \times \frac{60.0 \text{ psia}}{38.1 \text{ psia}} \times \frac{0.52}{1.0} \sqrt{0.878} = 9.98 \times 10^{-3} \text{ pies}^2 \quad \leftarrow A_t$$

ii) ***Tablas para flujo isentrópico*

Primero verificamos el estrangulamiento. Según la tabla E.1, apéndice E, en $M_1 = 0.52$

$$\frac{p_1}{p_0} = 0.8317; \qquad p_0 = \frac{p_1}{0.8317} = \frac{60 \text{ psia}}{0.8317} = 72.1 \text{ psia}$$

De la tabla, a $M = 1.0$, la razón de presión isentrópica mínima en una tobera convergente es

$$\frac{p}{p_0} = 0.5283$$

De las condiciones dadas,

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{30}{72.1} = 0.416 < 0.5283$$

¡de modo que el flujo está estrangulado! En el caso de flujo estrangulado,

$$M_t = 1.0 \quad \leftarrow M_t$$

El diagrama *Ts* se presentó antes. El cálculo de la relación de flujo másico es el mismo que en la solución previa. De acuerdo con la tabla E.1, a $M_1 = 0.52$, $A_1/A^* = 1.303$. Para flujo estrangulado, $A_t = A^*$. Por consiguiente,

$$A_t = A^* = \frac{A_1}{1.303} = \frac{0.013 \text{ pies}^2}{1.303} = 9.98 \times 10^{-3} \text{ pies}^2 \quad \leftarrow A_t$$

13-3.5 Flujo isentrópico en una tobera convergente-divergente

Después de haber considerado el flujo isentrópico en una tobera convergente, dirigiremos ahora nuestra atención al flujo isentrópico en una tobera convergente-divergente (C-D). Como en el caso previo, el flujo a través del pasaje convergente-divergente de la figura 13.8 se induce por medio de una bomba de vacío aguas abajo, y se controla por medio de la válvula mostrada. Se suponen constantes las condiciones de estancamiento aguas arriba. La presión en el plano de salida de la tobera es p_e; la tobera descarga a contrapresión p_b. Deseamos investigar el efecto de las variaciones en la contrapresión sobre la distribución de presión a lo largo de la tobera. Los resultados se ilustran gráficamente en la figura 13.8. Vamos a considerar cada uno de los casos indicados.

Con la válvula cerrada inicialmente, no hay flujo a través de la tobera; la presión es constante en p_0. Al abrir ligeramente la válvula (p_b es un poco menor que p_0) se produce la curva de distribución de presión *i*). Si la relación de flujo es lo suficientemente baja, en todos los puntos sobre esta curva el flujo será subsónico y esencialmente incompresible. Bajo estas condiciones, la tobera C-D se comportará como un venturi, con el flujo acelerándose en la parte convergente, hasta que un punto de velocidad máxima y presión mínima se alcance en la garganta, y luego se desacelere en la parte divergente hacia la salida de la tobera.

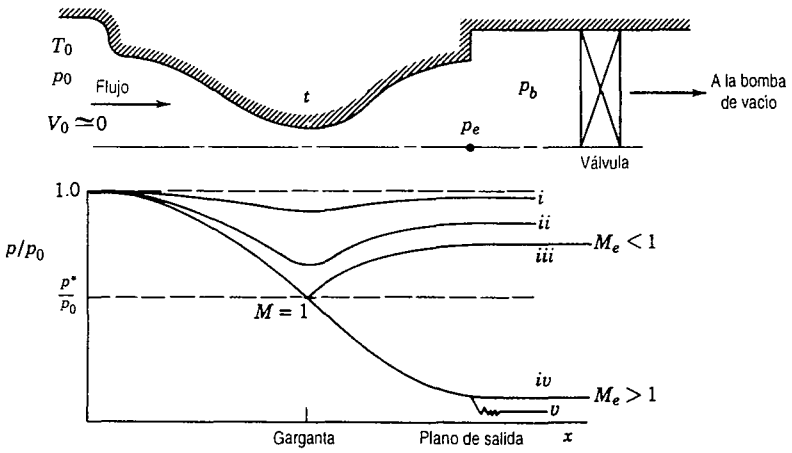


Fig. 13.8 Distribuciones de presión para flujo isentrópico en una tobera convergente-divergente.

Cuando la válvula se abre un poco más y la relación de flujo se incrementa, ocurre un mínimo de presión un poco más abrupto, como indica la curva *ii*). Aunque los efectos de compresibilidad se vuelven importantes, el flujo sigue siendo subsónico en todas partes y la desaceleración ocurre en la sección divergente. Por último, cuando la válvula se abre más, resulta la curva *iii*). En la sección de área mínima el flujo alcanza finalmente $M = 1$, y la tobera está estrangulada —la relación de flujo es la máxima posible para la tobera y las condiciones de estancamiento dadas—.

Todos los flujos con distribuciones de presión *i*), *ii*) e *iii*) son isentrópicos; cada curva se asocia con una relación única de flujo másico. Por último, cuando se alcanza la curva *iii*), se presentan condiciones críticas en la garganta. Para esta relación de flujo, éste se encuentra estrangulado, y

$$\dot{m} = \rho^* V^* A^*$$

donde $A^* = A_t$.

En nuestro estudio de la variación del área sobre un flujo isentrópico, advertimos que se requería una sección divergente para acelerar un flujo a velocidad supersónica desde $M = 1$ en una garganta. En este punto, pues, preguntamos, "¿Qué contrapresión, p_b, es necesaria para acelerar el flujo isentrópicamente en la parte divergente de la tobera?"

La aceleración de un flujo en la sección divergente requiere una disminución de presión. Esta condición se ilustra por medio de la curva *iv*) en la figura 13.8. El flujo se acelerará isentrópicamente en la tobera siempre que la presión de salida se fije en p_{iv}. Por consiguiente, vemos que con un número de Mach de garganta igual a la unidad, hay dos posibles condiciones de flujo isentrópico en la tobera convergente-divergente. Esto es congruente con los resultados de la figura 13.5, donde encontramos dos número de Mach para cada A/A^* en flujo isentrópico.

La reducción de la contrapresión por debajo de la condición *iv*), por ejemplo a la condición *v*), no tiene efecto sobre el flujo en la tobera. Éste es isentrópico desde la cámara del pleno hasta la salida de la tobera [igual que en la condición *iv*)] y luego experimenta una expansión irreversible tridimensional hasta la contrapresión inferior. Una tobera que opere en estas condiciones se dice que estará *subexpandida*, ya que se presenta una expansión adicional fuera de ella.

Una tobera convergente-divergente se destina por lo general para producir flujo supersónico en el plano de salida. Si la contrapresión se fija en p_{iv}, el flujo será isentrópico a través de la tobera

y supersónico en la salida de la misma. Las toberas que operan en $p_b = p_{iv}$ [correspondiendo a la curva *iv*) en la figura 13.8] se dice que estarán en las *condiciones de diseño*.

El flujo que sale de una tobera C-D es supersónico cuando la contrapresión está a o se encuentra por debajo de la presión de diseño de la tobera. El número de Mach de la salida se fija después de que se especifica la razón de áreas, A_e/A^*. Todas las otras propiedades del plano de salida (para flujo isentrópico) se relacionan unívocamente con las propiedades de estancamiento por medio del número de Mach fijo del plano de salida.

La suposición de flujo isentrópico para una tobera real en las condiciones de diseño es razonable. Sin embargo, el modelo de flujo unidimensional es inadecuado en el diseño de toberas relativamente cortas para producir flujos de salida supersónicos y uniformes.

Los vehículos de reacción emplean toberas C-D para acelerar los gases de salida hasta la velocidad máxima posible con el propósito de producir el empuje más alto. Una tobera de propulsión está sujeta a condiciones ambientales variables durante los vuelos en la atmósfera, por lo que es imposible alcanzar el máximo empuje teórico en el rango completo de operación. Como únicamente es posible obtener un solo número de Mach supersónico para cada razón de áreas, las toberas para túneles de viento supersónico se construyen a menudo con secciones intercambiables o con geometría variable.

Sin duda usted ha notado que no se ha dicho nada acerca de la operación de toberas convergente-divergentes con contrapresiones en el rango $p_{iii} > p_b > p_{iv}$. En tales casos, el flujo no puede expandirse isentrópicamente hasta p_b. En estas condiciones, una onda de choque (la cual puede tratarse como una discontinuidad irreversible que implica un aumento de entropía) ocurre en alguna parte dentro del flujo. Después del análisis de las ondas de choque normales en la sección 13-6, regresaremos para terminar el estudio de los flujos de toberas convergente-divergentes.

Las toberas que operan con $p_{iii} > p_b > p_{iv}$ se dice que están *sobreexpandidas* debido a que la presión en algún punto en la tobera es menor que la contrapresión. Evidentemente, podría lograrse que una tobera sobreexpandida operara en una nueva condición de diseño cortando una parte de la sección divergente.

Otro comentario debe hacerse en este punto. Los flujos reales de los fluidos compresibles son afectados por la fricción, el calentamiento o el enfriamiento y por la posible presencia (en flujo supersónico) de ondas de choque. Hemos tratado primero el flujo isentrópico porque es un útil modelo idealizado para muchos procesos de flujo reales y porque nos brinda información valiosa acerca del comportamiento de los fluidos en un flujo compresible. En las siguientes dos secciones consideraremos los efectos de la fricción y de la transferencia de calor por separado para ganar mayor conocimiento del efecto de cada factor sobre el comportamiento del flujo. Después de esto, volveremos a un análisis de las ondas del choque normales y de las ondas de choque en canales, para completar nuestro estudio de flujos en toberas convergente-divergentes. En cursos posteriores será posible explorar flujos reales y los resultados de la combinación de varios de estos efectos.

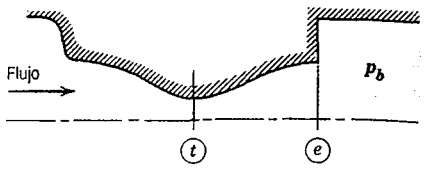
EJEMPLO 13.5 Flujo isentrópico en una tobera convergente-divergente

Fluye aire isentrópicamente en una tobera convergente-divergente, con área de salida de 0.001 m^2. La tobera se alimenta desde un gran depósito donde las condiciones de estancamiento son 350 K y 1.0 MPa (abs). La presión de salida es 954 kPa (abs) y el número de Mach en la garganta es 0.68. Se determinarán las condiciones de flujo en la garganta y el número de Mach a la salida.

PROBLEMA EJEMPLO 13.5

DATOS: Un flujo isentrópico de aire en una tobera C-D como se indica:

$T_0 = 350$ K
$p_0 = 1.0$ MPa (abs)
$p_b = 954$ kPa (abs)
$M_t = 0.68$ $A_e = 0.001$ m^2



ENCUENTRE: *a*) Las propiedades en la garganta de la tobera *b*) M_e.

SOLUCIÓN:

i) Relaciones de flujo isentrópico

La temperatura de estancamiento es constante en flujo isentrópico. De tal modo, puesto que

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$$

entonces

$$T_t = \frac{T_0}{1+\frac{k-1}{2}M_t^2} = \frac{350\text{ K}}{1+0.2(0.68)^2} = 320\text{ K} \longleftarrow T_t$$

Además, como p_0 es constante en flujo isentrópico, entonces

$$p_t = p_0\left(\frac{T_t}{T_0}\right)^{k/(k-1)} = p_0\left[\frac{1}{1+\frac{k-1}{2}M_t^2}\right]^{k/(k-1)}$$

$$p_t = 1.0\times10^6\text{ Pa}\left[\frac{1}{1+0.2(0.68)^2}\right]^{3.5} = 734\text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_t$$

por lo que

$$\rho_t = \frac{p_t}{RT_t} = \frac{7.34\times10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{320\text{ K}} = 7.99\text{ kg/m}^3 \longleftarrow \rho_t$$

y

$$V_t = M_t c_t = M_t\sqrt{kRT_t}$$

$$V_t = 0.68\left[1.4\times287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\times320\text{ K}\times\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 244\text{ m/s} \longleftarrow V_t$$

Puesto que $M_t < 1$, el flujo en la salida debe ser subsónico. Por tanto, $p_e = p_b$. Las propiedades de estancamiento son constantes, por lo que

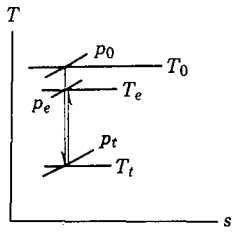
$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1+\frac{k-1}{2}M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

Resolviendo para M_e se obtiene

$$M_e = \left\{ \left[\left(\frac{p_0}{p_e} \right)^{(k-1)/k} - 1 \right] \frac{2}{k-1} \right\}^{1/2}$$

$$M_e = \left\{ \left[\left(\frac{1.0 \times 10^6}{9.54 \times 10^5} \right)^{0.286} - 1 \right] (5) \right\}^{1/2} = 0.26 \qquad \longleftarrow M_e$$

El diagrama *Ts* para este flujo es



*ii) **Tablas para flujo isentrópico*

Las propiedades de estancamiento son constantes para flujo isentrópico. De la tabla E.1, apéndice E, a $M = 0.68$,

$$\frac{T}{T_0} = 0.9154; \qquad T_t = 0.9154 T_0 = (0.9154)(350\ \text{K}) = 320\ \text{K} \qquad \longleftarrow T_t$$

$$\frac{p}{p_0} = 0.7338; \qquad p_t = 0.7338 p_0 = (0.7338)(1.0 \times 10^6\ \text{Pa}) = 734\ \text{kPa (abs)} \qquad \longleftarrow p_t$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 0.8016; \qquad \rho_t = 0.8016 \rho_0 = 0.8016 \frac{p_0}{RT_0}$$

$$\rho_t = 0.8016 \times 1.0 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{287\ \text{N} \cdot \text{m}} \times \frac{1}{350\ \text{K}} = 7.98\ \text{kg/m}^3 \qquad \longleftarrow \rho_t$$

y

$$\frac{A}{A^*} = 1.110; \qquad A_t = 1.110 A^*$$

pero en este punto A^* no se conoce.

A la salida, $p_e = 954$ kPa (abs). De modo que $p_e/p_0 = 0.954$, y de la tabla E.1,

$$M_e = 0.26 \qquad \longleftarrow M_e$$

Puesto que se conoce A_e, podemos calcular A^*. De acuerdo con la tabla E.1, a $M = 0.26$, $A/A^* = 2.317$. Así,

$$A^* = \frac{A_e}{2.317} = \frac{0.001\ \text{m}^2}{2.317} = 4.32 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

y

$$A_t = 1.110 A^* = (1.110)(4.32 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = 4.80 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \qquad \longleftarrow A_t$$

Advierta que la solución para A_t empleando tablas fue relativamente sencilla. Para determinar A_t utilizando las relaciones isentrópicas, podríamos haber aplicado la continuidad entre los planos de la garganta y la salida. Puesto que esto hubiera requerido el cálculo de todas las propiedades en la salida, el proceso hubiera sido muy lento.

EJEMPLO 13.6 Flujo isentrópico en una tobera convergente-divergente: Flujo estrangulado

La tobera del ejemplo 13.5 tiene una contrapresión de diseño de 87.5 kPa (abs) pero se opera a una contrapresión de 50.0 kPa (abs). Suponga que el flujo dentro de la tobera es isentrópico. Determine el número de Mach de salida y la relación de flujo de masa. Emplee *i*) relaciones de flujo isentrópico y *ii*) tablas para este tipo de flujo.

PROBLEMA EJEMPLO 13.6

DATOS: Un flujo de aire a través de una tobera C-D en la forma indicada:

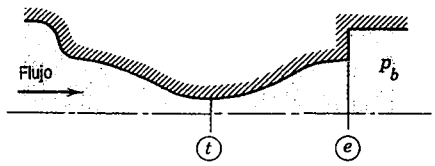
$T_0 = 350$ K

$p_0 = 1.0$ MPa (abs)

p_e(diseño) $= 87.5$ kPa (abs)

$p_b = 50.0$ kPa (abs)

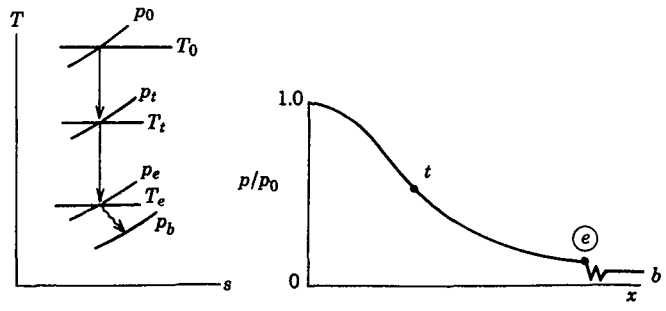
$A_e = 0.001$ m^2



ENCUENTRE: *a*) M_e *b*) $\dot{m}$.

SOLUCIÓN:

La contrapresión de operación está *abajo* de la presión de diseño. En consecuencia, la tobera está subexpandida, y el diagrama *Ts* y la distribución de presión serán como se muestra:



El flujo *dentro* de la tobera será isentrópico, pero la expansión irreversible de p_e a p_b provocará un aumento en la entropía; $p_e = p_e$(diseño) $= 87.5$ kPa (abs).

i) Relaciones de flujo isentrópico

Como las propiedades de estancamiento son constantes para el flujo isentrópico, el número de Mach de salida puede ser calculado de la razón de presiones. Por tanto,

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_e^2\right]^{k/(k-1)}$$

o

$$M_e = \left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\frac{2}{k-1}\right\}^{1/2} = \left\{\left[\left(\frac{1.0\times 10^6}{8.75\times 10^4}\right)^{0.286} - 1\right]\frac{2}{0.4}\right\}^{1/2} = 2.24 \longleftarrow M_e$$

La relación de flujo másico está dada por

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e = \rho_e M_e c_e A_e = \rho_e M_e \sqrt{kRT_e} A_e = \frac{p_e}{RT_e} M_e \sqrt{kRT_e} A_e$$

o

$$\dot{m} = p_e M_e \sqrt{\frac{k}{RT_e}} A_e$$

Puesto que T_0 es constante,

$$\frac{T_0}{T_e} = 1 + \frac{k-1}{2} M_e^2; \qquad T_e = \frac{T_0}{1 + \frac{k-1}{2} M_e^2} = \frac{350 \text{ K}}{1 + 0.2(2.24)^2} = 175 \text{ K}$$

Entonces

$$\dot{m} = p_e M_e \sqrt{\frac{k}{RT_e}} A_e$$

$$= 8.75 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 2.24 \left[1.4 \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{287 \text{ N} \cdot \text{m}} \times \frac{1}{175 \text{ K}} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2} 0.001 \text{ m}^2$$

$$\dot{m} = 1.03 \text{ kg/s} \longleftarrow \dot{m}$$

ii) ** *Tablas para flujo isentrópico*

De la tabla E.1, apéndice E, a $p/p_0 = p_e/p_0 = 0.0875$,

$$M_e \simeq 2.24 \longleftarrow M_e$$

Además,

$$\frac{T_e}{T_0} = 0.4991; \qquad T_e = 0.4991 T_0 = 0.4991(350 \text{ K}) = 175 \text{ K}$$

Esta temperatura es la misma que se obtuvo antes. El cálculo de la relación de flujo másico también sería como el anterior.

13-4 FLUJO EN UN DUCTO DE ÁREA CONSTANTE CON FRICCIÓN

El flujo de gas en ductos de área constante se encuentra por lo común en una variedad de aplicaciones de ingeniería. En esta sección consideramos flujos en los que la fricción en la pared es responsable de los cambios en las propiedades de los fluidos.

Las secciones de la 13-4.1 a la 13-4.3 consideran el flujo adiabático en un ducto de área constante con fricción. La suposición de flujo adiabático es apropiada para flujos en los cuales la longitud del ducto es razonablemente corta. Cuando los ductos son largos, como en líneas de ductos de gas natural sin aislamiento, se dispone de un área superficial importante para la transferencia de calor, y el flujo es aproximadamente isotérmico. El flujo isotérmico se analiza en la sección 13-4.4.

Para analizar el flujo compresible en ductos de área constante con fricción, la fuerza de fricción en la pared puede relacionarse con las propiedades de flujo mediante el factor de fricción, empleando los métodos desarrollados para flujo incompresible en el capítulo 8.

13-4.1 Ecuaciones básicas para flujo adiabático

Para obtener una visión completa del problema de flujo adiabático friccionante, se aplican las ecuaciones básicas al flujo uniforme estable de un gas ideal, con calores específicos constantes, a través del volumen de control finito que se muestra en la figura 13.9.

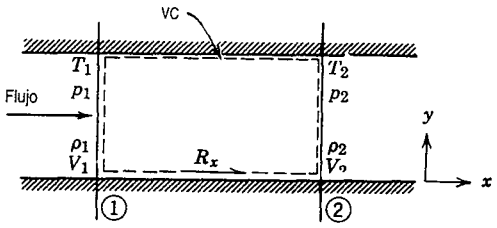


Fig. 13.9 Volumen de control empleado para el análisis integral del flujo adiabático friccionante.

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0(1)} \int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.13)$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en cada sección

En consecuencia,

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

El área es constante, por lo que

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} \tag{13.7a}$$

b. Ecuación de momento

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(3)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposición: 3) $F_{B_x} = 0$

La fuerza superficial se debe a las fuerzas de presión en las secciones ① y ②, y a la fuerza de fricción, R_x, de la pared del ducto *sobre* el flujo. Sustituyendo, y reconociendo que $A_2 = A_1 = A$,

$$R_x + p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

El empleo de magnitudes escalares y la eliminación de los signos de valor absoluto producen

$$R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13.7b}$$

c. Primera ley de la termodinámica

Ecuación básica:

$$\cancel{\dot{Q}}^{=0(4)} - \cancel{\dot{W}_s}^{=0(5)} - \cancel{\dot{W}_{\text{corte}}}^{=0(6)} - \cancel{\dot{W}_{\text{otro tipo}}}^{=0(6)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} e\rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

donde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \cancel{gz}^{\simeq 0(7)}$$

Suposiciones:
4) $\dot{Q} = 0$ (flujo adiabático)
5) $\dot{W}_s = 0$
6) $\dot{W}_{\text{corte}} = \dot{W}_{\text{otro tipo}} = 0$
7) Se ignoran los efectos de la gravedad

Con estas restricciones, las ecuaciones se transforman en

$$0 = \left(u_1 + \frac{V_1^2}{2} + p_1 v_1\right)\{-|\rho_1 V_1 A|\} + \left(u_2 + \frac{V_2^2}{2} + p_2 v_2\right)\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Puesto que los términos de la relación de flujo másico en { } son idénticos por continuidad, entonces

$$u_1 + \frac{V_1^2}{2} + p_1 v_1 = u_2 + \frac{V_2^2}{2} + p_2 v_2$$

o

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{13.7c}$$

También podríamos escribir

$$h_{0_1} = h_{0_2}$$

la cual es una consecuencia física de nuestra suposición de flujo adiabático.

d. Segunda ley de la termodinámica

Ecuación básica:

$$\int_{sc} \frac{1}{T} \frac{\dot{Q}}{dA} dA \leq \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} s\rho \, d\forall + \int_{sc} s\rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad \begin{matrix} = 0(4) \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} = 0(1) \\ \end{matrix} \tag{4.59}$$

Entonces debido a que el flujo es friccionante, y en consecuencia irreversible,

$$0 < s_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + s_2\{|\rho_2 V_2 A|\} = \dot{m}(s_2 - s_1)$$

La forma del volumen de control de la segunda ley nos dice que $s_2 - s_1 > 0$.

Este hecho es de poca ayuda en el cálculo del cambio de entropía real entre cualesquiera dos secciones en un flujo friccionante adiabático. Para calcular el cambio de entropía, confiamos en las ecuaciones $T\,ds$. Como

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

para un gas ideal, podemos escribir

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

Para calores específicos constantes, la ecuación puede integrarse para producir

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{13.7d}$$

e. Ecuaciones de estado

Para un gas ideal, la ecuación de estado está dada por

$$p = \rho RT \tag{13.7e}$$

Las ecuaciones de la 13.7a a la 13.7e son las ecuaciones gobernantes para flujo friccionante, adiabático, unidimensional y estable de un gas ideal en un ducto de área constante. Si todas las propiedades en el estado ① se conocen, entonces tenemos siete incógnitas (T_2, p_2, ρ_2, V_2, h_2, s_2 y R_x) en estas cinco ecuaciones. Sin embargo, también podemos tener la conocida relación entre h y T para un gas ideal, $dh = c_p dT$. Para un gas ideal con calores específicos constantes,

(13.7c)

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \, \Delta T = c_p(T_2 - T_1) \tag{13.7f}$$

Tenemos así la situación de seis ecuaciones y siete incógnitas.

Si se conocen todas las condiciones en el estado ①, ¿cuántos posibles estados ② hay ahí? Las matemáticas de la situación (seis ecuaciones y siete incógnitas) indican un número infinito de estados ② posibles.

Con un número infinito de estados ② posibles para un estado ① determinado, ¿que se esperará si todos los estados ② posibles se grafican sobre un diagrama Ts? Se concluye que el lugar geométrico de todos los estados ② posibles, alcanzables desde el estado ①, es un curva continua que pasa por el estado ①.

¿Cómo podríamos determinar esta curva? Quizá la forma más simple es asumir diferentes valores de T_2. Para cada T_2 supuesta, podríamos calcular todas las demás propiedades en el estado ② y también R_x.

(4.59)

13-4.2 Flujo adiabático: la línea de Fanno

Los resultados de estos cálculos se muestran cualitativamente sobre el plano Ts de la figura 13.10. El lugar geométrico de todos los estados aguas abajo posibles se conoce como la *línea de Fanno*[2]. Los cálculos detallados indican algunos rasgos interesantes del flujo de la línea de Fanno. En el punto de máxima entropía, el número de Mach es la unidad. En la rama superior de la curva, el número de Mach siempre es menor que la unidad, y aumenta monótonamente conforme nos movemos a la derecha a lo largo de la curva. En todo punto sobre la parte inferior de la curva, el

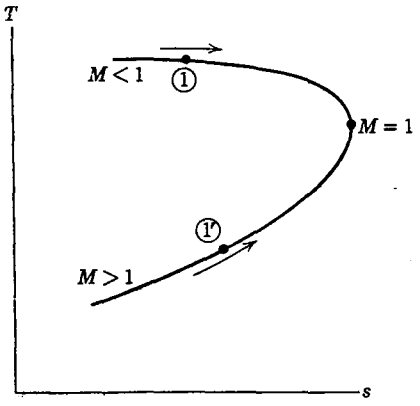


Fig. 13.10 Diagrama esquemático Ts para flujo adiabático friccionante (línea de Fanno) en un ducto de área constante.

(13.7d)

(13.7e)

[2] Una manera conveniente de recordar este nombre es pensar en el flujo adiabático friccionante.

número de Mach es mayor que la unidad; el número de Mach se reduce de manera monótona cuando nos movemos a la derecha a lo largo de la curva.

Para cualquier estado inicial sobre una línea de Fanno, cada punto sobre la línea de Fanno representa un estado aguas abajo matemáticamente posible. En realidad, determinamos el lugar geométrico de todos los estados aguas abajo posibles asumiendo T_2 y calculando las propiedades correspondientes. Aunque la línea de Fanno representa todos los estados aguas abajo matemáticamente posibles, ¿todos son estados aguas abajo físicamente alcanzables? Un momento de reflexión indicará que no lo son. ¿Por qué no? La segunda ley requiere que la entropía aumente. En consecuencia, los estados de flujo deben moverse siempre a la derecha a lo largo de la línea de Fanno de la figura 13.10. En realidad, es el efecto de la fricción lo que provoca que las propiedades del flujo cambien desde el estado inicial. Al referirnos de nuevo a la figura 13.10, vemos que para un flujo subsónico inicial (estado ①), el efecto de la fricción es aumentar el número de Mach hacia la unidad. Para un flujo que al principio es supersónico (estado ①′), el efecto de la fricción es reducir el número de Mach hacia la unidad.

Al desarrollar la forma simplificada de la primera ley para el flujo de la línea de Fanno, encontramos que la entalpía de estancamiento permanece constante. En consecuencia, cuando el fluido es un gas ideal con calores específicos constantes, la temperatura de estancamiento también debe permanecer constante. ¿Qué ocurre con la presión de estancamiento? La fricción provoca que la presión local de estancamiento isentrópico disminuya en todos los flujos de la línea de Fanno, como se muestra en la figura 13.11. Recuerde que la segunda ley requiere que $s_2 - s_1 > 0$. Como la entropía debe aumentar en la dirección del flujo, el proceso de flujo debe seguir a la derecha sobre el diagrama *Ts*. En la figura 13.11, se muestra una trayectoria del estado ① al estado ② sobre la parte subsónica de la curva. Las correspondientes presiones locales de estancamiento isentrópico, p_{0_1} y p_{0_2}, indican claramente que $p_{0_2} < p_{0_1}$. Se obtiene un resultado idéntico para flujo en la rama supersónica de la curva del estado ①′ al estado ②′. También en este caso, $p_{0_{2'}} < p_{0_{1'}}$. De tal modo, p_0 disminuye para todo flujo de la línea de Fanno.

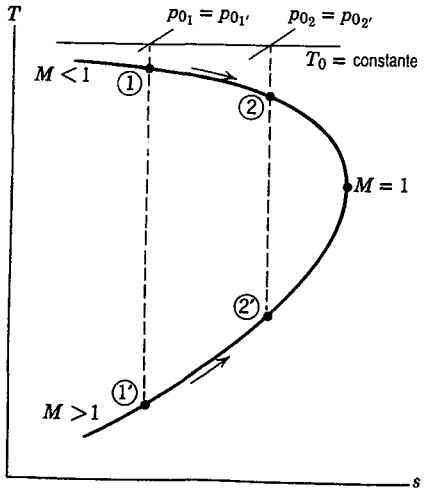


Fig. 13.11 Diagrama esquemático del flujo de la línea de Fanno sobre un plano *Ts*, mostrando la reducción en la presión de estancamiento local isentrópica provocada por la fricción.

En este punto resumimos los efectos de la fricción sobre las propiedades de los flujo en la línea de Fanno. El resumen se presenta en la tabla 13.1.

Tabla 13.1 Resumen de los efectos de la fricción en las propiedades del flujo de la línea de Fanno

Propiedad	Subsónico $M < 1$	Supersónico $M > 1$	Obtenida de:
Temperatura de estancamiento, T_0	Constante	Constante	Ecuación de energía
Entropía, s	Aumenta	Aumenta	Segunda ley
Presión de estancamiento, p_0	Disminuye	Disminuye	T_0 = constante; s aumenta
Temperatura, T	Disminuye	Aumenta	Forma de la línea de Fanno
Velocidad, V	Aumenta	Disminuye	Ecuación de energía, y tendencia de T
Número de Mach, M	Aumenta	Disminuye	Tendencias de V, T, y definición de M
Densidad, ρ	Disminuye	Aumenta	Ecuación de continuidad, y efecto sobre V
Presión, p	Disminuye	Aumenta	Ecuación de estado, y efectos sobre p, T

Al deducir el efecto de la fricción sobre las propiedades de flujo para los de la línea de Fanno, empleamos la forma de la línea de Fanno sobre el diagrama Ts y las ecuaciones gobernantes básicas (ecuaciones de la 13.7a a la 13.7f). Usted debe seguir la lógica indicada en la columna derecha de la tabla.

Hemos observado que la entropía debe aumentar en la dirección del flujo; éste es el efecto de la fricción que provoca el cambio en las propiedades de flujo a lo largo de la curva de la línea de Fanno. De la figura 13.11, vemos que hay un punto de máxima entropía correspondiente a $M = 1$ para cada línea de Fanno. El punto de máxima entropía se alcanza aumentando la cantidad de fricción (mediante la adición de la longitud del ducto), justo lo suficiente para producir un número de Mach igual a la unidad (flujo estrangulado) a la salida. ¿Cómo calculamos esta longitud crítica del ducto?

Para calcular la longitud crítica del ducto, debemos analizar el flujo en detalle, tomando en cuenta la fricción. Este análisis requiere que empecemos con un volumen de control diferencial, desarrollemos expresiones en términos del número de Mach e integremos a lo largo del ducto la sección donde $M = 1$. Este análisis se completa en la sección 13-4.3, donde las tablas para el flujo de la línea de Fanno se desarrollan. El álgebra requerida para el análisis detallado tiende a obscurecer la física del flujo; las tendencias generales causadas por la fricción pueden demostrarse utilizando volúmenes de control finitos y las ecuaciones gobernantes básicas. Este planteamiento se ilustra en el problema ejemplo 13.7.

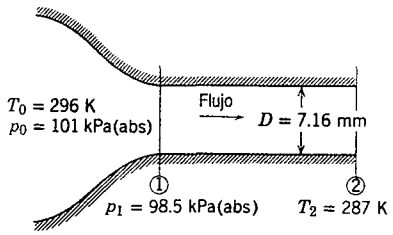
EJEMPLO 13.7 Flujo adiabático friccionante en un canal de área constante

Un flujo de aire se induce en un tubo aislado de 7.16 mm de diámetro por medio de una bomba de vacío. El aire se extrae de un cuarto, donde $p_0 = 101$ kPa (abs) y $T_0 = 23$ C, a través de una tobera convergente de contorno liso. En la sección ①, donde la tobera se une al tubo de área constante, la presión estática es 98.5 kPa (abs). En la sección ②, localizada a cierta distancia aguas abajo en el tubo de área constante, la temperatura del aire es 14 C. Determine la relación de flujo másico,

la presión local de estancamiento isentrópico en la sección ② y la fuerza de fricción sobre la pared del ducto entre las secciones ① y ②.

PROBLEMA EJEMPLO 13.7

DATOS: Un flujo de aire en un tubo aislado.



ENCUENTRE: *a*) $\dot{m}$.
b) La presión de estancamiento en la sección ②.
c) La fuerza sobre la pared del ducto.

SOLUCIÓN:
La relación de flujo másico puede obtenerse de las propiedades en la sección ①. En flujo isentrópico a través de la tobera convergente, las propiedades locales de estancamiento isentrópico permanecen constantes. De tal modo,

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{k/(k-1)}$$

y

$$M_1 = \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_{0_1}}{p_1} \right)^{(k-1)/k} - 1 \right] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2}{0.4} \left[\left(\frac{1.01 \times 10^5}{9.85 \times 10^4} \right)^{0.286} - 1 \right] \right\}^{1/2} = 0.190$$

$$T_1 = \frac{T_{0_1}}{1 + \dfrac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{296 \text{ K}}{1 + 0.2(0.190)^2} = 294 \text{ K}$$

Para un gas ideal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 9.85 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{287 \text{ N} \cdot \text{m}} \times \frac{1}{294 \text{ K}} = 1.17 \text{ kg/m}^3$$

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT_1} = (0.19) \left[1.4 \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 294 \text{ K} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2} \right]^{1/2}$$

$$V_1 = 65.3 \text{ m/s}$$

El área, A_1, es

$$A_1 = A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} (7.16 \times 10^{-3})^2 \text{ m}^2 = 4.03 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

De la continuidad,

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = 1.17 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 65.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 4.03 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$$

$$\dot{m} = 3.08 \times 10^{-3}\ \text{kg/s} \longleftarrow \dot{m}$$

El flujo es adiabático, de modo que T_0 es constante, y

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 296\ \text{K} \longleftarrow T_{0_2}$$

Por tanto,

$$\frac{T_{0_2}}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2$$

Resolviendo para M_2 obtenemos

$$M_2 = \left[\frac{2}{k-1}\left(\frac{T_{0_2}}{T_2} - 1\right)\right]^{1/2} = \left[\frac{2}{0.41}\left(\frac{296}{287} - 1\right)\right]^{1/2} = 0.396 \longleftarrow M_2$$

$$V_2 = M_2 c_2 = M_2 \sqrt{kRT_2} = (0.396)\left[1.4 \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 287\ \text{K} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_2 = 134\ \text{m/s} \longleftarrow V_2$$

De la continuidad, $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, por lo que

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = 1.17 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{65.3}{134} = 0.570\ \text{kg/m}^3 \longleftarrow \rho_2$$

y

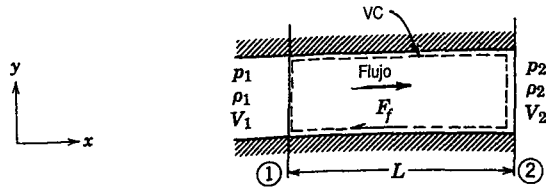
$$p_2 = \rho_2 R T_2 = 0.570 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 287\ \text{K} = 47.0\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

La presión local de estancamiento isentrópico es

$$p_{0_2} = p_2\left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)^{k/(k-1)} = 4.70 \times 10^4\ \text{Pa}[1 + 0.2(0.396)^2]^{3.5}$$

$$p_{0_2} = 52.4\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_2}$$

La fuerza de fricción puede determinarse aplicando la ecuación de momento al volumen de control mostrado:



Ecuación básica: $= 0(1) = 0(2)$

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Suposiciones: 1) $F_{B_x} = 0$
2) Flujo estable
3) Flujo uniforme en cada sección

Por tanto,

$$-F_f + p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\} = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

y

$$-F_f = (p_2 - p_1)A + \dot{m}(V_2 - V_1)$$

$$-F_f = (4.70 - 9.85)10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 4.03 \times 10^{-5}\ \text{m}^2 + 3.08 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times (134 - 65.3) \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

o

$$F_f = 1.86\ \text{N} \quad \text{(a la izquierda, como se muestra)}$$

Esta es la fuerza ejercida sobre el volumen de control por la pared del ducto. La fuerza del *fluido* sobre el *ducto* es

$$K_x = F_f = 1.86\ \text{N} \quad \text{(a la derecha)} \qquad K_x \longleftarrow$$

**13-4.3 Tablas para el cálculo del flujo de la línea de Fanno de un gas ideal

La primera variable independiente en el flujo de la línea de Fanno es la fuerza de fricción, F_f. El conocimiento de la fuerza de fricción total entre cualesquiera dos puntos en un flujo de la línea de Fanno nos posibilitaría predecir las condiciones aguas abajo a partir de condiciones aguas arriba conocidas. La fuerza de fricción total es la integral del esfuerzo de corte de la pared sobre el área de la superficie del ducto. Puesto que el esfuerzo de corte de la pared varía a lo largo del ducto,

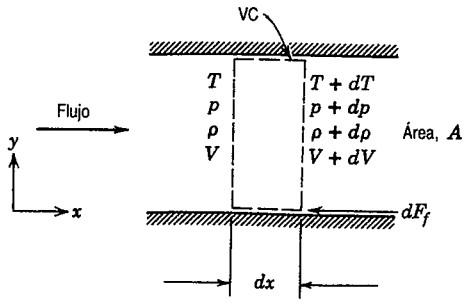


Fig. 13.12 Volumen de control diferencial empleado en el análisis del flujo de la línea de Fanno.

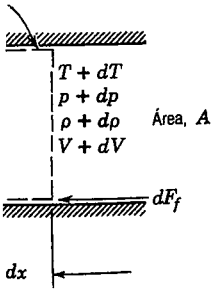
** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

(4.19a)

rza del *fluido* sobre

K_x

za de fricción, F_f. El
ın flujo de la línea de
liciones aguas arriba
a pared sobre el área
a lo largo del ducto,



debemos desarrollar una ecuación diferencial y luego integrar para determinar las variaciones de las propiedades. Para establecer la ecuación diferencial, empleamos el volumen de control diferencial mostrado en la figura 13.12 para nuestro análisis.

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica: $= 0(1)$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en cada sección

Entonces

$$0 = \{-|\rho V A|\} + \{|(\rho + d\rho)(V + dV)A|\}$$

o

$$\rho V A = (\rho + d\rho)(V + dV)A$$

La simplificación y la cancelación de A producen

$$0 = -\rho V + \rho V + \rho \, dV + V \, d\rho + \underbrace{d\rho \, dV}_{\simeq 0}$$

lo que se reduce a

$$\rho \, dV + V \, d\rho = 0 \tag{13.8a}$$

puesto que los productos de diferenciales son despreciables.

b. Ecuación de momento

Ecuación básica: $= 0(3) = 0(1)$

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposición: 3) $F_{B_x} = 0$

La ecuación de momento se convierte en

$$-dF_f + pA - (p + dp)A = V\{-|\rho V A|\} + (V + dV)\{|(\rho + d\rho)(V + dV)A|\}$$

la cual se simplifica, utilizando la ecuación de continuidad, en

$$-\frac{dF_f}{A} - dp = \rho V\, dV \tag{13.8b}$$

c. Primera ley de la termodinámica

Ecuación básica:

$$\underbrace{\dot{Q}}_{=0(4)} - \underbrace{\dot{W}_s}_{=0(5)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{corte}}}_{=0(6)} - \underbrace{\dot{W}_{\text{otro tipo}}}_{=0(6)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC} (e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

donde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \underbrace{gz}_{\simeq 0(7)}$$

Suposiciones:
4) Flujo adiabático, $\dot{Q} = 0$
5) $\dot{W}_s = 0$
6) $\dot{W}_{\text{corte}} = \dot{W}_{\text{otro tipo}} = 0$
7) Se ignoran los efectos de la gravedad

Con estas restricciones, obtenemos

$$0 = \left(u + \frac{V^2}{2} + pv\right)\{-|\rho VA|\} + \left[u + du + \frac{V^2}{2} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + pv + d(pv)\right]\{|(\rho + d\rho)(V + dV)A|\}$$

Notando a partir de la continuidad que los términos de la relación de flujo { } son iguales, y sustituyendo $h = u + pv$, el resultado es

$$dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \tag{13.8c}$$

Para completar nuestra formulación, debemos relacionar la fuerza de fricción, dF_f, con variables de flujo en cada sección transversal. Notamos que

$$dF_f = \tau_w dA_w = \tau_w P\, dx \tag{13.9}$$

donde P es el perímetro mojado del ducto. Para obtener una expresión para τ_w, en términos de las variables de flujo en cada sección transversal, suponemos que los cambios en las variables de flujo con respecto a x son graduales y usamos las correlaciones desarrolladas en el capítulo 8 para flujo incompresible completamente desarrollado en un ducto. En flujo incompresible, el esfuerzo local de corte en la pared puede escribirse en términos de las propiedades de flujo y el factor de fricción.

De las ecuaciones 8.16, 8.30 y 8.32 tenemos, para flujo incompresible,

$$\tau_w = -\frac{R}{2}\frac{dp}{dx} = \frac{\rho R}{2}\frac{dh_l}{dx} = \frac{f\rho V^2}{8} \tag{13.10}$$

donde f es el factor de fricción para el flujo de tubería, figura 8.14. Suponemos que esta correlación de datos experimentales se aplica también a flujo compresible. Esta suposición, cuando se verifica contra datos experimentales, muestra sorprendentemente una gran concordancia para flujos subsónicos; los datos para flujos supersónicos son escasos.

Los ductos de forma diferente a la circular pueden incluirse en nuestro análisis introduciendo el diámetro hidráulico

$$D_h = \frac{4A}{P} \tag{8.43}$$

(Se incluyó el factor de 4 en la ecuación 8.43 de modo que D_h se reduciría al diámetro D para ductos circulares.)

Al combinar las ecuaciones 8.43, 13.9 y 13.10, obtenemos

$$dF_f = \tau_w P\, dx = f\frac{\rho V^2}{8}\frac{4A}{D_h}dx$$

o

$$dF_f = \frac{fA}{D_h}\frac{\rho V^2}{2}dx \tag{13.11}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de momento (ecuación 13.8b), obtenemos

$$-\frac{f}{D_h}\frac{\rho V^2}{2}dx - dp = \rho V\, dV$$

o, después de dividir entre p,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{\rho V^2}{2p}dx - \frac{\rho V\, dV}{p}$$

Observando que $p/\rho = RT = c^2/k$, y $VdV = d(V^2/2)$, obtenemos

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \frac{k}{c^2}d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

y por último,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \frac{kM^2}{2}\frac{d(V^2)}{V^2} \tag{13.12}$$

Para relacionar M y x, debemos eliminar dp/p y $d(V^2)/V^2$ de la ecuación 13.12. De la definición del número de Mach, $M = V/c$, entonces $V^2 = M^2c^2 = M^2kRT$ y

$$\frac{d(V^2)}{V^2} = \frac{dT}{T} + \frac{d(M^2)}{M^2} \tag{13.13a}$$

De la ecuación de continuidad, $d\rho/\rho = -dV/V$ y

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{d(V^2)}{V^2}$$

De la ecuación de estado de gas ideal, $p = \rho RT$,

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

Al combinar estas ecuaciones, obtenemos

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{d(M^2)}{M^2} \tag{13.13b}$$

La sustitución de las ecuaciones 13.13 en la 13.12 produce

$$\frac{1}{2}\frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{d(M^2)}{M^2} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \frac{kM^2}{2}\frac{dT}{T} - \frac{kM^2}{2}\frac{d(M^2)}{M^2}$$

Esta ecuación puede simplificarse en

$$\left(\frac{1+kM^2}{2}\right)\frac{dT}{T} = -\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx + \left(\frac{1-kM^2}{2}\right)\frac{d(M^2)}{M^2} \tag{13.14}$$

Hemos tenido éxito en reducir un poco el número de variables. Sin embargo, para relacionar M y x, debemos obtener una expresión para dT/T en términos de M. Tal expresión puede obtenerse con mayor facilidad de la ecuación de la temperatura de estancamiento

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \tag{12.17b}$$

Puesto que la temperatura de estancamiento es constante para flujo de la línea de Fanno,

$$T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right) = \text{constante}$$

y

$$\frac{dT}{T} + \frac{M^2\dfrac{(k-1)}{2}}{\left(1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{M^2} = 0$$

La sustitución de dT/T en la ecuación 13.14 produce

$$\frac{M^2\dfrac{(k-1)}{2}\left(\dfrac{1+kM^2}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{M^2} = \frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx - \left(\frac{1-kM^2}{2}\right)\frac{d(M^2)}{M^2}$$

Combinando términos, obtenemos

$$\frac{(1-M^2)}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{d(M^2)}{kM^4}=\frac{f}{D_h}dx \tag{13.15}$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial que relaciona los cambios en M con respecto a x. Después de esto debemos integrar la ecuación para encontrar M como una función de x.

La integración de la ecuación 13.15 entre los estados ① y ② produciría una complicada función tanto de M_1 como de M_2. La función tendría que evaluarse numéricamente para cada nueva combinación de M_1 y M_2 encontrada en un problema. Los cálculos pueden simplificarse considerablemente empleando condiciones críticas (donde, por definición, $M = 1$). Todos los flujos de la línea de Fanno tienden hacia $M = 1$, de modo que la integración es entre una sección donde el número de Mach es M y la sección donde ocurren las condiciones sónicas (las condiciones críticas). El número de Mach alcanzará la unidad cuando se emplee la longitud máxima posible del ducto, como se muestra en forma esquemática en la figura 13.13.

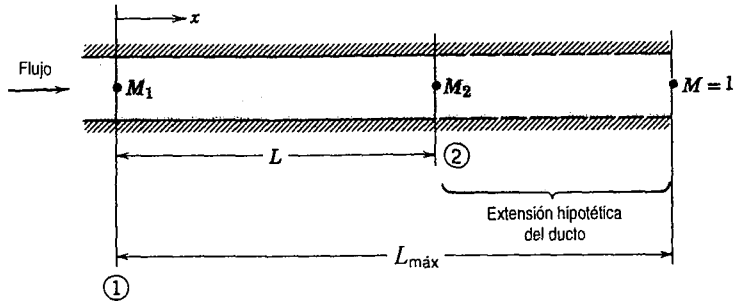


Fig. 13.13 Coordenadas y notación empleadas en el análisis del flujo de la línea de Fanno.

La tarea es efectuar la integración

$$\int_M^1 \frac{(1-M^2)}{kM^4\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}d(M^2)=\int_0^{L_{máx}}\frac{f}{D_h}dx \tag{13.16}$$

El lado izquierdo puede integrarse por partes. En el lado derecho, el factor de fricción, f, puede variar con x, ya que el número de Reynolds variará a lo largo del ducto. Advierta, sin embargo, que como ρV es constante a lo largo del ducto (de la continuidad), la variación en el número de Reynolds es causada únicamente por las variaciones en la viscosidad del fluido.

Al definir un factor de fricción media, $\bar{f}$, por la longitud del ducto como

$$\bar{f}=\frac{1}{L_{máx}}\int_0^{L_{máx}} f\,dx$$

entonces la integración de la ecuación 13.16 conduce a

$$\frac{1-M^2}{kM^2}+\frac{k+1}{2k}\ln\left[\frac{(k+1)M^2}{2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\right]=\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h} \tag{13.17}$$

La ecuación 13.17 brinda el máximo $\bar{f}L/D_h$ correspondiente a cualquier número de Mach inicial. Estos valores se tabulan en la tabla E.2 del apéndice E.

Puesto que $\bar{f}L_{máx}/D_h$ es una función de M, la longitud del ducto, L, requerida para que el número de Mach cambie de M_1 a M_2 (como se ilustra en la figura 13.13) puede encontrarse de

$$\frac{\bar{f}L}{D_h} = \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_{M_1} - \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_{M_2}$$

Las condiciones críticas son condiciones de referencia apropiadas para utilizarlas en la tabulación de propiedades de fluido como una función del número de Mach local. Así, por ejemplo, puesto que T_0 es constante, podemos escribir

$$\frac{T}{T^*} = \frac{T/T_0}{T^*/T_0} = \frac{1}{1+\dfrac{k-1}{2}M^2} \Bigg/ \frac{1}{1+\dfrac{k-1}{2}} = \frac{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right)} \tag{13.18a}$$

Similarmente,

$$\frac{V}{V^*} = \frac{M\sqrt{kRT}}{\sqrt{kRT^*}} = M\sqrt{\frac{T}{T^*}} = \left[\frac{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)M^2}{1+\dfrac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{13.18b}$$

De la continuidad,

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \left[\frac{1+\dfrac{k-1}{2}M^2}{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)M^2}\right]^{1/2} \tag{13.18c}$$

De la ecuación de estado de gas ideal,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\rho}{\rho^*}\frac{T}{T^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{1+\dfrac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \tag{13.18d}$$

La razón entre la presión de estancamiento local y la presión de estancamiento de referencia está dada por

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p}\frac{p}{p^*}\frac{p^*}{p_0^*}$$

$$= \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)} \frac{1}{M}\left[\frac{\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{1+\dfrac{k-1}{2}M^2}\right]^{1/2} \frac{1}{\left(1+\dfrac{k-1}{2}\right)^{k/(k-1)}}$$

o

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{(k+1)/2(k-1)} \tag{13.18e}$$

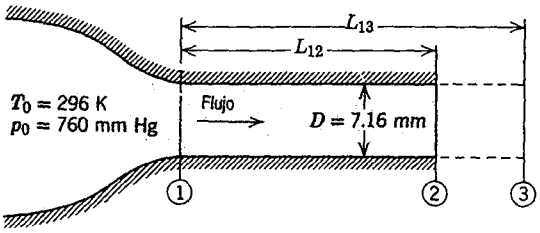
Las razones en las ecuaciones 13.18 se tabulan como funciones del número de Mach para un gas ideal con $k = 1.4$ en la tabla E.2 del apéndice E.

EJEMPLO 13.8 Flujo adiabático friccionante en un canal de área constante: solución con tablas

Un flujo de aire se induce en un tubo aislado liso de 7.16 mm de diámetro mediante una bomba de vacío. El aire se extrae de un cuarto, donde $p_0 = 760$ mm Hg (abs) y $T_0 = 23$ C, a través de una tobera convergente de contorno liso. En la sección ①, donde la tobera se une al tubo de área constante, la presión estática es -18.9 mm Hg (manométrica). En la sección ②, localizada a cierta distancia aguas abajo en el tubo de área constante, la presión estática es -412 mm Hg (manométrica). Las paredes del ducto son lisas; suponga que el factor de fricción promedio, $\bar{f}$, es el valor en la sección ①. Determine la longitud del ducto requerida para el estrangulamiento desde la sección ①, el número de Mach en la sección ② y la longitud del ducto, L_{12}, entre las secciones ① y ②.

PROBLEMA EJEMPLO 13.8

DATOS: Un flujo de aire (con fricción) en un tubo aislado de área constante.



Presiones manométricas: $p_1 = -18.9$ mm Hg, $p_2 = -412$ mm Hg. $M_3 = 1.0$

ENCUENTRE: *a*) L_{13}. *b*) M_2. *c*) L_{12}.

SOLUCIÓN:

El flujo en un tubo de área constante es un flujo friccionante y adiabático, un flujo de la línea de Fanno. Para encontrar el factor de fricción, necesitamos conocer las condiciones de flujo en la sección ①. Si suponemos que el flujo en la tobera es isentrópico, las propiedades locales a la salida de la tobera pueden calcularse empleando relaciones isentrópicas. De tal modo,

$$\frac{p_{0_1}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{k/(k-1)}$$

Al resolver para M_1, obtenemos

$$M_1 = \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_{0_1}}{p_1} \right)^{(k-1)/k} - 1 \right] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2}{0.4} \left[\left(\frac{760}{760 - 18.9} \right)^{0.286} - 1 \right] \right\}^{1/2} = 0.190$$

$$T_1 = \frac{T_{0_1}}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{296 \text{ K}}{1 + 0.2(0.190)^2} = 294 \text{ K}$$

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1\sqrt{kRT_1} = 0.190\left[1.4 \times 287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 294\ \text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$V_1 = 65.3$ m/s

Empleando la densidad del mercurio a temperatura ambiente (23 C).

$$p_1 = g\,\rho_{Hg} h_1 = g\,\text{SG}\,\rho_{H_2O} h_1$$

$$= 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 13.5 \times 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (760 - 18.9)10^{-3}\ \text{m} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$p_1 = 98.1$ kPa (abs)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{9.81\times 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}/\text{kg}\cdot\text{K}} \times \frac{1}{294\ \text{K}} = 1.16\ \text{kg/m}^3$$

A $T = 294$ K (21C), $\mu = 1.9 \times 10^{-5}$ kg/m · s de la figura A.2, apéndice A. Por consiguiente,

$$\text{Re}_1 = \frac{\rho_1 V_1 D_1}{\mu_1} = 1.16\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 65.3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.00716\ \text{m} \times \frac{\text{m}\cdot\text{s}}{1.9\times 10^{-5}\ \text{kg}} = 2.85 \times 10^4$$

De la figura 8.14, para tubería lisa, $f = 0.0235$. De la tabla E.2 a $M_1 = 0.19$, $p/p^* = 5.745$, y $\bar{f}L_{máx}/D_h = 16.38$. De tal modo, suponiendo $\bar{f} = f_1$,

$$L_{13} = (L_{máx})_1 = \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_1 \frac{D_h}{F_1} = 16.38 \times \frac{0.00716\ \text{m}}{0.0235} = 4.99\ \text{m} \longleftarrow L_{13}$$

Puesto que p^* es constante para flujo de la línea de Fanno, las condiciones en la sección (2) pueden determinarse a partir de la razón de presiones, $(p/p^*)_2$. En consecuencia,

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_2 = \frac{p_2}{p^*} = \frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p^*} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p}{p^*}\right)_1 = \left(\frac{760-412}{760-18.9}\right)5.745 = 2.698$$

De la tabla E.2, en $(p/p^*)_2 = 2.698$, $M_2 \simeq 0.40$ $\longleftarrow M_2$

A $M_2 = 0.40$, $\bar{f}L_{máx}/D_h = 2.309$ (tabla E.2). De tal modo,

$$L_{23} = (L_{máx})_2 = \left(\frac{\bar{f}L_{máx}}{D_h}\right)_2 \frac{D_h}{f_1} = 2.309 \times \frac{0.00716\ \text{m}}{0.0235} = 0.704\ \text{m}$$

Por último,

$$L_{12} = L_{13} - L_{23} = (4.99 - 0.704)\ \text{m} = 4.29\ \text{m} \longleftarrow L_{12}$$

{ Este es el mismo sistema físico analizado en el problema ejemplo 13.7. El empleo de tablas simplifica los cálculos y hace posible determinar la longitud del ducto. }

**13-4.4 Flujo isotér

Como sei
es esenci
pueden o
que actúa
presibles.
El an
flujo adia
constante
de control

o

Las ecuac
respectiva

Para un ga

Las ecuac
isotérmico,
todas las cc
modo, hay
aguas abaj
isotérmico,

Como en fl
fuerza de fr
en un flujo i
las condicic
vez que se c
$V_2/V_1 = M_2$

** Esta sección

**13-4.4 Flujo isotérmico

Como señalamos antes, hay casos de flujo de gas en ductos de área constante en los que el flujo es esencialmente isotérmico. Por lo general, los números de Mach en tales flujos son bajos, pero pueden ocurrir cambios significativos en la presión como resultado de los efectos friccionantes que actúan sobre tramos de ducto largos. Por tanto, tales flujos no pueden tratarse como incompresibles. La suposición de flujo isotérmico es mucho más apropiada.

El análisis de flujo isotérmico es similar al del flujo adiabático, con un cambio principal. Para flujo adiabático, el intercambio de calor, $\delta Q/dm$, fue cero; para flujo isotérmico, la temperatura es constante y, por tanto, $dT = 0$. En flujo isotérmico, el enunciado de la primera ley para el volumen de control finito de la figura 13.9 se escribió como

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{\delta Q}{dm} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{13.19a}$$

o

$$q = \frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \tag{13.19b}$$

Las ecuaciones de continuidad y de momento están dadas por las ecuaciones 13.7a y 13.7b, respectivamente,

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} \tag{13.7a}$$

$$R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13.7b}$$

Para un gas ideal,

$$p = \rho RT \tag{13.7e}$$

Las ecuaciones 13.7a, 13.7b, 13.7e y 13.19a son las ecuaciones gobernantes para el flujo isotérmico, unidimensional y estable de un gas ideal en un ducto de área constante. Si se conocen todas las condiciones en el estado ①, tenemos cinco incógnitas en estas cuatro ecuaciones. De tal modo, hay número infinito de estados ② posibles. El lugar geométrico de estos estados posibles aguas abajo es una línea horizontal a través del estado ① sobre el diagrama *Ts*. Para flujo isotérmico, el cambio en la entropía puede calcularse de acuerdo con la ecuación 13.7d como

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{13.20}$$

Como en flujo de la línea de Fanno, la variable independiente principal en flujo isotérmico es la fuerza de fricción, R_x. El conocimiento de la fuerza de fricción entre cualesquiera dos secciones en un flujo isotérmico nos posibilitaría predecir las condiciones aguas abajo cuando se conocieran las condiciones aguas arriba. Las propiedades aguas abajo pueden determinarse fácilmente una vez que se conoce el número de Mach aguas abajo. En flujo isotérmico, c = constante, por lo que $V_2/V_1 = M_2/M_1$, y de la ecuación 13.7a tenemos

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2} \tag{13.21}$$

Al combinar la ecuación de estado de gas ideal con la ecuación 13.21, obtenemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \tag{13.22}$$

La razón de temperaturas de estancamiento está dada por

$$\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} = \frac{1 + \dfrac{k-1}{2}M_2^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2} \tag{13.23}$$

Para determinar la variación en el número de Mach a lo largo de la longitud del ducto, es necesario considerar la ecuación de momento diferencial para flujo con fricción. El análisis que conduce a la ecuación 13.14 es válido para flujo isotérmico. Puesto que T = constante para flujo isotérmico, entonces de la ecuación 13.14, con $dT = 0$,

$$\frac{f}{D_h}\frac{kM^2}{2}dx = \left(\frac{1 - kM^2}{2}\right)\frac{d(M^2)}{M^2} \tag{13.24}$$

y

$$\frac{f}{D_h}dx = \frac{(1 - kM^2)d(M^2)}{kM^4} \tag{13.25}$$

La ecuación 13.25 muestra que el número de Mach límite para flujo isotérmico es $M = 1/\sqrt{k}$. Como T es constante, entonces el factor de fricción, $f = f(Re)$, también es constante. La integración de la ecuación 13.25 entre los límites de $M = M$ en $x = 0$ y $M = 1/\sqrt{k}$ en $x = L_{máx}$, donde $L_{máx}$ es la distancia más allá de la cual no puede seguir el flujo isotérmico, produce

$$\frac{fL_{máx}}{D_h} = \frac{1 - kM^2}{kM^2} + \ln kM^2 \tag{13.26}$$

La longitud del ducto, L, requerida para que el número de Mach del flujo cambie de M_1 a M_2 puede obtenerse de

$$f\frac{L}{D_h} = f\frac{L_{máx_1} - L_{máx_2}}{D_h} = \frac{1 - kM_1^2}{kM_1^2} - \frac{1 - kM_2^2}{kM_2^2} + \ln\frac{M_1^2}{M_2^2} \tag{13.27}$$

La distribución del intercambio térmico a lo largo del ducto requerido para mantener el flujo isotérmico puede determinarse de la forma diferencial de la ecuación 13.19b, como

$$dq = dh_0 = c_p dT_0 = c_p d\left[T(1 + \frac{k-1}{2}M^2)\right]$$

o, puesto que T = constante,

$$dq = c_p T\left(\frac{k-1}{2}\right)dM^2 = \frac{c_p T_0(k-1)}{2(1 + \dfrac{k-1}{2}M^2)}dM^2$$

Al sustitui

De acuerd consiguier isotérmico aceleració de númerc

13-5 FLUJO SIN FRI CON INTERCAI

Para expl ecuacione específico

13-5.1 Ecuaciones t

a. Ecu

Ecuación

Suposici

Entonces

(13.21)

mos

(13.22)

(13.23)

ngitud del ducto, es
ción. El análisis que
constante para flujo

(13.24)

(13.25)

o es $M = 1/\sqrt{k}$. Como
ıte. La integración de
$L_{máx}$, donde $L_{máx}$ es la

(13.26)

jo cambie de M_1 a M_2

$\frac{2}{1}$
$\frac{2}{2}$ (13.27)

para mantener el flujo
b, como

Al sustituir dM^2 de la ecuación 13.25,

$$dq = \frac{c_p T_0 (k-1) k M^4}{2(1 + \frac{k-1}{2} M^2)(1 - kM^2)} \frac{f}{D_h} dx \tag{13.28}$$

De acuerdo con la ecuación 13.28, observamos que cuando $M \to 1/\sqrt{k}$, entonces $dq/dx \to \infty$. Por consiguiente, se requiere una relación infinita de intercambio de calor para mantener el flujo isotérmico cuando el número de Mach se acerca al valor límite. Por tanto, concluimos que la aceleración isotérmica de flujo en un ducto de área constante es sólo físicamente posible para flujos de números de Mach bajos.

13-5 FLUJO SIN FRICCIÓN EN UN DUCTO DE ÁREA CONSTANTE CON INTERCAMBIO DE CALOR

Para explorar los efectos del intercambio térmico sobre un flujo compresible, aplicamos las ecuaciones básicas al flujo sin fricción, unidimensional y estable de un gas ideal con calores específicos constantes a través del volumen de control finito que se muestra en la figura 13.14.

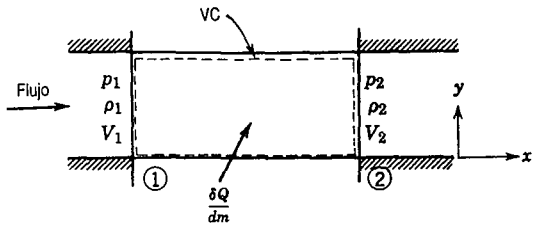


Fig. 13.14 Volumen de control utilizado en el análisis integral del flujo sin fricción con intercambio térmico.

13-5.1 Ecuaciones básicas

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0(1)} \int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones:
1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en cada sección

Entonces

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A_1|\} + \{|\rho_2 V_2 A_2|\}$$

El área es constante, por lo que

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \equiv G = \frac{\dot{m}}{A} \tag{13.29a}$$

b. Ecuación de momento

Ecuación básica: $= 0(3) \quad = 0(1)$

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposición: 3) $F_{B_x} = 0$

Puesto que no hay fricción entre las paredes del ducto y el flujo, y $A_2 = A_1 = A$, entonces

$$p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Esto puede escribirse como

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13.29b}$$

o

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$$

c. Primera ley de la termodinámica

Ecuación básica: $= 0(4) \quad = 0(5) \quad = 0(5) \quad = 0(1)$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otro tipo}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

donde $\simeq 0(6)$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Suposiciones: 4) $\dot{W}_s = 0$

5) $\dot{W}_{\text{corte}} = \dot{W}_{\text{otro tipo}} = 0$

6) Se ignoran los efectos de la gravedad

Con estas restricciones,

$$\dot{Q} = \left(u_1 + \frac{V_1^2}{2} + p_1 v_1\right)\{-|\rho_1 V_1 A|\} + \left(u_2 + \frac{V_2^2}{2} + p_2 v_2\right)\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

o

$$\dot{Q} = \dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} - h_1 - \frac{V_1^2}{2}\right)$$

Pero

$$\frac{\delta Q}{dm} = \frac{1}{\dot{m}}\dot{Q}$$

de modo que

$$\frac{\delta Q}{dm} + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{13.29c}$$

o

$$\frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1}$$

Vemos que el intercambio de calor provoca el cambio en la entalpía de estancamiento y, por tanto, en la temperatura de estancamiento.

d. Segunda ley de la termodinámica

Ecuación básica:

$$\int_{sc} \frac{1}{T}\frac{\dot{Q}}{A} dA \leq \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{=0(1)} \int_{vc} s\rho \, d\forall + \int_{sc} s\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.59}$$

o

$$\int_{sc} \frac{1}{T}\frac{\dot{Q}}{A} dA \leq \dot{m}(s_2 - s_1)$$

Puesto que el flujo es sin fricción, la igualdad en la ecuación 4.59 se cumpliría si se considerara que el proceso de intercambio térmico va a ser reversible. Sin embargo, incluso si se hiciera esta dudosa suposición, la integral en el lado izquierdo de la ecuación no puede evaluarse. En consecuencia, la forma del volumen de control de la segunda ley no nos permite calcular el cambio real en la entropía entre cualesquiera dos posiciones en el flujo. La relación de intercambio de calor, $\dot{Q}$, puede ser positiva (adición de calor al flujo) o negativa (extracción de calor del flujo). Por tanto, el cambio en la entropía en un flujo sin fricción con intercambio de calor puede ser positivo o negativo.

Para calcular el cambio en la entropía, nos apoyamos en las ecuaciones $T\,ds$. Puesto que

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

para un gas ideal, podemos escribir

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

Para calores específicos constantes, la ecuación puede integrarse para producir

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{13.29d}$$

e. Ecuaciones de estado

Para un gas ideal, la ecuación de estado es

$$p = \rho RT \tag{13.29e}$$

Las ecuaciones de la 13.29a a la 13.29e son las ecuaciones gobernantes para el flujo sin fricción, unidimensional y estable de un gas ideal en un ducto de área constante, con intercambio de calor. Si se conocen todas las propiedades en el estado ①, entonces tenemos siete incógnitas (ρ_2, V_2, p_2, h_2, s_2, T_2 y $\delta Q/dm$) en estas cinco ecuaciones. Sin embargo, tenemos la relación conocida entre h y T para un gas ideal, $dh = c_p\, dT$. Para un gas ideal con calores específicos constantes,

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p \Delta T = c_p(T_2 - T_1) \tag{13.29f}$$

Tenemos así la situación de seis ecuaciones y siete incógnitas.

13-5.2 La línea de Rayleigh

Si todas las condiciones en el estado ① se conocen, ¿cuántos estados ② posibles hay? Las matemáticas de la situación (seis ecuaciones y siete incógnitas) indican un número infinito de estados ② posibles.

Con un número infinito de estados ② posibles para un estado ① determinado, ¿qué se esperará si todos los estados ② posibles se grafican sobre un diagrama Ts? Se deduce que el lugar geométrico de todos los estados ② posibles, alcanzables desde el estado ①, es una curva continua que pasa por el estado ①.

¿Cómo podemos determinar esta curva? Quizá la manera más simple es suponer diferentes valores de T_2. Para cada T_2 calculamos todas las demás propiedades en el estado ②, así como $\delta Q/dm$.

Los resultados de estos cálculos se muestran cualitativamente sobre el plano Ts en la figura 13.15. El lugar geométrico de todos los estados aguas abajo posibles recibe el nombre de la *línea de Rayleigh*. Los cálculos muestran algunas características interesantes del flujo de la línea de Rayleigh. En el punto de máxima temperatura (punto a de la figura 13.15), el número de Mach para un gas ideal es $1/\sqrt{k}$. En el punto de entropía máxima (punto b de la figura 13.15), $M = 1$. En la rama superior de la curva, el número de Mach siempre es menor que la unidad, y aumenta monótonamente conforme avanzamos a la derecha a lo largo de la curva. En cualquier punto sobre la parte inferior de la curva, el número de Mach es mayor que la unidad, y disminuye monótonamente cuando nos movemos a la derecha a lo largo de la curva. Sin que importe el número de Mach inicial, con la adición de calor el estado del flujo sigue hacia la derecha, y con la extracción de calor el estado del flujo prosigue hacia la izquierda a lo largo de la línea de Rayleigh.

Para cualquier estado inicial en un flujo de la línea de Rayleigh, cualquier punto en ésta representa un estado aguas abajo matemáticamente posible. En realidad, determinamos el lugar geométrico de todos los estados aguas abajo posibles suponiendo valores de T_2 y calculando las propiedades correspondientes. Aunque la línea de Rayleigh representa todos los estados matemáticamente posibles, ¿son estados aguas abajo físicamente alcanzables? Un momento de reflexión indicará que lo son. Como estamos considerando un flujo con intercambio térmico, la segunda ley no impone ninguna restricción acerca del signo del cambio de la entropía.

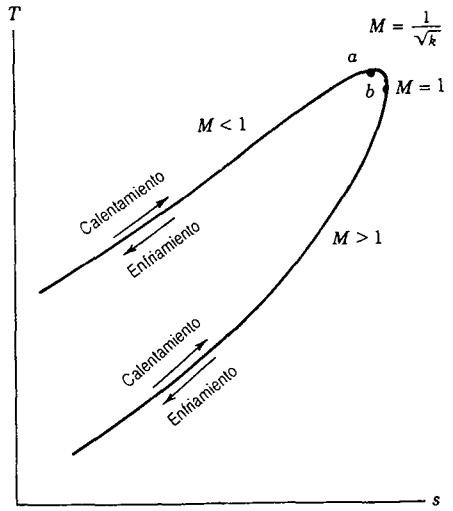


Fig. 13.15 Diagrama esquemático *Ts* para el flujo sin fricción en un ducto de área constante con intercambio térmico (flujo de la línea de Rayleigh).

Los efectos del intercambio térmico en las propiedades del flujo compresible, sin fricción y estable de un gas ideal pueden determinarse a partir de las ecuaciones básicas, ecuaciones de la 13.29a a la 13.29f, y de la línea de Rayleigh, figura 13.15. Estos efectos se resumen en la tabla 13.2; las bases de las tendencias indicadas se analizan a continuación en unos cuantos párrafos.

La dirección del cambio de entropía se determina siempre mediante el intercambio térmico; la entropía aumenta con el calentamiento y disminuye con el enfriamiento. De manera similar, la primera ley, ecuación 13.29c, muestra que el calentamiento incrementa la entalpía de estancamiento y que el enfriamiento la reduce; como $\Delta h_0 = c_p \Delta T_0$, el efecto en la temperatura de estancamiento es el mismo.

El efecto en la temperatura del calentamiento y el enfriamiento puede deducirse de la forma de la línea de Rayleigh en la figura 13.15. Vemos que para $M < 1/\sqrt{k}$ (para aire, $1/\sqrt{k} \approx 0.85$) o para $M > 1$, el calentamiento provoca que T aumente, y en las mismas regiones el enfriamiento ocasiona que T disminuya. Sin embargo, observamos también que el inesperado resultado de que para $1/\sqrt{k} < M < 1$, ¡la *adición de calor* ocasiona que la temperatura de la corriente *disminuya* y que la *extracción de calor* produce que la temperatura de la corriente *aumente*!

En flujo subsónico el número de Mach aumenta monótonamente con el calentamiento, hasta que se alcanza $M = 1$. Para condiciones de entrada dadas, todos los estados aguas abajo posibles yacen sobre una sola línea de Rayleigh. Por tanto, el punto $M = 1$ determina la adición máxima posible de calor sin estrangulamiento. Si el flujo es inicialmente supersónico, el calentamiento reducirá el número de Mach. De nuevo, la máxima adición posible de calor sin estrangulamiento es aquella que reduce el número de Mach a $M = 1.0$.

El efecto del intercambio de calor sobre la presión estática se obtiene de las formas de la línea de Rayleigh y de las líneas de presión constante en el plano *Ts* (véase la figura 13.16). Para $M < 1$, la presión desciende con el calentamiento y para $M > 1$, aumenta con el mismo, como muestran las formas de las líneas de presión constante. Una vez que la variación de presión se ha determinado, puede encontrarse el efecto sobre la velocidad a partir de la ecuación de momento,

Tabla 13.2 Resumen de los efectos del intercambio térmico en las propiedades del fluido

	Calentamiento		Enfriamiento		
Propiedad	$M < 1$	$M > 1$	$M < 1$	$M > 1$	**Obtenida de:**
Entropía, s	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Segunda ley
Temperatura de estancamiento, T_0	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Primera ley y $\Delta h_0 = c_p \Delta T_0$
Temperatura, T	$\left(M < \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ Aumenta	Aumenta	$\left(M < \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ Disminuye	Disminuye	Forma de la línea de Rayleigh
	$\left(\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1\right)$ Aumenta		$\left(\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1\right)$ Disminuye		
Número de Mach, M	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Tendencia en la línea de Rayleigh
Presión, p	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Tendencia en la línea de Rayleigh
Velocidad, V	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Ecuación de momento, y efecto sobre p
Densidad, ρ	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Ecuación de continuidad, y efecto sobre V
Presión de estancamiento, p	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Fig. 13.16

De tal mo
de contin

La p
se ilustra
tiene imp
combusti
provoca
ocurre a

o

Fig. 13.16

T

EJEMPL

Fluye air
piedades
El flujo s
energía a

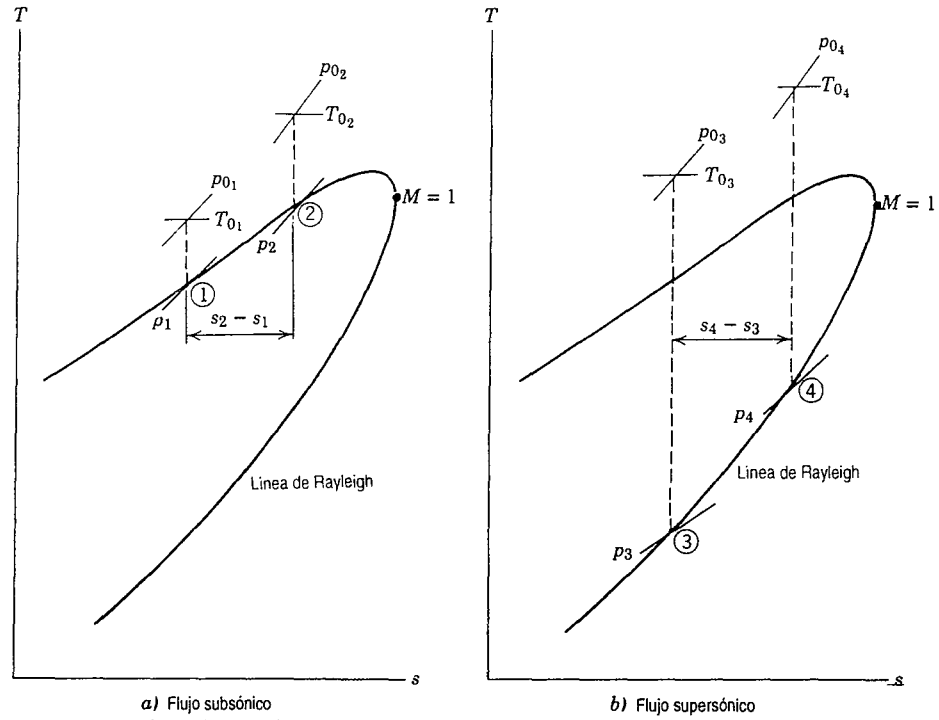


Fig. 13.16 Reducción en la presión de estancamiento debida a la adición de calor en dos casos de flujo.

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13.29b}$$

o

$$p + \left(\frac{\dot{m}}{A}\right) V = \text{constante}$$

De tal modo, puesto que $\dot{m}/A$ = constante, las tendencias en p y V deben ser opuestas. De la ecuación de continuidad, la tendencia en ρ es opuesta a la de V.

La presión local de estancamiento isentrópico siempre disminuye con el calentamiento. Esto se ilustra en forma esquemática en la figura 13.16. Una reducción en la presión de estancamiento tiene implicaciones prácticas obvias para el proceso de calentamiento, tal como en las cámaras de combustión. Añadir la misma cantidad de energía por unidad de masa (el mismo cambio en T_0) provoca un cambio mayor en p_0 en el caso de flujo supersónico; debido a que el calentamiento ocurre a una temperatura más baja en flujo supersónico, el aumento en la entropía es mayor.

EJEMPLO 13.9 Flujo sin fricción en un ducto de área constante con adición de calor

Fluye aire con fricción despreciable por un ducto de área $A = 0.25$ pies^2. En la sección ①, las propiedades del flujo son $T_1 = 600$ R, $p_1 = 20$ psia y $V_1 = 360$ pies/s. En la sección ②, $p_2 = 10$ psia. El flujo se calienta entre las secciones ① y ②. Determine las propiedades en la sección ②, la energía añadida y el cambio en la entropía. Por último, grafique el proceso en un diagrama Ts.

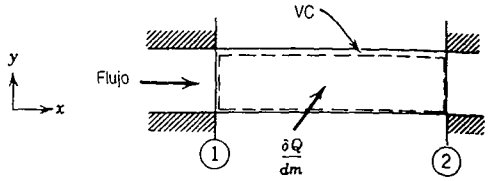
PROBLEMA EJEMPLO 13.9

DATOS: Un flujo de aire sin fricción en el ducto que se muestra:

$T_1 = 600$ R

$p_1 = 20$ psia $\quad p_2 = 10$ psia

$V_1 = 360$ pies/s $\quad A_1 = A_2 = A = 0.25$ pies^2



ENCUENTRE: *a*) Las propiedades en la sección (2). *b*) $\delta Q/dm$.
c) $s_2 - s_1$. *d*) Dibuje el proceso en un diagrama Ts.

SOLUCIÓN:
Aplique la componente x de la ecuación de momento, empleando las coordenadas y el volumen de control mostrado.

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \overbrace{F_{B_x}}^{=0} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)=0(2)} \int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Suposiciones: 1) $F_{B_x} = 0$
2) Flujo estable
3) Flujo uniforme en cada sección

Entonces

$$p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\} = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

o

$$p_1 - p_2 = \frac{\dot{m}}{A}(V_2 - V_1) = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

La solución respecto a V_2 produce

$$V_2 = \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 V_1} + V_1$$

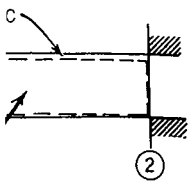
Para un gas ideal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 20 \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{lbm} \cdot \text{R}}{53.3 \text{ pies} \cdot \text{lbf}} \times \frac{1}{600 \text{ R}} = 0.0901 \text{ lbm/pie}^3$$

$$V_2 = (20 - 10) \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{pies}^3}{0.0901 \text{ lbm}} \times \frac{\text{s}}{360 \text{ pies}} \times 32.2 \frac{\text{lbm}}{\text{slug}}$$

$$\times \frac{\text{slug} \cdot \text{pie}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2} + 360 \frac{\text{pie}}{\text{s}}$$

$V_2 = 1790$ pie/s $\longleftarrow V_2$



o en un diagrama Ts.

as y el volumen de

(4.19a)

)

901 lbm/pie³

.2 $\frac{\text{lbm}}{\text{slug}}$

V_2

De la continuidad, $G = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, de modo que

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = 0.0901 \frac{\text{lbm}}{\text{pie}^3}\left(\frac{360}{1790}\right) = 0.0181 \text{ lbm/pie}^3 \longleftarrow \rho_2$$

Al resolver para T_2, se obtiene

$$T_2 = \frac{p_2}{\rho_2 R} = 10 \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \times 144 \frac{\text{pulg}^2}{\text{pie}^2} \times \frac{\text{pie}^3}{0.0181 \text{ lbm}} \times \frac{\text{lbm} \cdot \text{R}}{53.3 \text{ pies} \cdot \text{lbf}} = 1490 \text{ R} \longleftarrow T_2$$

La temperatura local de estancamiento isentrópico está dada por

$$T_{0_2} = T_2\left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)$$

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = 1890 \text{ pies/s}; \qquad M_2 = \frac{V_2}{c_2} = \frac{1790}{1890} = 0.947$$

$$T_{0_2} = 1490 \text{ R}[1+0.2(0.947)^2] = 1760 \text{ R} \longleftarrow T_{0_2}$$

y

$$p_{0_2} = p_2\left(\frac{T_{0_2}}{T_2}\right)^{k/(k-1)} = 10 \text{ psia}\left(\frac{1760}{1490}\right)^{3.5} = 17.9 \text{ psia} \longleftarrow p_{0_2}$$

La adición de calor se determina a partir de la ecuación de energía. Ecuación básica:

$$\dot{Q} - \cancel{\dot{W}_s}^{=0(4)} - \cancel{\dot{W}_{\text{corte}}}^{=0(5)} - \cancel{\dot{W}_{\text{otro}}}^{=0(5)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(2)} \int_{VC} e\rho \, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

donde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \cancel{gz}^{\simeq 0(6)}$$

Suposiciones:
4) $\dot{W}_s = 0$
5) $\dot{W}_{\text{corte}} = \dot{W}_{\text{otro tipo}} = 0$
6) Se desprecian los cambios en z

Por tanto,

$$\dot{Q} = \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\{-|\rho_1 V_1 A|\} + \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} - h_1 - \frac{V_1^2}{2}\right) = \dot{m}(h_{0_2} - h_{0_1}) = \dot{m} c_p (T_{0_2} - T_{0_1})$$

y

$$\frac{\delta Q}{dm} = \frac{1}{\dot{m}} \dot{Q} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1})$$

$$T_{0_1} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = 1200 \text{ pies/s}; \qquad M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{360}{1200} = 0.3$$

$$T_{0_2} = 600 \text{ R}[1 + 2(0.3)^2] = 611 \text{ R}$$

por lo que

$$\frac{\delta Q}{dm} = 0.240\ \frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot\text{R}}(1760 - 611)\ \text{R} = 276\ \text{Btu/lbm} \longleftarrow \delta Q/dm$$

Empleando la ecuación $T\,ds$, $T\,ds = dh - v\,dp$, obtenemos, para un gas ideal con calores específicos constantes,

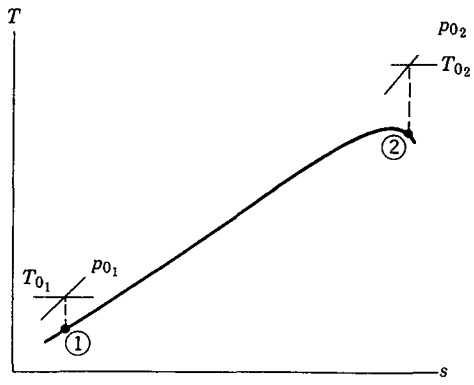
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - (c_p - c_v) \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Por tanto,

$$s_2 - s_1 = 0.240\ \frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot\text{R}} \times \ln\left(\frac{1490}{600}\right) - (0.240 - 0.171)\ \frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot\text{R}} \times \ln\left(\frac{10}{20}\right)$$

$$s_2 - s_1 = 0.266\ \text{Btu/lbm}\cdot\text{R} \longleftarrow s_2 - s_1$$

El proceso sigue una línea de Rayleigh:



Para completar nuestro análisis, vamos a examinar el cambio en p_0 comparando p_{0_2} con p_{0_1}.

$$p_{0_1} = p_1\left(\frac{T_{0_1}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = 20.0\ \text{psia}\left(\frac{611}{600}\right)^{3.5} = 21.3\ \text{psia} \longleftarrow p_{0_1}$$

Al comparar, vemos que p_{0_2} es menor que p_{0_1}.

En general, la presión de estancamiento disminuye con el calentamiento y aumenta con el enfriamiento en flujo de la línea de Rayleigh.

**13-5.3 Tablas para el cálculo del flujo de la línea de Rayleigh de un gas ideal

En la sección 13-5.1 escribimos las ecuaciones básicas para el flujo de la línea de Rayleigh entre dos estados arbitrarios ① y ② en el flujo. Para facilitar la solución de problemas, es conveniente tabular propiedades adimensionales en términos del número de Mach local como lo hicimos para

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

el flujo de la línea de Fanno. El estado de referencia se toma otra vez como la condición crítica donde $M = 1$; las propiedades en la condición crítica se denotan mediante (*).

Las propiedades adimensionales (tales como T/T^* y p/p^*) pueden obtenerse escribiendo las ecuaciones básicas entre un punto en el flujo donde las propiedades son M, T, p, etc. (sin subíndice) y el estado crítico ($M = 1$, con propiedades denotadas como T^*, p^*, etc.).

La razón de presiones, p/p^*, puede obtenerse de la ecuación de momento

$$pA - p^*A = \dot{m}V^* - \dot{m}V \tag{13.29b}$$

o

$$p + \rho V^2 = p^* + \rho^* V^{*2}$$

Sustituyendo $\rho = p/RT$, y factorizando las presiones, obtenemos

$$p\left[1 + \frac{V^2}{RT}\right] = p^*\left[1 + \frac{V^{*2}}{RT^*}\right]$$

Observando que $V^2/RT = k(V^2/kRT) = kM^2$, determinamos entonces

$$p[1 + kM^2] = p^*[1 + k]$$

y finalmente,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \tag{13.30a}$$

De la ecuación de estado de gas ideal,

$$\frac{T}{T^*} = \frac{p}{p^*}\frac{\rho^*}{\rho}$$

De la ecuación de continuidad,

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = M\frac{c}{c^*} = M\sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

Después de esto, sustituyendo ρ^*/ρ, obtenemos

$$\frac{T}{T^*} = \frac{p}{p^*}M\sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

Elevar al cuadrado y sustituir de la ecuación 13.30a produce

$$\frac{T}{T^*} = \left[\frac{p}{p^*}M\right]^2 = \left[M\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\right]^2 \tag{13.30b}$$

De la continuidad, empleando la ecuación 13.30b,

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = \frac{M^2(1+k)}{1+kM^2} \tag{13.30c}$$

La temperatura de estancamiento adimensional, T_0/T_0^*, puede determinarse de

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{T_0}{T}\frac{T}{T^*}\frac{T^*}{T_0^*} = \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\left[M\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\right]^2 \frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{2}\right)}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(k+1)M^2\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}{(1+kM^2)^2} \tag{13.30d}$$

De manera similar,

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p}\frac{p}{p^*}\frac{p^*}{p_0^*} = \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}\left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{2}\right)^{k/(k-1)}}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{k/(k-1)} \tag{13.30e}$$

Las razones en las ecuaciones de la 13.30a a la 13.30e son funciones únicamente del número de Mach; se tabulan como funciones del número de Mach, para un gas ideal con $k = 1.4$, en la tabla E.3 del apéndice E.

EJEMPLO 13.10 Flujo sin fricción en un ducto de área constante con adición de calor: solución con tablas

Fluye aire con fricción despreciable en un ducto de área constante. En la sección ①, las propiedades son $T_1 = 60$ C, $p_1 = 135$ kPa (abs) y $V_1 = 732$ m/s. Se añade calor entre la sección ① y la sección ②, donde $M = 1.2$. Determine las propiedades en la sección ②, e intercambio de calor por unidad de masa, el cambio en la entropía y dibuje el proceso en un diagrama Ts. Emplee tablas.

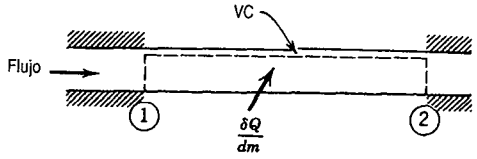
PROBLEMA EJEMPLO 13.10

DATOS: El flujo de aire sin fricción que se muestra:

$T_1 = 333$ K $\quad M_2 = 1.2$

$p_1 = 135$ kPa (abs)

$V_1 = 732$ m/s



ENCUENTRE: *a*) Las propiedades en la sección ②. *b*) $\delta Q/dm$

c) $s_2 - s_1$. *d*) Dibuje el proceso en un diagrama Ts.

SOLUCIÓN:

Para obtener las razones de propiedades de las tablas, necesitamos ambos números de Mach.

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1.4 \times 287\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 333\text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 366\text{ m/s}$$

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = 732\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{366\ \text{m}} = 2.00$$

De la tabla E.3, apéndice E,

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*
2.00	0.7934	1.503	0.5289	0.3636	1.455
1.20	0.9787	1.019	0.9119	0.7958	1.146

Utilizando estos datos y reconociendo que las propiedades críticas son constantes, obtenemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0.9119}{0.5289} = 1.72; \qquad T_2 = 1.72T_1 = (1.72)333\ \text{K} = 573\ \text{K} \longleftarrow T_2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = \frac{0.7958}{0.3636} = 2.19; \qquad p_2 = 2.19\,p_1 = (2.19)135\ \text{kPa}$$

$$p_2 = 296\ \text{kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{1.146}{1.455} = 0.788; \qquad V_2 = 0.788V_1 = (0.788)732\text{m/s}$$

$$V_2 = 577\ \text{m/s} \longleftarrow V_2$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{2.96\times 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287\ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{573\ \text{K}} = 1.80\ \text{kg/m}^3 \longleftarrow \rho_2$$

La adición de calor puede determinarse de la ecuación de energía, la cual se reduce a (véase el problema ejemplo 13.9)

$$\frac{\delta Q}{dm} = h_{0_2} - h_{0_1} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1})$$

De las tablas de flujo isentrópico (tabla E.1) a $M = 2.0$,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_1}{T_{0_1}} = 0.5556; \qquad T_{0_1} = \frac{T_1}{0.5556} = \frac{333\ \text{K}}{0.5556} = 599\ \text{K}$$

y a $M = 1.2$,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_2}{T_{0_2}} = 0.7764; \qquad T_{0_2} = \frac{T_2}{0.7764} = \frac{573\ \text{K}}{0.7764} = 738\ \text{K} \longleftarrow T_{0_2}$$

La sustitución produce

$$\frac{\delta Q}{dm} = c_p(T_{0_2} - T_{0_1}) = \frac{1.00\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}}{}(738 - 599)\ \text{K} = 139\ \text{kJ/kg} \longleftarrow \delta Q/dm$$

El cambio en la entropía puede encontrarse de la ecuación $T\,ds$, $T\,ds = dh - v\,dp$. Para un gas ideal con calores específicos constantes,

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{1.00\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}}{}\ln\left(\frac{573}{333}\right) - \frac{287\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}}}{}\ln\left(\frac{2.96\times 10^5}{1.35\times 10^5}\right)\frac{\text{kJ}}{1000\ \text{N}\cdot\text{m}}$$

$$s_2 - s_1 = 0.317\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K} \longleftarrow s_2 - s_1$$

Por último, se verifica el efecto en p_0. De la tabla E.1, a $M = 2.0$,

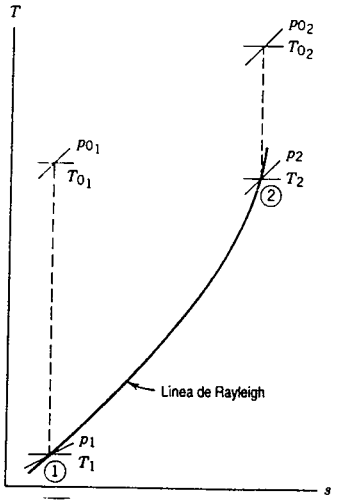
$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0.1278; \qquad p_{0_1} = \frac{p_1}{0.1278} = \frac{135 \text{ kPa}}{0.1278} = 1.06 \text{ MPa (abs)}$$

y a $M = 1.2$,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_2}{p_{0_2}} = 0.4124; \qquad p_{0_2} = \frac{p_2}{0.4124} = \frac{196 \text{ kPa}}{0.4124} = 718 \text{ kPa (abs)}$$

p_{0_2}

De manera que $p_{0_2} < p_{0_1}$, como esperábamos para un proceso de calentamiento.
El proceso sigue la rama supersónica de una línea de Rayleigh:



13-6 ONDAS DE CHOQUE NORMALES

Hemos mencionado previamente las ondas de choque normales en la sección de flujo en toberas. En la práctica, estas discontinuidades irreversibles pueden ocurrir en cualquier campo de flujo supersónico, ya sea en flujo interno o en flujo externo.[3] El conocimiento de los cambios de propiedades a través de ondas de choque y del comportamiento de éstas es importante para entender el diseño de difusores supersónicos, por ejemplo, en entradas de aviones de alto desempeño y túneles de viento supersónicos. Por consiguiente, el propósito de esta sección es analizar los procesos de ondas de choque normales.

Antes de aplicar las ecuaciones básicas a las ondas de choque normales, es importante formar una imagen física clara de la propia onda de choque. A pesar de que es físicamente imposible tener discontinuidades en las propiedades de los fluidos, la onda de choque normal es casi discontinua. El espesor de una onda de choque es de aproximadamente 0.2 micrómetros (10^{-5} pulg), o aproximadamente 4 veces la trayectoria libre media de las moléculas del gas [1]. Los grandes cambios en la presión, la temperatura y otras propiedades ocurren a través de esta pequeña distancia. ¡Las desaceleraciones locales del fluido alcanzan decenas de millones de 10 *g*s! Estas

[3] La película de la NCFMF, *Channel Flow of a Compressible Fluid*, D. Coles, director, muestra varios ejemplos de formación de ondas de choque en flujo interno.

consideraciones justifican tratar la onda de choque normal como una abrupta discontinuidad; estamos interesados en los cambios que ocurren a través de la onda de choque más que en los detalles de su estructura.

13-6.1 Ecuaciones básicas

Para empezar nuestro análisis, aplicamos las ecuaciones básicas al delgado volumen de control que se muestra en la figura 13.17, donde, por generalidad, hemos descrito una onda de choque que permanece en un pasaje cuya forma es arbitraria.

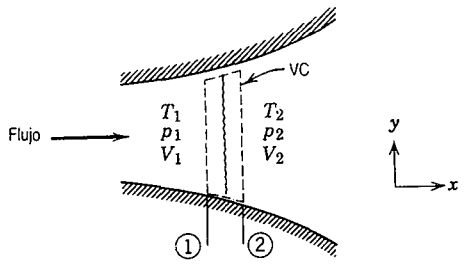


Fig. 13.17 Volumen de control utilizado en el análisis de una onda de choque normal.

a. Ecuación de continuidad

Ecuación básica:

$$0 = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.13}$$

Suposiciones: 1) Flujo estable
2) Flujo uniforme en cada sección
3) $A_1 = A_2 = A$, debido a que la onda de choque es sumamente delgada

Por tanto,

$$0 = \{-|\rho_1 V_1 A|\} + \{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Escribiendo el resultado en términos de magnitudes escalares, obtenemos

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \frac{\dot{m}}{A} \tag{13.31a}$$

b. Ecuación de momento

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \overbrace{F_{B_x}}^{=0(5)} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{4.19a}$$

Suposiciones: 4) Se ignora la fricción en las paredes de los ductos debido a que la onda de choque es tan delgada
5) $F_{B_x} = 0$

Bajo estas condiciones,

$$F_{S_x} = p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Con el empleo de magnitudes escalares y eliminando los signos de valor absoluto, obtenemos

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13.31b}$$

o

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$$

c. Primera ley de la termodinámica

Ecuación básica:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{corte}} - \dot{W}_{\text{otro tipo}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC}(e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \tag{4.57}$$

$= 0(6)$ $= 0(7)$ $= 0(8)$ $= 0(8)$ $= 0(1)$

donde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \qquad (\simeq 0(9))$$

Suposiciones: 6) $\dot{Q} = 0$ (flujo adiabático)
7) $\dot{W}_s = 0$
8) $\dot{W}_{\text{corte}} = \dot{W}_{\text{otro tipo}} = 0$
9) Se desprecian los efectos de la gravedad

Por tanto,

$$0 = \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\{-|\rho_1 V_1 A|\} + \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

Sin embargo, de la continuidad, los términos de la relación de flujo másico entre corchetes son iguales. También podemos sustituir $h = u + pv$, para obtener

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{13.31c}$$

o, en términos de la entalpía de estancamiento,

$$h_{0_1} = h_{0_2}$$

Físicamente, debemos esperar que la energía total del flujo permanezca constante, puesto que no hay adición de energía.

d. Segunda ley de la termodinámica

Ecuación básica:

$$\int_{sc} \frac{1}{T}\frac{\dot{Q}}{\dot{A}}dA \leq \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} s\rho\, d\forall + \int_{sc} s\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (4.59)$$

($\dot{Q}$: $=0(6)$; $\partial/\partial t$: $=0(1)$)

Por tanto,

$$0 \leq s_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + s_2\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

El flujo que pasa por una onda de choque normal es irreversible debido a los cambios de propiedades casi discontinuos a través de la onda. En consecuencia, se cumple la desigualdad en la ecuación anterior. La forma del volumen de control de la segunda ley nos dice entonces que $s_2 > s_1$.

Este hecho es de poca ayuda en el cálculo del cambio de entropía real a través de la onda de choque. Para calcular el cambio en la entropía, nos apoyamos en las ecuaciones $T\,ds$. Puesto que

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

entonces, para un gas ideal, podemos escribir

$$ds = c_p\frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

Para calores específicos constantes, esta ecuación puede integrarse para dar

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} \qquad (13.31d)$$

e. Ecuación de estado

Para un gas ideal, la ecuación de estado es

$$p = \rho RT \qquad (13.31e)$$

Las ecuaciones de la 13.31a a la 13.31e son las gobernantes para el flujo de un gas ideal a través de una onda de choque normal. Si todas las propiedades en el estado ① (inmediatamente aguas arriba de la onda de choque) se conocen, entonces tenemos seis incógnitas (T_2, p_2, ρ_2, V_2, h_2, s_2) en estas cinco ecuaciones. Sin embargo, tenemos la relación conocida entre h y T para un gas ideal, $dh = c_p dT$. Para un gas ideal con calores específicos constantes,

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p\Delta T = c_p(T_2 - T_1) \qquad (13.31f)$$

De ese modo tenemos la situación de seis ecuaciones y seis incógnitas.

Por tanto, si se conocen todas las condiciones en el estado ① (inmediatamente adelante de la onda de choque), ¿cuántos estados ② posibles (inmediatamente detrás de la onda de choque) hay? Las matemáticas de la situación (seis ecuaciones y seis incógnitas) muestran que hay un único estado ② para un estado ① dado.

Podemos obtener una imagen física del flujo por una onda de choque normal empleando un poco de las nociones desarrolladas al analizar los flujos de las líneas de Fanno y Rayleigh. Por conveniencia, reescribiremos primero las ecuaciones gobernantes para una onda de choque normal:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \frac{\dot{m}}{A} \tag{13.31a}$$

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13.31b}$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \tag{13.31c}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{13.31d}$$

$$p = \rho RT \tag{13.31e}$$

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) \tag{13.31f}$$

El flujo que pasa por una onda de choque normal debe satisfacer las ecuaciones de la 13.31a a la 13.31f. Puesto que se conocen todas las condiciones en el estado ①, podemos ubicar el estado ① en el diagrama *Ts*. Si fuéramos a dibujar una curva de la línea de Fanno a través del estado ①, tendríamos el lugar geométrico de estados matemáticos que satisfacen las ecuaciones 13.31a y de la 13.31c a la 13.31f. (La curva de la línea de Fanno no satisface la ecuación 13.31b.) Dibujar la curva de la línea de Rayleigh a través del estado ① produce un lugar geométrico de estados matemáticos que satisfacen las ecuaciones 13.31a, 13.31b y de la 13.31d a la 13.31f. (La curva de la línea de Rayleigh no cumple la ecuación 13.31c.) Estas curvas se muestran en la figura 13.18.

La onda de choque normal debe satisfacer las seis ecuaciones de la 13.31a a la 13.31f. En

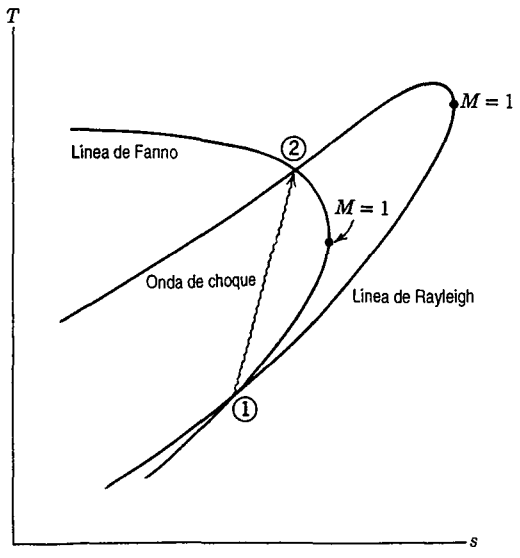


Fig. 13.18 Intersección de la línea de Fanno y la línea de Rayleigh como una solución de las ecuaciones de onda de choque normal.

mente adelante de la
nda de choque) hay?
ın que hay un único

ormal empleando un
nno y Rayleigh. Por
la de choque normal:

(13.31a)

(13.31b)

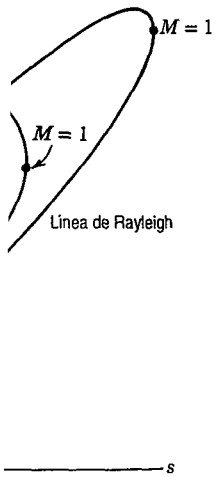
(13.31c)

(13.31d)

(13.31e)

(13.31f)

ones de la 13.31a a la
mos ubicar el estado
o a través del estado
as ecuaciones 13.31a
ción 13.31b.) Dibujar
eométrico de estados
13.31f. (La curva de
ın en la figura 13.18.
3.31a a la 13.31f. En



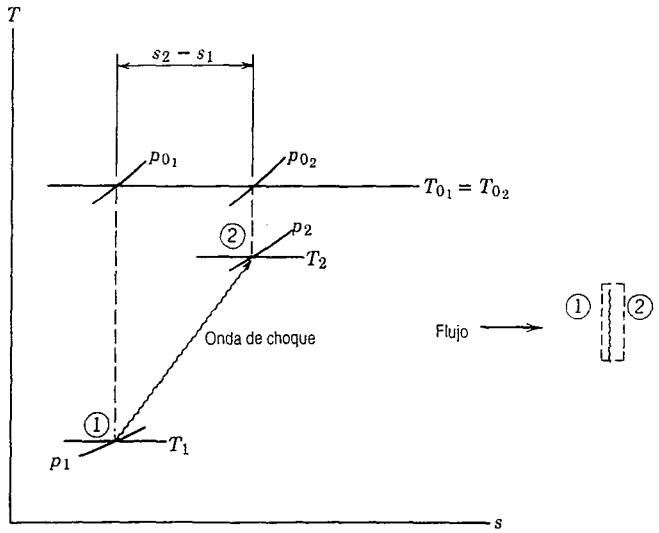


Fig. 13.19 Diagrama esquemático sobre el plano *Ts* del proceso de onda de choque normal.

consecuencia, para un estado ① dado, el estado final (estado ②) de la onda de choque normal debe yacer tanto en la línea de Fanno como en la de Rayleigh que pasan por el estado ①. Por tanto, la intersección de las dos líneas en el estado ② representa las condiciones aguas abajo de la onda de choque, correspondiendo a las condiciones aguas arriba en el estado ①. En la figura 13.18, el flujo que pasa por la onda de choque se ha indicado como si ocurriera del estado ① al estado ②. Ésta es la única dirección posible del proceso de la onda de choque según dicta la segunda ley ($s_2 > s_1$).

De la figura 13.18 notamos también que el flujo a través de una onda de choque normal implica un cambio de velocidad (de supersónica a subsónica). Las ondas de choque normales pueden ocurrir sólo en flujo que inicialmente es supersónico.

Como una ayuda para resumir los efectos de una onda de choque normal en las propiedades de flujo, un diagrama esquemático del proceso de la onda de choque normal se ilustra en el plano *Ts* de la figura 13.19. Esta figura, junto con las ecuaciones básicas gobernantes, es la base para la tabla 13.3. Usted debe seguir la lógica indicada en la tabla.

Es interesante observar el paralelismo entre las ondas de choque normales (tabla 13.3) y el

Tabla 13.3 Resumen de los cambios en las propiedades a través de una onda de choque normal

Propiedad	Efecto	Obtenida de:
Temperatura de estancamiento, T_0	Constante	Ecuación de energía
Entropía, s	Aumenta	Segunda ley
Presión de estancamiento, p_0	Disminuye	Diagrama *Ts*
Temperatura, T	Aumenta	Diagrama *Ts*
Velocidad, V	Disminuye	Ecuación de energía, y efecto sobre T
Densidad, ρ	Aumenta	Ecuación de continuidad, y efecto sobre V
Presión, p	Aumenta	Ecuación de momento, y efecto sobre V
Número de Mach, M	Disminuye	$M = V/c$ y efecto sobre V y T

flujo supersónico con fricción (tabla 13.1). Ambos representan procesos irreversibles en flujo supersónico, y todas las propiedades cambian en la misma dirección.

En teoría, la solución de seis ecuaciones y seis incógnitas no presenta dificultad, pero en la práctica el proceso algebraico está presente. Ello hace que tenga sentido refundir las ecuaciones para tabular las razones de propiedades a lo largo de la onda de choque; esto se realizará en la siguiente sección. Para ilustrar la aplicación directa de las ecuaciones del volumen de control a una onda de choque normal, considere el problema ejemplo 13.11, en el cual el problema se sobreespecifica (se brinda una propiedad aguas abajo de la onda de choque).

EJEMPLO 13.11 Onda de choque normal en un ducto

Una onda de choque normal permanece en un ducto. El fluido es aire, el cual puede considerarse un gas ideal. Las propiedades aguas arriba de la onda son $T_1 = 5$ C, $p_1 = 65.0$ kPa (abs) y $V_1 = 668$ m/s. La temperatura en la sección ②, aguas abajo de la onda de choque, es $T_2 = 469$ K. Determine las propiedades en la sección ② y comparelas con las propiedades aguas arriba. Dibuje el proceso sobre un diagrama *Ts*.

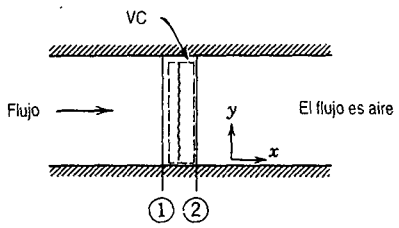
PROBLEMA EJEMPLO 13.11

DATOS: Una onda de choque normal en un ducto como se indica:

$T_1 = 5$ C $\quad T_2 = 469$ K

$p_1 = 65.0$ kPa (abs)

$V_1 = 668$ m/s



ENCUENTRE: *a*) Las propiedades en la sección ②.
b) El diagrama *Ts*.

SOLUCIÓN:
Calcule primero las propiedades restantes en la sección ①. Para un gas ideal,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{6.5\times 10^4 \ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287 \ \text{N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{278 \ \text{K}} = 0.815 \ \text{kg/m}^3$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1.4 \times 287 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 278 \ \text{K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2} = 334 \ \text{m/s}$$

Entonces $M_1 = \dfrac{V_1}{c_1} = \dfrac{668}{334} = 2.00$, y

$$T_{0_1} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right) = 278 \ \text{K}[1 + 0.2(2.0)^2] = 500 \ \text{K}$$

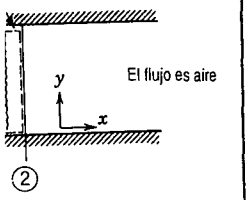
$$p_{0_1} = p_1\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)^{k/(k-1)} = 65.0 \ \text{kPa}[1 + 0.2(2.0)^2]^{3.5} = 509 \ \text{kPa (abs)}$$

V_2 puede evaluarse aplicando la ecuación de energía al volumen de control mostrado.

irreversibles en flujo

dificultad, pero en la
fundir las ecuaciones
esto se realizará en la
volumen de control a
l cual el problema se
).

ıal puede considerarse
65.0 kPa (abs) y V_1 =
oque, es T_2 = 469 K.
es aguas arriba. Dibuje



)9 kPa (abs)

ol mostrado.

Ecuación básica:

$$\overset{=0(1)}{\cancel{\dot{Q}}} - \overset{=0(2)}{\cancel{\dot{W}_s}} - \overset{=0(3)}{\cancel{\dot{W}_{\text{corte}}}} - \overset{=0(3)}{\cancel{\dot{W}_{\text{otro}}}} = \overset{=0(4)}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}} \int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC} (e + pv)\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.57)$$

donde

$$e = u + \frac{V^2}{2} + \overset{\simeq 0(6)}{\cancel{gz}}$$

Suposiciones:
1) $\dot{Q} = 0$
2) $\dot{W}_s = 0$
3) $\dot{W}_{\text{corte}} = \dot{W}_{\text{otro tipo}} = 0$
4) Flujo estable
5) Flujo uniforme en cada sección.
6) Se desprecia el término de la gravedad
7) $A_1 = A_2 = A$

Por tanto,

$$0 = \left(u_1 + p_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\{-|\rho_1 V_1 A|\} + \left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)\{|\rho_2 V_2 A|\}$$

$$0 = \dot{m}\left(u_2 + p_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2} - u_1 - p_1 v_1 - \frac{V_1^2}{2}\right)$$

o

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

La resolución respecto a V_2 produce

$$V_2 = [V_1^2 + 2(h_1 - h_2)]^{1/2} = [V_1^2 + 2c_p(T_1 - T_2)]^{1/2}$$

$$= \left[(668)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2 \times 1000 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times (278 - 469)\ \text{K} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$V_2 = 253$ m/s ← V_2

La continuidad reduce a $G = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, por lo que

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = 0.815 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(\frac{668}{253}\right) = 2.15\ \text{kg/m}^3 \leftarrow \rho_2$$

La presión puede obtenerse de dos maneras:

1) De la ecuación de estado de gas ideal

$$p_2 = \rho_2 R T_2 = 2.15 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 469\ \text{K} = 289\ \text{kPa (abs)} \leftarrow p_2$$

2) De la ecuación de momento

Ecuación básica:

$$F_{S_x} + \cancel{F_{B_x}}^{=0(8)=0(4)} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{VC} V_x \rho \, d\forall + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (4.19a)$$

Suposición: 8) $F_{B_x} = 0$

Por tanto,

$$p_1 A - p_2 A = V_1\{-|\rho_1 V_1 A|\} + V_2\{|\rho_2 V_2 A|\} = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

o

$$p_1 - p_2 = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

Resolviendo se obtiene

$$p_2 = p_1 - \rho_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

$$= 6.5 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - 0.815 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 668 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times (253 - 668) \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$p_2 = 291 \text{ kPa (abs)}$$

(Las dos presiones calculadas están en una cercana, pero no exacta, concordancia debido al redondeo.)
Para flujo adiabático, T_0 = constante. De tal modo,

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 500 \text{ K} \longleftarrow T_{0_2}$$

La presión local de estancamiento isentrópico en la sección ② es

$$p_{0_2} = p_2 \left(\frac{T_{0_2}}{T_2}\right)^{k/(k-1)} = 289 \text{ kPa} \left(\frac{500}{469}\right)^{3.5} = 362 \text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_2}$$

Al comparar las condiciones aguas abajo y aguas arriba de la onda de choque, vemos que $T_{0_2} = T_{0_1}$, $p_{0_2} < p_{0_1}$, $T_2 > T_1$, $p_2 > p_1$ y $V_2 < V_1$, de acuerdo con la tabla 13.3.

El cambio en la entropía puede calcularse de la ecuación $T\,ds$

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

Para un gas ideal

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

La integración, para calores específicos constantes, produce

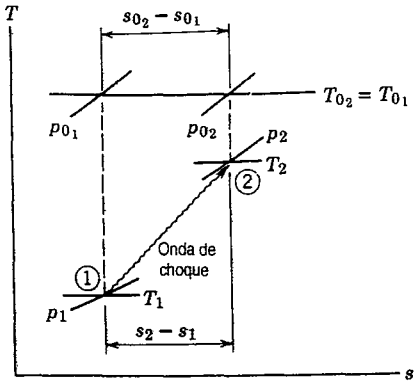
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Puesto que $s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1$, el cambio en la entropía es más fácil de evaluar en las condiciones de estancamiento porque $T_{0_2} = T_{0_1}$. En las condiciones de estancamiento tenemos

$$s_2 - s_1 = s_{0_2} - s_{0_1} = c_p \ln \frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} - R \ln \frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = -\frac{287 \text{ N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \ln\left(\frac{3.62 \times 10^5}{5.09 \times 10^5}\right)$$

$$s_2 - s_1 = 0.0978 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

Finalmente, el diagrama Ts puede bosquejarse:



{Observe otra vez que $s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1$, puesto que $s_{0_1} = s_1$ y $s_{0_2} = s_2$.}

**13-6.2 Tablas para el cálculo de ondas de choque normales en un gas ideal

Las ecuaciones básicas para el flujo a través de una onda de choque normal indican que para una condición dada adelante de una onda hay un estado aguas abajo único. Por tanto, es posible desarrollar expresiones para las razones de las propiedades a través de una onda de choque en términos de M_1 adelante de la misma; estos resultados pueden tabularse como funciones de M_1.

Para obtener los resultados, procedemos en tres pasos. Primero, obtenemos las razones de las propiedades (por ejemplo, T_2/T_1 y p_2/p_1) en términos de M_1 y M_2. Luego desarrollamos una relación entre M_1 y M_2. Por último, empleamos esta relación para obtener expresiones para las razones de las propiedades en términos del número de Mach aguas arriba, M_1.

La razón de temperaturas puede expresarse como

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_{0_2}} \frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} \frac{T_{0_1}}{T_1}$$

Puesto que la temperatura de estancamiento es constante a través de la onda de choque, tenemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \dfrac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2} M_2^2} \tag{13.32a}$$

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

Una razón de velocidades puede obtenerse utilizando

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2 c_2}{M_1 c_1} = \frac{M_2}{M_1}\frac{\sqrt{kRT_2}}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{M_2}{M_1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

o

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{1/2} \tag{13.32b}$$

Es posible lograr una razón de densidades partiendo de la ecuación de continuidad

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{13.31a}$$

La sustitución de la ecuación 13.32b produce

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2}\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{1/2} \tag{13.32c}$$

Finalmente, podemos obtener una razón de presiones a partir de la ecuación de momento

$$p_1 A - p_2 A = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \tag{13.31b}$$

o

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$$

Sustituyendo $\rho = p/RT$, y factorizando las presiones,

$$p_1\left[1+\frac{V_1^2}{RT_1}\right] = p_2\left[1+\frac{V_2^2}{RT_2}\right]$$

Como

$$\frac{V^2}{RT} = k\frac{V^2}{kRT} = kM^2$$

entonces

$$p_1[1+kM_1^2] = p_2[1+kM_2^2]$$

Por último,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} \tag{13.32d}$$

Para resolver respecto a M_2 en términos de M_1, debemos obtener otra expresión para una de las razones de proporciones dadas por las ecuaciones de la 13.32a a la 13.32d.

De acuerdo con la ecuación de estado de gas ideal, la razón de temperaturas puede escribirse

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2/\rho_2 R}{p_1/\rho_1 R} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

La sustitución de las ecuaciones 13.32c y 13.32d resulta en

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2}\right]\frac{M_2}{M_1}\left[\frac{1+\dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1+\dfrac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{1/2} \tag{13.33}$$

Las ecuaciones 13.32a y 13.33 son dos ecuaciones para T_2/T_1. Podemos combinarlas y resolver para M_2 en términos de M_1. Al combinar y cancelar obtenemos

$$\left[\frac{1+\dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1+\dfrac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{1/2} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2}\right]$$

Al elevar al cuadrado, el resultado es

$$\frac{1+\dfrac{k-1}{2}M_1^2}{1+\dfrac{k-1}{2}M_2^2} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\left[\frac{1+2kM_1^2+k^2M_1^4}{1+2kM_2^2+k^2M_2^4}\right]$$

la cual puede resolverse explícitamente para M_2^2. Se obtienen dos soluciones:

$$M_2^2 = M_1^2 \tag{13.34a}$$

y

$$M_2^2 = \frac{M_1^2+\dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1}M_1^2-1} \tag{13.34b}$$

Evidentemente, la primera de éstas es trivial. La segunda expresa la dependencia única de M_2 respecto a M_1. Esta relación se tabula para un gas ideal con $k = 1.4$ en el apéndice E, tabla E.4.

Ahora, teniendo una relación entre M_2 y M_1, podemos resolver respecto a las razones de propiedades a través de una onda de choque. Conociendo M_1, M_2 se obtiene de la ecuación 13.34b, las razones de propiedades se tabulan como funciones de M_1, para un gas ideal con $k = 1.4$, en la tabla E.4 del apéndice E.

Puesto que la temperatura de estancamiento permanece constante, la razón de temperaturas de estancamiento a través de la onda de choque es la unidad. La razón de las presiones de estancamiento se evalúa como

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{p_{0_2}}{p_2}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_{0_1}} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{1+\dfrac{k-1}{2}M_2^2}{1+\dfrac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{k/(k-1)} \tag{13.35}$$

Al combinar las ecuaciones 13.32d y 13.34b, obtenemos (luego de un considerable tratamiento algebraico)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \tag{13.36}$$

Empleando las ecuaciones 13.34b y 13.36, encontramos que la ecuación 13.35 se transforma en

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\left[\dfrac{\dfrac{k+1}{2}M_1^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}M_1^2}\right]^{k/(k-1)}}{\left[\dfrac{2k}{k+1}M_1^2 - \dfrac{k-1}{k+1}\right]^{1/(k-1)}} \tag{13.37}$$

La razón de presiones de estancamiento como una función del número de Mach aguas arriba se tabula en la tabla E.4 del apéndice E.

El uso de las tablas en la solución de un problema que implica ondas de choque normales se ilustra en el problema ejemplo 13.12.

EJEMPLO 13.12 Onda de choque normal en un ducto: solución con tablas

Una onda de choque normal permanece en un ducto. El fluido es aire, el cual puede considerarse como un gas ideal. Las propiedades aguas arriba de la onda son $T_1 = 5$ C, $p_1 = 65.0$ kPa (abs) y $V_1 = 668$ m/s. Determine las propiedades aguas abajo y $s_2 - s_1$. Incluya una gráfica Ts.

(Las condiciones aguas arriba son las mismas que en el problema ejemplo 13.11. Sin embargo, con las tablas disponibles, no necesitamos conocer ninguna propiedad aguas abajo para completar una solución.)

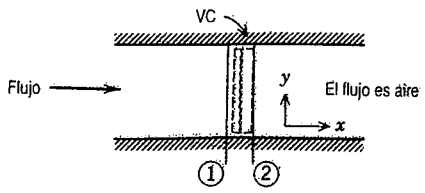
PROBLEMA EJEMPLO 13.12

DATOS: Una onda de choque normal en un ducto como se muestra:

$T_1 = 278$ K

$p_1 = 65.0$ kPa (abs)

$V_1 = 668$ m/s



ENCUENTRE: *a*) Las propiedades en la sección ②.
b) $s_2 - s_1$.
c) El diagrama Ts.

SOLUCIÓN:
Para usar la tablas de ondas de choque, necesitamos conocer M_1. Para un gas ideal,

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \left[1.4 \times 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times 278 \text{ K} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}\right]^{1/2} = 334 \text{ m/s}$$

Por tanto,

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{668}{334} = 2.0$$

Las razones de las propiedades de ondas de choque normales se brindan en la tabla E.4, apéndice E. A $M_1 = 2.0$,

M_1	M_2	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
2.00	0.5774	0.7209	1.688	4.500	2.667

De estos datos,

$$T_2 = 1.688T_1 = (1.688)278 \text{ K} = 469 \text{ K} \longleftarrow T_2$$

$$p_2 = 4.500\,p_1 = (4.500)65.0 \text{ kPa} = 293 \text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_2$$

Para un gas ideal,

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 2.93\times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{K}}{287 \text{ N}\cdot\text{m}} \times \frac{1}{469 \text{ K}} = 2.18 \text{ kg/m}^3 \longleftarrow \rho_2$$

y

$$V_2 = M_2 c_2 = M_2\sqrt{kRT_2} = (0.5774)\left[1.4 \times 287 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \times 469 \text{ K} \times \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{N}\cdot\text{s}^2}\right]^{1/2}$$

$$V_2 = 251 \text{ m/s} \longleftarrow V_2$$

Las propiedades locales de estancamiento isentrópico en la sección (1) pueden evaluarse empleando tablas para flujo isentrópico; de la tabla E.1, apéndice E, a $M = 2.0$,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_1}{T_{0_1}} = 0.5556; \qquad T_{0_1} = \frac{T_1}{0.5556} = \frac{278 \text{ K}}{0.5556} = 500 \text{ K}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_1}{p_{0_1}} = 0.1278; \qquad p_{0_1} = \frac{p_1}{0.1278} = \frac{65.0 \text{ kPa}}{0.1278} = 509 \text{ kPa (abs)}$$

La temperatura de estancamiento es constante en flujo adiabático. De tal modo,

$$T_{0_2} = T_{0_1} = 500 \text{ K} \longleftarrow T_{0_2}$$

Empleando las razones de las propiedades para una onda de choque normal, obtenemos

$$p_{0_2} = p_{0_1}\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = 509 \text{ kPa}\,(0.7209) = 367 \text{ kPa (abs)} \longleftarrow p_{0_2}$$

El cambio en la entropía a través de la onda de choque puede determinarse de la ecuación $T\,ds$

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

Para un gas ideal,

$$ds = c_p\frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

La integración, para calores específicos constantes, produce

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Pero, $s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1$, por lo que

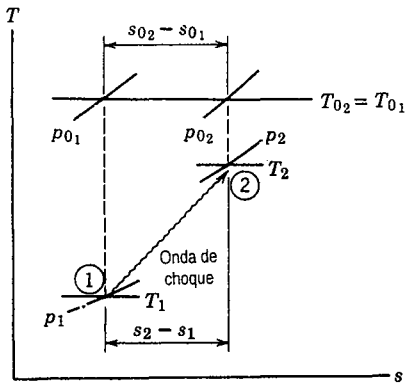
$$s_{0_2} - s_{0_1} = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_{0_2}}{T_{0_1}} - R \ln \frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = -0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \ln(0.7209)$$

($T_{0_2}/T_{0_1} = 0$)

$$s_2 - s_1 = 0.0939 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

$s_2 - s_1$

El diagrama Ts es



Al comparar las soluciones presentadas en los problemas ejemplo 13.11 y 13.12, vemos que el uso de las tablas simplifica de manera apreciable los cálculos. Además, se mejora la consistencia de los valores calculados como un resultado de emplear cuatro cifras significativas en todos los cálculos. Usted debe tener cuidado, al usar las tablas, de verificar su trabajo conforme avance. Examine cada resultado calculado para asegurar que tanto su tendencia como su magnitud sean razonables. Este proceso se simplifica y se hace casi automático cuando usted dibuja un diagrama Ts en cada problema.

13-7 FLUJO SUPERSÓNICO EN UN CANAL CON ONDAS DE CHOQUE

El flujo supersónico es una condición necesaria para que ocurra una onda de choque normal. La posibilidad de una onda de choque normal debe considerarse en cualquier flujo supersónico. Algunas veces una onda de choque *debe* ocurrir para igualar una condición de presión aguas abajo; es deseable determinar si la onda de choque ocurrirá y la posición de la misma cuando ocurre.

En la sección 13-6.1 demostramos que la presión de estancamiento disminuye considerablemente a través de una onda de choque: cuanto más grande es ésta, tanto mayor la disminución en la presión de estancamiento. Es necesario controlar la posición de la onda de choque para obtener un desempeño aceptable de un difusor supersónico o de un túnel de viento supersónico.

El propósito de esta sección es considerar los flujos en canal supersónico con ondas de choque. Se toman en cuenta los flujos con cambio de área, fricción y adición de calor. Se describe la operación de difusores y túneles de viento supersónicos.

13-7.1 Flujo en

13-7.1 Flujo en una tobera convergente-divergente

Puesto que hemos considerado ondas de choque normales, ahora podemos terminar nuestro análisis de flujo en una tobera convergente-divergente que opera bajo contrapresiones variables, iniciado en la sección 13-3.5. La distribución de presión a través de la tobera para diferentes contrapresiones se muestra en la figura 13.20.

Son posibles cuatro regímenes de flujo. En el régimen I el flujo es subsónico en todos lados. La relación de flujo aumenta con la disminución de la contrapresión. En la condición *iii*), la cual forma la línea divisoria entre los regímenes I y II, el flujo en la garganta es sónico, $M_t = 1$.

Cuando la contrapresión disminuye por debajo de la condición *iii*), una onda de choque normal aparece aguas abajo de la garganta. Hay un aumento de presión a través de la onda de choque. Como el flujo es subsónico ($M < 1$) detrás de la onda, el flujo se desacelera, con un aumento acompañante en la presión, por el canal divergente. Cuando la contrapresión se reduce aún más, la onda de choque se mueve aguas abajo hasta que aparece en el plano de salida (condición *vii*). En el régimen II, como en el régimen I, el flujo de salida es subsónico, y, en consecuencia, $p_e = p_b$. Puesto que las propiedades de flujo en la garganta son constantes para todas las condiciones en el régimen II, la relación de flujo en dicho régimen no varía con la contrapresión.

En el régimen III, como ejemplifica la condición *viii*), la contrapresión es mayor que la presión de salida, pero no lo suficientemente alta para sostener una onda de choque normal en el plano de salida. El flujo se ajusta a la contrapresión mediante una serie de ondas de choque de compresión oblicuas fuera de la tobera; estas ondas de choque oblicuas no pueden tratarse mediante una teoría unidimensional.

Como se señaló anteriormente en la sección 13-3.5, la condición *iv*) representa la condición de diseño. En el régimen IV el flujo se ajusta a la contrapresión más baja mediante una serie de ondas de expansión oblicuas fuera de la tobera; estas ondas de expansión oblicuas no pueden tratarse por medio de una teoría unidimensional.

El diagrama *Ts* para un flujo en una tobera convergente-divergente con una onda de choque

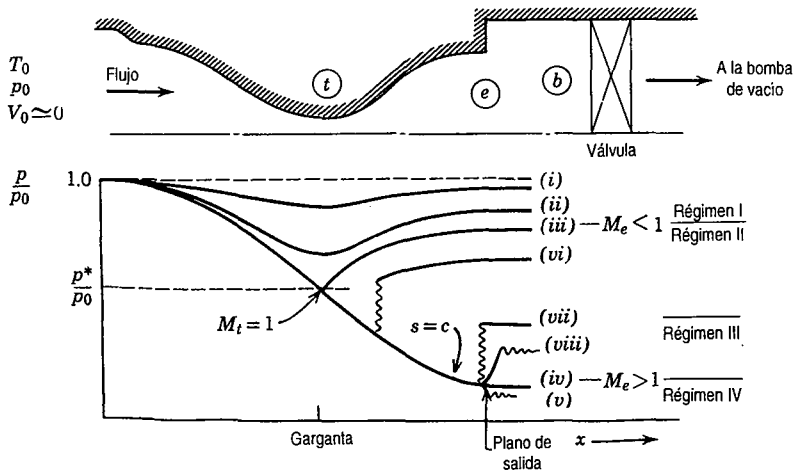


Fig. 13.20 Distribuciones de presión para el flujo en una tobera convergente-divergente como una función de la contrapresión.

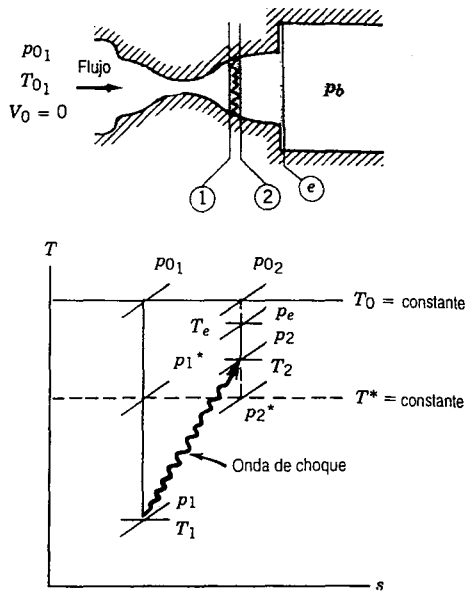


Fig. 13.21 Diagrama esquemático *Ts* para el flujo en una tobera convergente-divergente con una onda de choque normal.

normal se muestra en la figura 13.21; el estado ① se localiza inmediatamente aguas arriba de la onda de choque y el estado ② está inmediatamente aguas abajo. El aumento en la entropía a través de la onda de choque mueve al flujo subsónico aguas abajo a una nueva línea isentrópica. La temperatura crítica es constante, así que p_2^* es menor que p_1^*. Puesto que $\rho^* = p^*/RT^*$, la densidad crítica aguas abajo también se reduce. Para transportar la misma relación de flujo másico, el flujo aguas abajo debe tener un área crítica más grande. De la continuidad (y la ecuación de estado), la razón de áreas críticas es el inverso de la razón de presiones críticas, esto es, a través de la onda de choque, $p^*A^* = \text{constante}$.

Si el número de Mach (o posición) de la onda de choque normal en la tobera se conoce, la presión del plano de salida puede calcularse directamente. En una situación más realista, se especifica la presión del plano de salida, y la posición e intensidad de la onda de choque se desconocen. Este problema puede resolverse por iteración [1]. El flujo subsónico aguas abajo debe abandonar la tobera a contrapresión, de manera que $p_b = p_e$. Por tanto,

$$\frac{p_b}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{p_e}{p_{0_2}}\frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A_2^*} \tag{13.38}$$

El lado izquierdo de la ecuación 13.38 está dado. El lado derecho es una función sólo del número de Mach de salida: p_e/p_{0_2} se obtiene de la relación local de estancamiento isentrópico, ecuación 12.17a, A_t/A_e se conoce de la geometría de la tobera y A_e/A_2^* se obtiene de la ecuación 13.6. Tal vez sea necesaria la iteración para resolver respecto a M_e. Un programa de computadora personal para calcular y graficar las distribuciones de presión y el número de Mach en una tobera C-D con onda de choque se brinda en [2].

**13-7.2 Difusor

El an
canal
difus
direc
comp
isentr
básic

pasaj
El flu
super
es de

conv
acele
pérdi
apénc
estab

isentr
estan

Fig. 1

** Est
[4] Las c
import
difuso

**13-7.2 Difusor supersónico

El análisis de los efectos del cambio de área en flujo isentrópico (sección 13-2) mostró que un canal convergente reduce la velocidad de una corriente supersónica; un canal convergente es un *difusor supersónico.* Debido a que la velocidad de flujo disminuye, la presión aumenta en la dirección del flujo, creando un gradiente de presión adverso. El flujo isentrópico no es un modelo completamente exacto para flujo con un gradiente de presión adverso,[4] pero el modelo de flujo isentrópico con una onda de choque normal puede utilizarse para demostrar las características básicas de la difusión supersónica.

En flujo isentrópico, una onda de choque no puede permanecer en una posición estable en un pasaje convergente, una onda de choque puede permanecer estable sólo en un pasaje divergente. El flujo real cerca de $M = 1$ es inestable, por lo que no es posible reducir exactamente un flujo supersónico a velocidad sónica. El número de Mach mínimo que puede alcanzarse en una garganta es de 1.2 a 1.3.

De manera que en difusores supersónicos reales, el flujo se desacelera a $M \approx 1.3$ en un pasaje convergente. Aguas abajo de la sección de la garganta de área mínima, se permite que el flujo se acelere a $M \approx 1.4$, donde una onda de choque normal toma lugar. A este número de Mach, la pérdida de presión de estancamiento es sólo de aproximadamente 4.2 por ciento (tabla E.4, apéndice E). Esta pequeña pérdida es un compromiso aceptable en el intercambio para la estabilidad del flujo.

La figura 13.22 muestra el proceso idealizado de difusión supersónica, en el cual el flujo es isentrópico excepto a través de una onda de choque normal. La ligera reducción en la presión de estancamiento siempre ocurre a través de la onda de choque.

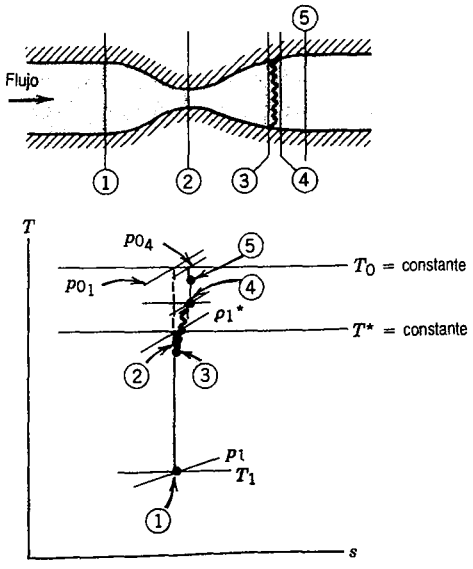


Fig. 13.22 Diagrama esquemático *Ts* para el flujo en un difusor supersónico con onda de choque normal.

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

[4] Las capas límite se desarrollan rápidamente en gradientes de presión adversos, por lo que los efectos viscosos pueden ser importantes o incluso dominantes. En la presencia de capas límite gruesas, es posible que los flujos supersónicos en difusores formen sistemas complicados de ondas de choque oblicuas y normales.

En el flujo real, las pérdidas adicionales en la presión de estancamiento ocurren durante los procesos de difusión supersónica y subsónica antes y después de la onda de choque. Es necesario emplear datos experimentales para predecir las pérdidas reales en difusores supersónicos y subsónicos [3, 4].

La difusión supersónica también es importante en aviones de alta velocidad, donde un flujo de corriente libre externo supersónico debe desacelerarse eficientemente a velocidad subsónica. Cierta difusión puede ocurrir fuera de la entrada por medio de un débil sistema de onda de choque oblicua [5]. Es posible que sea necesaria una geometría variable para lograr una eficiente difusión supersónica dentro de la entrada cuando varíe el número de Mach de vuelo. Los flujos compresibles multidimensionales, aunque se encuentran más allá del alcance de este texto, se tratan en detalle en otros lados [6, 7].

**13-7.3 Operación de túnel de viento supersónico

Para construir un túnel de viento supersónico eficiente, es necesario entender el comportamiento de las ondas de choque y controlar la posición de las mismas. Los fenómenos físicos básicos son descritos por Coles en la película de la NCFMF, *Channel Flow of a Compressible Fluid* [8]. Además del *estrangulamiento* —flujo sónico en una garganta, con flujo aguas arriba independiente de las condiciones aguas abajo— Coles analiza las condiciones de bloqueo y arranque en túneles de viento supersónicos.

Un túnel de viento supersónico de circuito cerrado debe tener una tobera convergente-divergente para acelerar el flujo a velocidad supersónica, seguida por una sección de prueba de área casi constante, y después de esto un difusor supersónico con una segunda garganta. Deben completar el circuito máquinas de compresión, enfriadores y dispositivos de control de flujo, como se muestra en la figura 13.23 [9].

Considere el proceso de acelerar flujo desde el reposo hasta velocidad supersónica en la sección de prueba. Rápidamente después de que el flujo en la garganta de la tobera se vuelve sónico, una onda de choque se forma en la divergencia. La onda de choque alcanza su intensidad máxima cuando alcanza el plano de salida de la tobera. En consecuencia, para *arrancar* el túnel y alcanzar flujo supersónico estable en la sección de prueba, la onda de choque se debe mover a través de la segunda garganta y hacia el difusor subsónico. Cuando esto ocurre, decimos que la onda de choque ha sido *devorada* por la segunda garganta. Por consiguiente, para arrancar el túnel, la garganta del difusor supersónico debe ser más grande que la garganta de la tobera. La segunda garganta debe ser lo suficientemente grande para superar el área crítica para el flujo aguas abajo de la onda de choque más intensa posible.

El *bloqueo* ocurre cuando la segunda garganta no es lo suficientemente grande para devorar la onda de choque. Cuando el canal está bloqueado, el flujo es sónico en ambas gargantas y el flujo en la sección de pruebas es subsónico; el flujo en esta última sección no puede controlarse variando las condiciones aguas abajo del difusor supersónico.

Cuando el túnel está *operando* no hay onda de choque en la tobera o en la sección de prueba, por lo que la disipación de energía se reduce de manera considerable. El área de la segunda garganta puede reducirse un poco durante la operación para mejorar la eficiencia del difusor. La razón de presiones del compresor puede ajustarse para mover la onda de choque en el difusor subsónico a un número de Mach menor. Es posible recurrir a una combinación de la segunda garganta ajustable

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

Fig. 13.2
instalacic

y del co
túnel. ¡F
puede c

**13-7.4 Canal de á

El flujo
cuando
garantiz
de área
Sin emb
de área c
normal
El f
corta lor
La tabla
subsónic
estrangu
supersór

curren durante los
oque. Es necesario
es supersónicos y

lad, donde un flujo
locidad subsónica.
de onda de choque
a eficiente difusión
flujos compresibles
se tratan en detalle

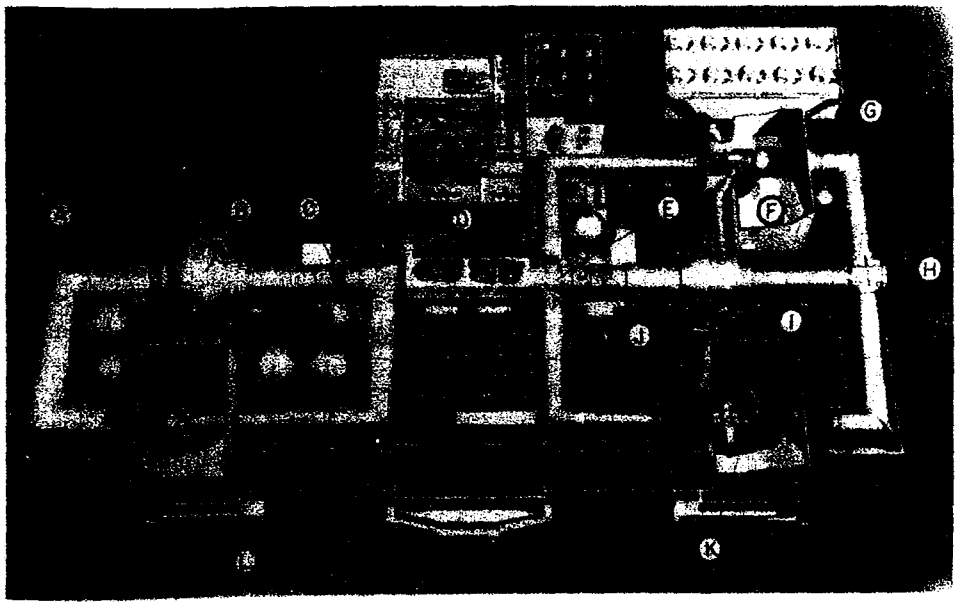
r el comportamiento
s físicos básicos son
ipressible Fluid [8].
arriba independiente
arranque en túneles

a convergente-diver-
le prueba de área casi
ita. Deben completar
lujo, como se muestra

ad supersónica en la
bera se vuelve sónico,
su intensidad máxima
car el túnel y alcanzar
e mover a través de la
que la onda de choque
l túnel, la garganta del
egunda garganta debe
as abajo de la onda de

te grande para devorar
bas gargantas y el flujo
le controlarse variando

n la sección de prueba,
de la segunda garganta
lel difusor. La razón de
el difusor subsónico a
unda garganta ajustable



A. Esferas de almacenamiento de aire seco
B. Radiador de salida
C. Ventilador de flujo axial de tres pasos
D. Motores impulsores
E. Válvula de desviación de flujo
F. Sección de prueba supersónica de 8 por 7 pies
G. Torre de enfriamiento
H. Válvula de desviación de flujo
I. Radiador de salida
J. Compresor de flujo axial de 11 pasos
K. Sección de prueba supersónica de 9 por 7 pies
L. Sección de prueba transónica de 11 por 11 pies

Fig. 13.23 Vista esquemática del túnel de viento de alta velocidad y circuito cerrado de NASA-Ames con instalaciones de soporte [9]. (Foto cortesía de la NASA.)

y del control de las razones de presión para alcanzar las condiciones de operación óptimas del túnel. ¡Pequeñas diferencias en la eficiencia son importantes cuando el sistema motriz del túnel puede consumir más de medio millón de kilowatts [10]!

**13-7.4 Canal de área constante con fricción

El flujo en un canal de área constante con fricción está dominado por los efectos viscosos. Incluso cuando el flujo principal es supersónico, la condición de no deslizamiento en la pared del canal garantiza el flujo subsónico cerca de la misma. En consecuencia, el flujo supersónico en canales de área constante puede formar complicados sistemas de ondas de choque normales y oblicuas. Sin embargo, el comportamiento básico de un flujo supersónico adiabático con fricción en un canal de área constante se revela considerando el caso más simple de la formación de una onda de choque normal en flujo de la línea de Fanno.

El flujo supersónico a lo largo de la línea de Fanno se vuelve estrangulado después de una corta longitud del ducto, debido a que a alta velocidad los efectos de la fricción son considerables. La tabla E.2 (apéndice E) muestra que el valor límite de $\bar{f}L_{\text{máx}}/D_h$ es menor que uno; los flujos subsónicos pueden tener recorridos mucho más grandes. De modo que cuando se produce el estrangulamiento a partir de la fricción, y la longitud del ducto se incrementa aún más, el flujo supersónico se vuelve subsónico para igualar las condiciones aguas abajo.

Los diagramas *Ts* en las figuras de la 13.24*a* a la 13.24*d* ilustran lo que sucede cuando se incrementa la longitud de un ducto de área constante, alimentado por una tobera convergente-divergente y que se suple desde un depósito con condiciones de estancamiento constantes. El flujo supersónico sobre la línea de Fanno de la figura 13.24*a* se estrangula por fricción cuando la longitud del ducto es L_a. Cuando se añade ducto adicional para producir $L_b > L_a$, figura 13.24*b*, aparece una onda de choque normal. El flujo aguas arriba de la onda de choque no cambia, debido a que es supersónico (ningún cambio en la condición aguas abajo puede afectar el flujo supersónico antes de la onda de choque).

En la figura 13.24*b* la onda de choque se muestra en una posición arbitraria. La onda se mueve hacia la entrada del canal de área constante (hacia el número de Mach inicial más alto) cuando se añade más ducto.

El flujo permanece en la misma línea de Fanno cuando la onda de choque es impulsada aguas arriba hacia el estado ① añadiendo longitud de ducto; de ese modo, la relación de flujo másico permanece invariable. La longitud del ducto, L_c, que mueve la onda de choque hacia el plano de entrada del canal, figura 13.24*c*, puede calcularse directamente utilizando los métodos de la sección 13-4.3.

Cuando se excede la longitud del ducto L_c, la onda de choque se impulsa de regreso a la tobera C-D, figura 13-24*d*. La relación de flujo másico permanece constante hasta que la onda alcanza la garganta de la tobera. Sólo cuando se agrega más ducto después de que la onda de choque alcanza la garganta, se reduce la relación de flujo másico.

Si se conoce la posición de la onda de choque, las propiedades de flujo en cada sección y la longitud del ducto pueden calcularse directamente. Cuando está especificada la longitud y la ubicación de la onda de choque se va a determinar, es necesaria la iteración.

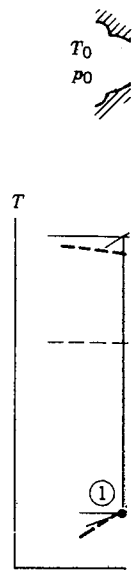
**13-7.5 Canal de área constante con adición de calor

En la figura 13.25*a* se muestra un flujo supersónico con adición de calor en un canal sin fricción de área constante. Suponga que el canal se alimenta por medio de una tobera convergente-divergente, a la que suministra un depósito con condiciones de estancamiento constante, y el flujo es supersónico en el estado ①. La adición de calor provoca que los puntos de estado se muevan hacia arriba y a la derecha a lo largo de la línea de Rayleigh. La figura 13.25*a* ilustra la condición en la cual la adición de calor es exactamente la suficiente para estrangular el flujo. El flujo es sónico en la salida, por lo que $p_e = p^*$ y $T_e = T = T^*$; la adición de calor por unidad de masa, $\int_{s_1}^{s^*} T\,ds$, se representa por medio del área sombreada debajo de la línea de Rayleigh.

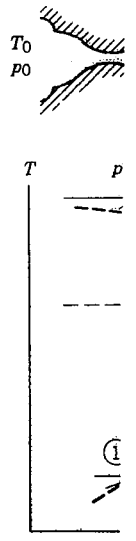
Una onda de choque normal implica que no hubo adición de calor, por lo que T_0 es constante a través de la onda. En consecuencia, una onda de choque en el canal de área constante no cambiaría la adición de calor requerida para cambiar el estado del flujo de la condición de entrada al estrangulamiento. Cuando la onda de choque permanece en la entrada del canal, figura 13.25*b*, la adición de calor necesaria para alcanzar el número de Mach de uno a la salida, es la misma que en la figura 13-25*a*; las áreas sombreadas también deben ser idénticas.

Si se agrega más energía térmica al flujo en las condiciones mostradas en la figura 13.25*b*, la onda de choque será empujada desde la entrada del ducto de área constante de regreso hacia la parte divergente de la tobera, donde el número de Mach es menor.

** Esta sección puede omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

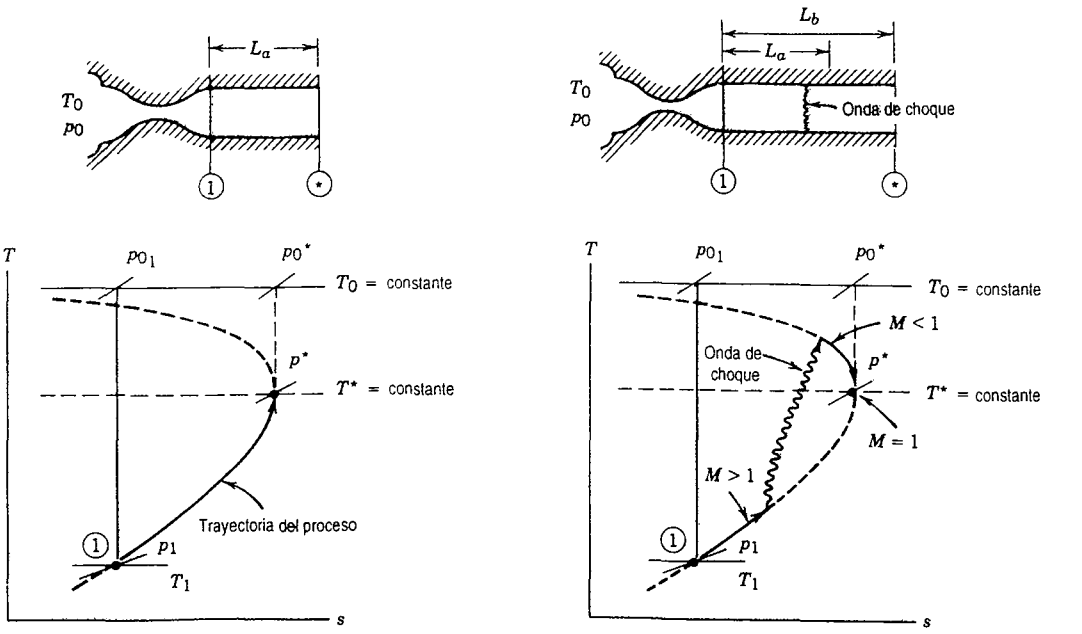


a) Flujo supersó



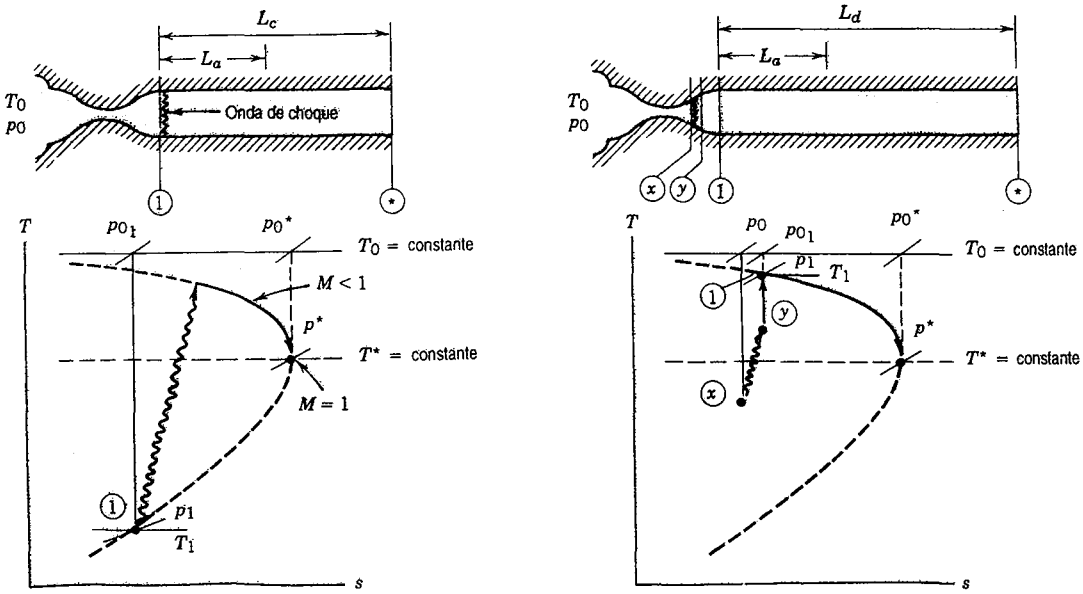
c) Flujo estrangu
de la tobera.

Fig. 1



a) Flujo supersónico estrangulado en el canal.

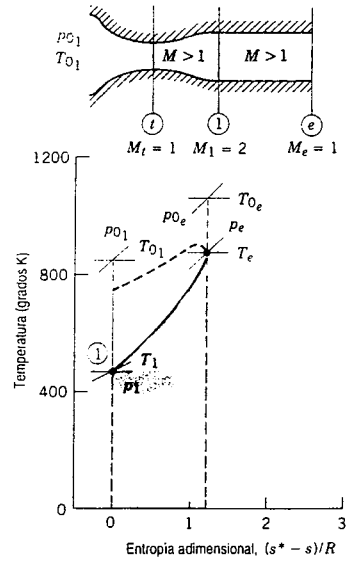
b) Flujo estrangulado en un canal con onda de choque.



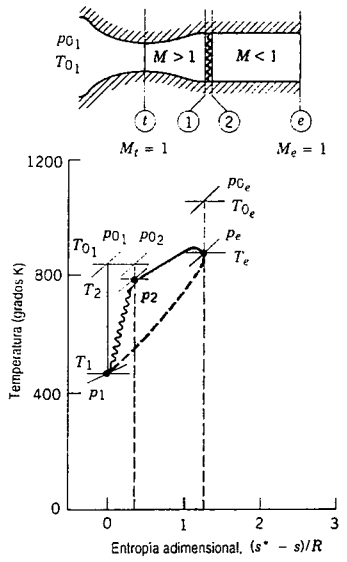
c) Flujo estrangulado con onda de choque en el plano de salida de la tobera.

d) Flujo estrangulado con onda de choque en la tobera; flujo subsónico en el canal.

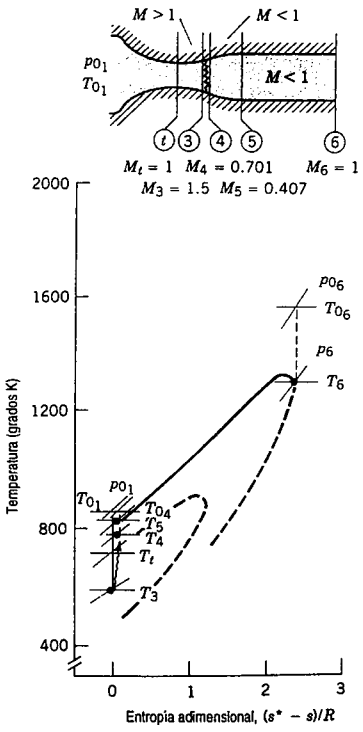
Fig. 13.24 Diagramas esquemáticos *Ts* para flujos supersónicos de la línea de Fanno con ondas de choque normales.



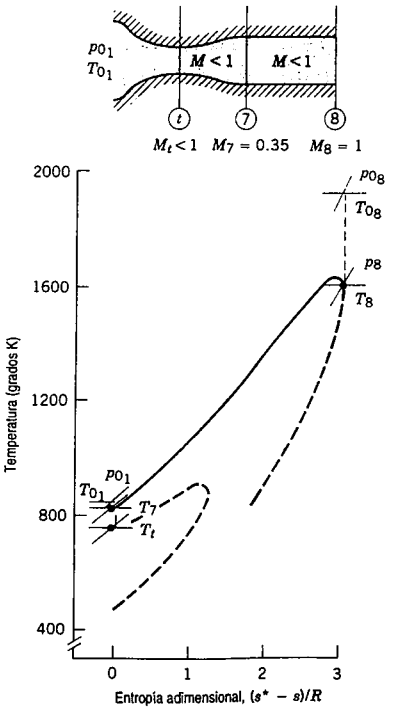
a) Flujo supersónico estrangulado.



b) Flujo estrangulado con onda de choque en el plano de salida de la tobera.



c) Flujo estrangulado con onda de choque en la tobera; misma relación de flujo másico, pero el flujo se corre a una nueva línea de Rayleigh.



d) Flujo subsónico en todas partes; disminuye la relación de flujo másico y el flujo se corre a otra nueva línea de Rayleigh.

Fig. 13.25 Diagramas esquemáticos *Ts* para flujos supersónicos de la línea de Rayleigh con ondas de choque normales.

Co
la adici
figura 1
y T_3 =
del esta
estrangu
la nuev
debido
El
que M_1
intensid
$(s_4 - s_3$
de Mac
$T_5 > T_2$
Cu
choque
disminu
$M_7 < M$
13.25*d*.
De
adición
una ond
el flujo
de calor
especifi
requiere
Una

13-8 RESUMEN DE

Después

1. Esc
com
ecua
2. Det
pasa
supe
3. Para
cion
bajo
4. Escr
calo
diag
5. Escr
inter
Ts a

Con una onda de choque en la tobera, se cambian las condiciones en la entrada del ducto, y la adición de calor ocurre a lo largo de una línea de Rayleigh diferente, como se muestra en la figura 13.25*c*. No hay cambio en T_0 o en T^* a través de la onda de choque (de tal modo $T_{0_3} = T_{0_4}$ y $T_3^* = T_4^*$), pero el número de Mach aguas abajo cambia. Una difusión subsónica adicional ocurre del estado ④ a la salida de la tobera, estado ⑤, moviendo de ese modo la condición de estrangulamiento hacia arriba en el plano *Ts*, y permitiendo el aumento de la adición de calor sobre la nueva línea de Rayleigh. Todos estos cambios ocurren a la misma relación de flujo másico, debido a que las condiciones de la garganta de la tobera permanecen invariables.

El número de Mach inmediatamente aguas arriba de la onda de choque, estado ③, es menor que M_1 de la figura 13.25*b*; la temperatura correspondiente, T_3, es más alta que T_1. Puesto que la intensidad de la onda de choque se reduce, el aumento de la entropía a través de la onda es menor, $(s_4 - s_3) < (s_2 - s_1)$. La difusión subsónica que sigue a la onda de choque resulta en un número de Mach más bajo y en una mayor temperatura en la entrada del ducto. De tal modo, $M_5 < M_2$ y $T_5 > T_2$.

Cuando la relación de adición de calor se incrementa lo suficiente para impulsar la onda de choque hacia la garganta de la tobera, un aumento adicional en la adición de calor resultará en una disminución de la relación de flujo másico. El número de Mach en la entrada del canal se reduce, $M_7 < M_5$, y el flujo del canal se corre a otra nueva línea de Rayleigh, como se muestra en la figura 13.25*d*.

De ese modo, para una relación de flujo másico especificada, hay una relación máxima de adición de calor en todas partes del flujo supersónico. Para relaciones de adición de calor mayores, una onda de choque ocurre en la tobera y el flujo es subsónico en el canal de área constante, pero el flujo de salida sigue siendo sónico. Si se especifica la posición de la onda de choque, la adición de calor a lo largo de la línea de Rayleigh puede calcularse directamente. Si la adición de calor se especifica pero la posición de la onda de choque o la relación de flujo másico se desconocen, se requiere la iteración para obtener una solución.

Una consideración adicional de flujo con ondas de choque se brinda en [11].

13-8 RESUMEN DE OBJETIVOS

Después de terminar el estudio del capítulo 13 usted será capaz de realizar lo siguiente:

1. Escribir las ecuaciones básicas para el flujo isentrópico, unidimensional y estable de *a*) cualquier fluido compresible y *b*) un gas ideal, a través de un canal de sección transversal arbitraria. Emplear estas ecuaciones, junto con el diagrama *Ts* apropiado, para resolver problemas de flujo isentrópico.
2. Determinar el efecto del cambio de área sobre las propiedades de fluido para flujo isentrópico. Dibujar pasajes de flujo en los casos siguientes: tobera subsónica, difusor subsónico, tobera supersónica y difusor supersónico.
3. Para flujo en *a*) una tobera convergente y *b*) una tobera convergente-divergente, graficar las distribuciones de presión a través de la tobera como una función de la contrapresión. Establecer las condiciones bajo las cuales la tobera está estrangulada.
4. Escribir las ecuaciones básicas para el flujo adiabático, unidimensional y estable de un gas ideal con calores específicos constantes por un ducto de área constante. Emplear estas ecuaciones, junto con el diagrama *Ts* apropiado, para resolver problemas de flujo de la línea de Fanno.
5. Escribir las ecuaciones básicas para el flujo sin fricción, unidimensional y estable de un gas ideal con intercambio de calor por un ducto de área constante. Emplear estas ecuaciones, junto con el diagrama *Ts* apropiado, para resolver problemas de flujo de la línea de Rayleigh.

6. Escribir las ecuaciones básicas para el flujo unidimensional y estable de un gas ideal a través de una onda de choque normal. Emplear estas ecuaciones, junto con el diagrama *Ts* apropiado, para resolver problemas de onda de choque normal.
**7. Emplear tablas para el cálculo del flujo de gas ideal *a*) isentrópico, *b*) de la línea de Fanno, *c*) de la línea de Rayleigh y *d*) a través de una onda de choque normal.
8. Describir las características principales de flujos supersónicos en un canal y con ondas de choque normales.
9. Resolver los problemas al final del capítulo que se relacionen con el material que usted ha estudiado.

REFERENCIAS

1. Chapman, A. J., y W. F. Walker, *Introductory Gas Dynamics*. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston, 1971.
2. Olfe, D. B., *Fluid Mechanics Programs for the IBM PC*. Nueva York: McGraw-Hill, 1987.
3. Hermann, R., *Supersonic Inlet Diffusers*. Minneapolis, MN: Minneapolis-Honeywell Regulator Co., Aeronautical Division, 1956.
4. Runstadler, P. W., Jr., "Diffuser Data Book," Creare, Inc., Hanover, NH, Nota técnica 186, 1975.
5. Seddon, J., y E. L. Goldsmith, *Intake Aerodynamics*. Nueva York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1985.
6. Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Vol. 1. Nueva York: Ronald Press, 1953.
7. Zucrow, M. J., y J. D. Hoffman, *Compressible Flow*, Vol. 1. Nueva York: Wiley, 1976.
8. Coles, D., *Channel Flow of a Compressible Fluid*, Película de la NCFMF.
9. Baals, D. W., y W. R. Corliss, *Wind Tunnels of NASA*. Washington, D. C.; National Aeronautics and Space Administration, SP-440, 1981.
10. Pope, A., y K. L. Goin, *High-Speed Wind Tunnel Testing*. Nueva York: Krieger, 1978.
11. Glass, I.I., "Some Aspects of Shock-Wave Research," *AIAA J., 25*, 2, febrero 1987, pp. 214-229.

PROBLEMAS

13.1 Fluye vapor estable e isentrópicamente a través de una tobera. En una sección el vapor se encuentra a 700 F y 240 psia, y la velocidad es de 600 pies/s. El vapor se va a acelerar a la máxima velocidad posible de manera tal que la calidad de salida sea 1.0. Determine la correspondiente velocidad de salida.

13.2 Fluye vapor estable e isentrópicamente a través de una tobera. En una sección el vapor se encuentra a 700 F y 240 psia, y la velocidad es de 600 pies/s. El vapor se va a acelerar a la máxima velocidad posible de manera tal que la calidad de salida sea 0.9. Determine la correspondiente velocidad de salida.

13.3 Fluye vapor estable e isentrópicamente a través de una tobera. En una sección el vapor se encuentra a 350 C y a una presión absoluta de 1.0 MPa, y la velocidad es de 200 m/s. El vapor se va a acelerar a la máxima velocidad posible de manera tal que la calidad de salida sea 1.0. Determine la correspondiente velocidad de salida.

** Este objetivo se aplica a secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

13.4 Fluye vapor estable e isentrópicamente a través de una tobera. En una sección el vapor se encuentra a 350 C y a una presión absoluta de 1.0 MPa, y la velocidad es de 200 m/s. El vapor se va a acelerar a la máxima velocidad posible de manera tal que la calidad de salida sea 0.9. Determine la correspondiente velocidad de salida.

13.5 Fluye vapor estable e isentrópicamente a través de una tobera. En una sección aguas arriba donde la velocidad es despreciable, la temperatura y la presión son 900 F y 900 psia. En una sección en donde el diámetro de la tobera es de 0.188 pulg, la presión del vapor es de 600 psia. Determine la velocidad y el número de Mach en esta sección y la relación de flujo másico del vapor. Bosqueje la forma del conducto.

13.6 Fluye vapor estable e isentrópicamente a través de una tobera. En una sección aguas arriba donde la velocidad es despreciable, la temperatura y la presión son 880 F y 875 psia. En una sección en donde el diámetro de la tobera es de 0.50 pulg, la presión del vapor es de 290 psia. Determine la velocidad y el número de Mach en esta sección, así como la relación de flujo másico del vapor. Bosqueje la forma del conducto.

13.7 Fluye vapor estable e isentrópicamente a través de una tobera. En una sección aguas arriba donde la velocidad es despreciable, la temperatura y la presión absoluta son 475 C y 6.0 MPa. En una sección en donde el diámetro de la tobera es de 6 mm, la presión absoluta del vapor es 4.0 MPa. Determine la velocidad y el número de Mach en esta sección y la relación de flujo másico del vapor. Bosqueje la forma del conducto.

13.8 Fluye vapor estable e isentrópicamente a través de una tobera. En una sección aguas arriba donde la velocidad es despreciable, la temperatura y la presión absoluta son 475 C y 6.0 MPa. En una sección en donde el diámetro de la tobera es de 12 mm, la presión absoluta es 2.0 MPa. Determine la velocidad y el número de Mach en esta sección y la relación de flujo de masa del vapor. Bosqueje la forma del conducto.

13.9 Un avión F-4 pasa a muy poca altura sobre un campo de aterrizaje que se encuentra al nivel del mar en un día en condiciones estándares. Un tubo de pitot sobre el avión registra una presión de estancamiento de 23.6 psia. Determine el número de Mach al cual vuela el avión. Evalúe la velocidad del mismo.

13.10 En una sección en un conducto, la presión es 30 psia, la temperatura, 90 F, y la velocidad, 575 pies/s. Para flujo de aire isentrópico, determine el número de Mach en el punto donde la presión es 12 psia. Bosqueje la forma del conducto.

13.11 Fluye aire estable e isentrópicamente por un conducto. En la sección ①, donde el área de sección transversal 0.02 m^2, el aire está a 40.0 kPa (abs), 60 C y $M = 2.0$. En la sección ② aguas abajo, la velocidad es 519 m/s. Calcule el número de Mach en la sección ②. Bosqueje la forma del conducto entre las secciones ① y ②.

13.12 Aire, a una presión absoluta de 60.0 kPa y 27 C, entra a un conducto a 486 m/s, donde $A = 0.02$ m^2. En la sección ② aguas abajo, $p = 78.8$ kPa (abs). Suponiendo flujo isentrópico, calcule el número de Mach en la sección ②. Bosqueje el conducto del flujo.

13.13 Fluye aire estable e isentrópicamente a través de un conducto a 100 kg/s. En la sección donde $A = 0.464$ m^2, $M = 3$, $T = -60$ C y $p = 15.0$ kPa (abs). Determine la velocidad y el área de la sección transversal aguas abajo donde $T = 138$ C. Bosqueje el conducto del flujo.

13.14 Se diseña un conducto para expandir aire isentrópicamente a presión atmosférica a partir de un gran tanque en el cual las propiedades se mantienen constantes en 5 C y 304 kPa (abs). La relación de flujo deseada es de 1 kg/s. Determine el área de salida del conducto. Dibuje el número de Mach y la presión como funciones de la distancia a lo largo del conducto.

13.15 El avión del problema 13.9 vuela a $M = 0.851$. El aire se frena en el sistema de entrada del motor a 475 pies/s respecto al avión. Determine la temperatura del aire en esta ubicación. Si el proceso de desaceleración se modelara como isentrópico, ¿cuál sería la presión estática en esta sección?

13.16 Un difusor supersónico desacelera aire isentrópicamente de $M_1 = 3.0$ a $M_2 = 1.4$. Si la presión

estática en la entrada del difusor es 30.0 kPa (abs), calcule el aumento en la presión estática en el difusor y la razón entre el área de entrada y de salida del difusor.

13.17 Aire con $T_{0_1} = 600$ R fluye isentrópicamente por una tobera convergente. En el punto en el flujo donde la temperatura es 571 R, la presión es de 100 psia. Determine la velocidad y la presión de estancamiento en la posición aguas abajo donde $T = 532$ R.

13.18 Fluye aire isentrópicamente por una tobera convergente hacia un receptor en el cual la presión absoluta es de 240 kPa. El aire entra a la tobera con velocidad despreciable a una presión de 406 kPa (abs) y una temperatura de 95 C. Determine la relación de flujo a través de la tobera para un área de la garganta de 0.01 m^2.

13.19 Fluye aire isentrópicamente por una tobera convergente hacia un receptor donde la presión es de 33 psia. Si la presión es 50 psia y la velocidad 500 pies/s, en la posición de la tobera donde el número de Mach es 0.4, determine la presión, velocidad y el número de Mach en la garganta de la tobera.

13.20 Aire que fluye isentrópicamente por una tobera convergente se descarga en la atmósfera. En la sección donde la presión absoluta es 179 kPa, la temperatura es 39 C y la velocidad del aire, 177 m/s. Determine la presión en la garganta de la tobera.

13.21 Fluye aire desde un gran tanque ($p = 650$ kPa (abs), $T = 550$ C) a través de una tobera convergente, con un área de garganta de 600 mm^2, y se descarga en la atmósfera. Determine la relación másica del flujo si éste es isentrópico a través de la tobera.

13.22 Helio en un tanque muy grande se mantiene a 800 kPa (abs) y 250 C. El helio sale del tanque estable e isentrópicamente por una tobera convergente que descarga a la atmósfera. El área de la garganta de la tobera es 0.002 m^2. Determine la densidad del helio en la garganta de la tobera.

13.23 Aire, con $p_0 = 650$ kPa (abs) y $T_0 = 350$ K, fluye isentrópicamente por una tobera convergente. En la sección en la tobera donde el área es 2.6×10^{-3} m^2, el número de Mach es 0.5. La tobera descarga a una contrapresión de 270 kPa (abs). Determine el área de salida de la tobera.

13.24 Un pequeño motor de encendido por chispa se prueba bajo condiciones atmosféricas estándar. Sin carga, consume aire a 0.35 kg/min; la presión en el múltiple de entrada es de 635 mm de mercurio (vacío). Encuentre el área de flujo mínima del carburador.

13.25 Una tobera convergente se conecta a un gran tanque que contiene aire comprimido a 75 F. El área de salida de la tobera es 1.5 $pulg^2$. El escape se descarga a la atmósfera. Para obtener una fotografía de sombras satisfactoria del patrón de flujo que abandona la salida de la tobera, la presión en el plano de salida debe ser mayor que 45 psig. ¿Qué presión se requiere en el tanque? ¿Qué relación de flujo másico de aire debe suministrarse si el sistema operara continuamente? Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento sobre un diagrama *Ts*.

13.26 Una tobera convergente descarga helio a la atmósfera. Las condiciones en la sección ① de la tobera resultan en $p_1 = 350$ kPa (abs), $T_1 = 20$ C y $V_1 = 201$ m/s. La relación de flujo másico va a ser 0.15 kg/s. Suponga que el flujo es sin fricción y adiabático. Determine el número de Mach en la salida de la tobera y el área de salida de la misma.

13.27 Se descarga isentrópicamente dióxido de carbono, a 50 MPa (abs) y 150 C, desde un gran tanque a la atmósfera a través de una tobera convergente cuya área de garganta es 1.0 mm^2. Encuentre la temperatura en la salida, la diferencia de presión entre la salida de la tobera y la atmósfera y la relación de flujo másico.

13.28 Un gran tanque alimenta aire a una tobera convergente que descarga a presión atmosférica. Suponga que el flujo es reversible y adiabático. ¿Para qué rango de presiones del tanque el flujo en la salida de la tobera será sónico ($M = 1$)? Si la presión del tanque es 600 kPa (abs) y la temperatura es 600 K, determine la relación de flujo másico a través de la tobera, si el área de salida es 1.29×10^{-3} m^2.

13.29 Un gran tanque inicialmente se evacúa a 27 pulg de Hg (vacío). (Las condiciones ambiente son 29.4 pulg de Hg a 70 F.) A $t = 0$, un orificio de 0.25 pulg de diámetro se abre en la pared del tanque; el área de la vena contracta es 65 por ciento del área geométrica. Calcule la relación de flujo másico

a la cual el aire entra inicialmente en el tanque. Muestre el proceso en un diagrama *Ts*. Elabore una gráfica esquemática de la relación de flujo másico como una función del tiempo. Explique por qué la gráfica es no lineal.

13.30 Una cavidad esférica de 18 pulg de diámetro inicialmente está evacuada. La cavidad se va a llenar con aire para un experimento de combustión. La presión va a ser de 5 psia, medida después de que su temperatura alcance T_{atm}. Suponga que la válvula sobre la cavidad es una tobera convergente con diámetro de garganta de 0.05 pulg, y que el aire de los alrededores está en condiciones estándar. ¿Por cuánto tiempo debe abrirse la válvula para alcanzar la presión final deseada en la cavidad? Calcule el cambio en la entropía del aire en la cavidad.

13.31 Fluye aire isentrópicamente a través de una tobera convergente unida a un gran tanque, donde la presión absoluta es 171 kPa y la temperatura es 27 C. En la sección de entrada, el número de Mach es 0.2. La tobera descarga a la atmósfera; el área de descarga es 0.015 m^2. Determine la magnitud y dirección de la fuerza que debe aplicarse para mantener la tobera fija.

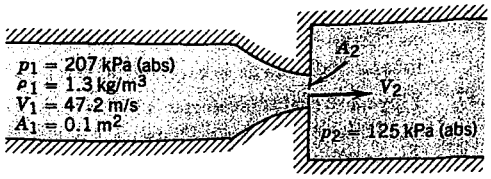
13.32 Una corriente de aire que fluye en un ducto (área = 1 $pulg^2$) está a $p = 20$ psia, tiene $M = 0.6$ y circula a $\dot{m} = 0.5$ lbm/s. Determine la temperatura local de estancamiento isentrópico. Si el área de la sección transversal del conducto se redujera aguas abajo, determine la máxima reducción porcentual del área permisible sin que se reduzca la relación de flujo (suponga flujo isentrópico). Determine la velocidad y presión en la posición de área mínima.

13.33 Considere un "carro cohete" impulsado por un chorro que se alimenta desde un tanque de aire comprimido en el carro. Al principio, el aire en el tanque está a 1.52 MPa (abs) y 27 C, y la masa del carro y el tanque es $M_0 = 23.2$ kg. El aire escapa a través de una tobera convergente con área de salida $A_e = 31.7$ mm^2. La resistencia al rodamiento del carro es $F_R = 5.2$ N; la resistencia aerodinámica es despreciable. En el instante posterior al momento en que el aire empieza a fluir a través de la tobera: *a*) calcule la presión en el plano de salida de la tobera, *b*) evalúe la relación de flujo másico del aire a través de la tobera y *c*) calcule la aceleración del arreglo del tanque y el carro.

13.34 Un cilindro de gas utilizado para soldar contiene helio a 3000 psig a temperatura ambiente. El cilindro se cae, su válvula se rompe y el gas se escapa a través de un conducto convergente. El área de flujo mínima es 0.10 $pulg^2$ en la sección de salida donde el flujo de gas es uniforme. Encuentre *a*) la relación de flujo másico a la cual el gas abandona el cilindro y *b*) la aceleración instantánea del cilindro (suponga que el eje del cilindro es horizontal y que su masa es 125 lb). Indique los estados estático y de estancamiento, así como la trayectoria del proceso, en un diagrama *Ts*.

13.35 Una tobera convergente se fija con tornillos en la parte lateral de un gran tanque. El aire dentro del tanque se mantiene en valores constantes de 50 psia y 100 F. El área de entrada de la tobera es 10 $pulg^2$ y el área de salida, 1 $pulg^2$. La tobera descarga a la atmósfera. Para flujo isentrópico en la tobera, determine la fuerza total sobre los tornillos e indique si los tornillos están en tensión o en compresión.

13.36 Un gas ideal, con $k = 1.4$, fluye isentrópicamente a través de la tobera convergente mostrada y descarga dentro de un gran ducto donde la presión es $p_2 = 125$ kPa (abs). El gas *no* es aire y se desconoce la constante de gas, R. El flujo es estable y uniforme en todas las secciones transversales. Encuentre el área de salida de la tobera, A_2, y la velocidad de salida, V_2.



P13.36

13.37 Un tanque de aire aislado con $\forall = 107$ pies^3 se emplea en una instalación de soplado. Al principio el tanque está cargado a 400 psia y 800 R. La relación de flujo másico del aire del tanque es una función del tiempo; durante los primeros 30 s de soplado, 64.5 lbm de aire abandonan el tanque. Determine la temperatura del aire en el tanque después de 30 s de soplado. Estime el área de la garganta de la tobera. 13.4

13.38 Un avión jet comercial, con cabina presurizada, vuela a 11 km de altitud. La temperatura y la presión de la cabina al principio se encuentran en 25 C y 2.5 km de altitud. El volumen interior de la cabina es 25 m^3. Escapa el aire a través de un pequeño agujero con área de flujo efectiva de 0.002 m^2. Calcule el tiempo requerido para que la presión de la cabina disminuya en 40 por ciento. 13.4

13.39 Escapa aire de una llanta de bicicleta a alta presión a través de un hoyo con diámetro $d = 0.254$ mm. La presión inicial en la llanta es $p_1 = 620$ kPa (manométrica). (Suponga que la temperatura permanece constante en 27 C.) El volumen interno de la llanta es aproximadamente de 4.26×10^{-4} m^3, y es constante. Estime el tiempo necesario para que la presión en la llanta disminuya a 310 kPa (manométrica). Calcule el cambio en la entropía específica del aire en la llanta durante este proceso. 13.5

13.40 Una tobera convergente-divergente está unida a un tanque de aire muy grande en el cual la presión es 20 psia y la temperatura es 40 F. La tobera descarga a la atmósfera donde la presión es 14.7 psia. El área de salida de la tobera es 2 pulg^2. ¿Cuál es la relación de flujo a través de la tobera? Suponga que el flujo es isentrópico. 13.5

13.41 Considere el flujo isentrópico de helio a través de la tobera convergente-divergente de un túnel de viento. La presión de estancamiento en la entrada de la tobera es 700 kPa (abs) y la temperatura de estancamiento es 60 C. En una sección aguas abajo de la garganta, la presión es 528 kPa (abs) y el área es 1.2×10^{-3} m^2. En esta sección, determine el número de Mach, la temperatura, la presión de estancamiento y la relación de flujo másico. 13.5

13.42 Una tobera convergente-divergente, diseñada para expandir aire a $M = 3.0$, tiene 250 mm^2 de área de salida. La tobera está atornillada a la parte lateral de un gran tanque y descarga a la atmósfera estándar. El aire en el tanque está presurizado a 4.5 MPa (manométrica) y 750 K. Suponga que el flujo dentro de la tobera es isentrópico. Evalúe la presión en el plano de salida de la tobera. Calcule la relación de flujo másico de aire a través de la tobera. 13.5

13.43 Un gran tanque suministra helio a la atmósfera a través de una tobera convergente-divergente. La presión en el tanque permanece constante en 8.00 MPa (abs) y la temperatura, en 1000 K. El flujo por toda la tobera es isentrópico. Ésta se diseña para descargar a un número de Mach de salida $M = 3.5$. El área de salida de la tobera es 100 mm^2. ¿Cuál es la relación de flujo másico a través de la tobera? 13.5

13.44 Aire, a una presión de estancamiento de 7.20 MPa (abs) y una temperatura de estancamiento de 1100 K fluye isentrópicamente a través de una tobera convergente-divergente que tiene un área de garganta de 0.01 m^2. Determine la velocidad y la relación de flujo másico en la sección aguas abajo donde el número de Mach es 4.0. 13.5

13.45 Una tobera convergente-divergente, con un área de garganta de 2 pulg^2, se conecta a un gran tanque en el cual se mantiene aire a una presión de 80 psia y una temperatura de 60 F. Si la tobera va a operar en las condiciones de diseño (el flujo es isentrópico) y la presión del ambiente exterior a la tobera es 12.9 psia, calcule el área de la salida de la misma y la relación de flujo másico. 13.5

13.46 En un punto aguas arriba de la garganta en una tobera convergente-divergente, la velocidad del aire es 172 m/s; $p = 200$ kPa (abs) y $T = 22$ C. El flujo es isentrópico y es supersónico a la salida de la tobera. Si el área de la garganta de la tobera es 0.01 m^2, determine la relación de flujo.

13.47 Fluye aire isentrópicamente a través de una tobera convergente-divergente unida a un gran tanque, en el cual la presión es 100 psia y la temperatura, 500 R. La tobera está operando en las condiciones de diseño para las cuales la presión de salida de la misma, p_e, es igual a la presión atmosférica de los alrededores, p_a. El área de salida de la tobera es $A_e = 4.0$ pulg^2. Calcule la relación de flujo a 13.5

través de la tobera. Si la temperatura del aire en el tanque se incrementa a 2000 R (todas las presiones permanecen iguales), ¿cómo será afectada la relación de flujo?

13.48 Se va a expandir aire a través de una tobera convergente-divergente por medio de un proceso adiabático sin fricción, desde una presión de 1.10 MPa (abs) y una temperatura de 115 C, hasta una presión de 141 kPa (abs). Determine las áreas de la garganta y la salida correspondientes a una tobera bien diseñada sin ondas de choque, si la relación de flujo másico es 2 kg/s.

13.49 Fluye aire estable e isentrópicamente a través de una tobera convergente-divergente. En la garganta, el aire está a 140 kPa (abs) y 60 C. El área de la sección transversal de la garganta es 0.05 m^2. En cierta sección en la parte divergente de la tobera, la presión es de 70.0 kPa (abs). Calcule la velocidad y el área en esta sección.

13.50 Nitrógeno, a una presión y temperatura de 371 kPa (abs) y 400 K, entra a una tobera con velocidad despreciable. El chorro de escape se dirige contra una gran placa plana que es perpendicular al eje del chorro. El flujo abandona la tobera a presión atmosférica. El área de salida es 0.003 m^2. Encuentre la fuerza requerida para sostener la placa.

13.51 Un pequeño motor de cohete de combustible sólido se prueba sobre un banco de pruebas de empuje. La presión y la temperatura de la cámara son 600 psia y 6000 R. La tobera de propulsión se diseña para expandir los gases de escape isentrópicamente a una contrapresión de 10.0 psia. El área de salida de la tobera es 0.60 $pies^2$. Considere el gas como ideal con $k = 1.2$ y $R = 60.0$ pies · lbf/lbm · R. Determine la relación de flujo másico del gas propulsor y la fuerza de empuje ejercida contra el banco de prueba.

13.52 Un motor de cohete usa como combustibles hidrógeno y oxígeno en estado líquido. La temperatura y la presión absoluta de la cámara son 3300 K y 6.90 MPa. La tobera está diseñada para expandir los gases de escape isentrópicamente a una contrapresión de diseño correspondiente a una altitud de 10 km en un día con condiciones estándar. El empuje producido por el motor va a ser de 100 kN en las condiciones de diseño. Trate los gases de escape como vapor de agua y suponga un comportamiento de gas ideal. Determine la relación de flujomásico del propulsor necesaria para producir el empuje deseado, el área de salida de la tobera y la razón de áreas, A_e/A_t.

13.53 Un pequeño motor de cohete, que consume hidrógeno y oxígeno como combustibles, se estudia sobre un banco de pruebas de empuje a una altura simulada de 10 km. El motor se opera a condiciones de estancamiento de la cámara de 1500 K y 8.0 MPa (manométrica). El producto de la combustión es vapor de agua, que puede tratarse como un gas ideal. La expansión ocurre a través de una tobera convergente-divergente con número de Mach de diseño de 3.5 y área de salida de 700 mm^2. Evalúe la presión en el plano de salida de la tobera. Calcule la relación de flujo másico del gas de escape. Determine la fuerza ejercida por el motor de cohete sobre el banco de pruebas de empuje.

13.54 Fluye aire isentrópicamente en una tobera convergente-divergente. En la sección (1), en la parte convergente donde el área es 1250 mm^2, la presión es 600 kPa (abs), la temperatura es 22 C y el número de Mach es 0.50. Desarrolle una expresión general para la razón de áreas, A_2/A_1, en términos de M_1 y M_2. Determine el área, A_2, en la sección divergente donde el número de Mach es 2.

13.55 Un cartucho de CO_2 se emplea para impulsar un pequeño carro de cohete. Gas comprimido, almacenado a 6000 psig y 70 F, se expande a través de una tobera convergente de contorno liso con diámetro de garganta de 0.020 pulg. La contrapresión es la atmosférica. Calcule la presión en la garganta de la tobera. Evalúe la relación de flujo másico del dióxido de carbono a través de la tobera. Determine el empuje disponible para impulsar el carro. ¿Qué tanto se incrementaría el empuje si se añadiera una sección divergente a la tobera para expandir el gas a presión atmosférica? Muestre los estados de estancamiento y estáticos, así como el proceso, en un diagrama *Ts*.

13.56 Una tobera convergente-divergente tiene un diámetro de garganta de 10 mm. Las mediciones indican que se forma una capa límite turbulenta en las paredes de la tobera. El perfil de velocidad en la capa límite se modela con fidelidad mediante la expresión de la ley exponencial de $\frac{1}{7}$. El espesor de la capa límite es 1.0 mm en la garganta donde $M = 1.0$, y 2.5 mm en el plano de salida donde $M =$

2.0. La tobera es alimentada con helio de un tanque a 25 C y 1.0 MPa (abs). Calcule *a*) la presión en la garganta de la tobera, *b*) la relación de flujo másico a través de la tobera y *c*) el diámetro en el plano de salida de la tobera. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento correspondientes a la garganta de la tobera y el plano de salida, en un diagrama *Ts*.

*13.57 Una tobera convergente-divergente tiene un diámetro de garganta de 10 mm y un diámetro del plano de salida de 20 mm. Las mediciones indican que se forma una capa límite turbulenta sobre las paredes de la tobera. El perfil de velocidad en la capa límite se modela con fidelidad mediante la expresión de la ley exponencial de $\frac{1}{7}$. El espesor de la capa límite es 1.0 mm en la garganta donde $M = 1.0$, y 2.5 mm en el plano de salida. Evalúe las áreas de flujo efectivo en la garganta y el plano de salida de la tobera. Para el flujo de un gas ideal con $k = 1.4$, estime los números de Mach *a*) subsónico y *b*) supersónico en el plano de salida de la tobera. ¿Qué tanto afectan las capas límite la relación de flujo másico y el número de Mach en el plano de salida? Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento para la garganta y el plano de salida de la tobera sobre un diagrama *Ts*.

13.58 Considere un flujo compresible en un ducto largo y recto. La entrada al ducto es desde la atmósfera donde $T = 25$ C. Suponga que el flujo va a ser adiabático y la tubería lo suficientemente larga de manera que se estrangule el flujo. Encuentre la velocidad y la temperatura a la salida de la tubería.

13.59 Fluye aire adiabáticamente con fricción por un ducto de 0.3 m de sección transversal cuadrada. En una sección, la presión, la temperatura y la velocidad son 60.0 kPa (abs), 50 C y 180 m/s. A la salida del ducto, la presión y la temperatura son 31.7 kPa (abs) y 19 C. Calcule el número de Mach de salida y la temperatura de estancamiento en el punto medio entre la primera sección y la salida.

13.60 Fluye aire estable y adiabáticamente a través de un ducto de área constante. La densidad en la entrada es 3.51 kg/m^3. Si el número de Mach de salida es la unidad y la temperatura y presión de salida son 227 C y 110 kPa (abs), determine el número de Mach de entrada y el cambio de entropía de la entrada a la salida.

13.61 Se saca aire de un cuarto por un ducto aislado de área constante a través de una tobera convergente de contorno liso. Las condiciones del cuarto son $T = 27$ C y $p = 101$ kPa (abs). El diámetro del ducto es $D = 25$ mm. El número de Mach en la entrada del ducto (salida de la tobera) es $M_1 = 0.40$. Encuentre *a*) la relación de flujo másico en el ducto y *b*) el rango de presiones de salida para el cual se estrangula el flujo de salida del ducto.

13.62 Un aparato de flujo de la línea de Fanno, en un laboratorio universitario de mecánica de fluidos, se compone de un tubo liso de latón de 7.16 mm de diámetro interior, alimentado por una tobera convergente. La temperatura del laboratorio y la lectura no corregida del barómetro son 23.5 C y 755.1 mm de mercurio. La presión a la salida de la tobera convergente (entrada al ducto de área constante) es −20.8 mm de mercurio (manométrica). Calcule el número de Mach en la entrada al tubo de área constante. Calcule la relación de flujo másico en el tubo. Evalúe la presión en la posición en el tubo donde el número de Mach es 0.4.

13.63 Fluye aire a través de un canal bien aislado de área constante. En una sección donde la velocidad es 144 m/s, $T = 50$ C y $p = 600$ kPa (abs). Determine *a*) la temperatura y la presión de estancamiento en la sección aguas abajo donde la densidad es 3.05 kg/m^3 y *b*) el aumento de entropía.

13.64 Fluye aire estable y adiabáticamente de un gran tanque a través de una tobera convergente conectada a un ducto aislado de área constante. La tobera puede considerarse sin fricción. El aire en el tanque está a $p = 1.00$ MPa (abs) y $T = 125$ C. La presión absoluta a la salida de la tobera (entrada del ducto) es 784 kPa. Determine la presión en el extremo del ducto, si la temperatura ahí es 65 C. Determine el aumento de entropía.

13.65 Fluye aire a través de una tubería lisa bien aislada de 4 pulg de diámetro a 600 lbm/min. En una sección, el aire está a 100 psia y 80 F. Determine la presión mínima y la velocidad máxima que pueden ocurrir en la tubería.

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

13.66 Se realizan mediciones de flujo compresible en un tubo largo y liso de 7.16 mm de diámetro interior. Se toma aire de los alrededores (20 C y 101 kPa) por medio de una bomba de vacío aguas abajo. Las lecturas de presión a lo largo del tubo se vuelven estables cuando la presión aguas abajo se reduce a 626 mm de Hg (vacío) o menos. Para estas condiciones, determine *a*) la relación de flujo másico máxima posible a través del tubo, *b*) la presión de estancamiento del aire que abandona el tubo y *c*) el cambio de entropía del aire en el tubo. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento, así como el proceso, en un diagrama *Ts*.

13.67 Se toma aire de la atmósfera (20 C y 101 kPa) a través de una tobera convergente y se conduce por un largo tubo aislado de 20 mm de diámetro y área constante. El flujo en la tobera es isentrópico. El número de Mach en la entrada del tubo de área constante es 0.15. Evalúe la relación de flujo másico a través del tubo. Calcule T^* y p^* para el proceso isentrópico. Calcule T^* y p^* para el flujo a través del tubo de área constante. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento correspondientes en un diagrama *Ts*.

13.68 Considere un flujo adiabático de aire en una tubería de área constante con fricción. En una sección de la tubería, $p_0 = 100$ psia, $T_0 = 500$ R y $M = 0.70$. Si el área de la sección transversal es 1 pie^2 y el número de Mach en la salida es $M_2 = 1$, encuentre la fuerza de fricción ejercida sobre el fluido por la tubería.

13.69 Fluye aire por un ducto aislado con área constante de 0.03 m^2. En la sección ①, la temperatura y presión estáticas y el número de Mach son 277 K, 690 kPa (abs) y 0.60. En la sección ② aguas abajo, la temperatura es 260 K. Dibuje un diagrama *Ts* para el flujo entre los estados ① y ② que muestre los estados estático y de estancamiento. Calcule M_2 y p_2. Evalúe la fuerza friccionante ejercida por el aire sobre la pared del ducto.

13.70 Un taladro dental se acciona mediante una turbina de aire miniatura. El aire es suministrado por un compresor a una presión de estancamiento de 50 psia. El aire fluye hacia la turbina a través de un tubo largo de 0.060 pulg de diámetro interior y entra a éste por una tobera lisa; el flujo dentro del tubo es adiabático. El número de Mach en la entrada de la turbina es 0.608. Modele el flujo a través de la turbina como isentrópico. La caída de presión a través de la turbina es 10 psi. El aire abandona la turbina a presión atmosférica. Debido a que la corriente de escape se usa para enfriar el área de corte, su temperatura debe mantenerse en 30 F. Determine la temperatura del aire en la entrada de la turbina. Calcule la temperatura de estancamiento en la salida del compresor (entrada de la tobera). Evalúe la pérdida en la presión de estancamiento y el cambio en la entropía a través del tubo de alimentación. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento, así como la trayectoria del proceso, en un diagrama *Ts*.

13.71 A través de una tobera convergente se hará pasar aire (75 F y 14.7 psia) hacia un aparato de demostración de la línea de Fanno. El flujo en la tobera puede modelarse como isentrópico. El aire de la tobera entra en un ducto de área constante de 0.50 pulg de diámetro a $M_1 = 0.3$. El flujo en el ducto es adiabático pero friccionante. Evalúe las propiedades $T_{0_1}, p_{0_1}, T_1, p_1, \rho_1, V_1$ y $\dot{m}$. Suponiendo que el flujo se estrangula en la sección ②, evalúe $T_2, V_2, \rho_2 p_2, T_{0_2}$ y p_{0_2}. Calcule el cambio en la entropía específica. Muestre todos los puntos de estado estático y de estancamiento sobre un diagrama *Ts*.

13.72 Fluye aire por una tobera convergente y luego por un ducto aislado. El aire se alimenta desde un tanque donde la temperatura es constante a 15 C y la presión es variable. El extremo de salida del ducto descarga en la atmósfera. Cuando el flujo de salida acaba de estrangularse, las mediciones de presión indican que la presión de entrada en el ducto y el número de Mach son 53.2 psia y 0.30. Determine la presión en el tanque y la temperatura, la presión de estancamiento y la relación de flujo másico del flujo de salida, si el diámetro del tubo es 0.249 pulg. Indique sobre un diagrama *Ts* el efecto de aumentar la presión del tanque a 100 psia. Dibuje la distribución de presión contra la distancia a lo largo del canal para esta nueva condición de flujo.

13.73 Fluye aire estable y adiabáticamente en una tubería horizontal de 50 mm de diámetro. En la sección ①, la presión es 340 kPa (abs) y la temperatura, 53 C. En la sección ② (aguas abajo), la

temperatura es 114 C y la velocidad es 591 m/s. Determine la velocidad y el número de Mach en la sección ①.

13.74 Una tobera convergente-divergente alimenta aire a un ducto de área constante bien aislado. En la entrada del ducto, $M = 2.0$, $p = 19.4$ psia y $T = 278$ R. A la salida del ducto, el número de Mach es la unidad y la presión de estancamiento es 90 psia. Determine la presión y la temperatura en la salida del ducto y el cambio en la entropía.

13.75 Una tobera convergente-divergente descarga aire en una tubería aislada con área de sección transversal de 650 mm^2. En la entrada de la tubería, $T_1 = 39$ C, $p_1 = 128$ kPa (abs) y $M_1 = 2.0$. Suponga que no hay ondas de choque en el flujo y que éste abandona la tubería a $M_2 = 1.0$. Determine la temperatura en la salida de la tubería. Calcule la presión estática en la salida de la tubería.

13.76 Una tobera convergente-divergente descarga aire en una tubería aislada con área $A = 650$ mm^2. En la entrada de la tubería, $p = 128$ kPa (abs), $T = 39$ C y $M = 2.0$. Para flujo sin ondas de choque a un número de Mach igual a la unidad en la salida de la tubería, calcule la temperatura de salida, la fuerza neta del fluido en la tubería y el cambio en la entropía.

13.77 Fluye aire estable y adiabáticamente en un tubo horizontal de 50 mm de diámetro. Las mediciones en la sección ① indican que la temperatura y la presión son 53 C y 340 kPa (abs). En la sección ② aguas abajo, la temperatura es 114 C y la velocidad del flujo es 591 m/s. Encuentre *a)* la velocidad de flujo y el número de Mach en la sección ① y *b)* la magnitud y dirección de la fuerza de fricción ejercida por el aire sobre la pared del ducto. Dibuje un diagrama *Ts* para el proceso, mostrando todos los puntos de estado estáticos y de estancamiento.

13.78 Deseamos construir un túnel de viento supersónico empleando un arreglo de tobera y ducto de área constante aislados. Se desea una operación libre de ondas de choque, con $M_1 = 2.1$ en la entrada de la sección de prueba y $M_2 = 1.1$ en la salida de la sección de prueba. Las condiciones de estancamiento son $T_0 = 295$ K y $p_0 = 101$ kPa (abs). Calcule la presión y la temperatura de salida, así como el cambio de entropía a través de la sección de prueba.

***13.79** Resuelva el problema 13.58 para la longitud L, del ducto, si el diámetro es 12 mm y la superficie es lisa. En la entrada del ducto, $p = 94.1$ kPa (abs).

***13.80** Considere el canal de flujo de la línea de Fanno de laboratorio señalado en el problema 13.62. Suponga que la condiciones de laboratorio son 22.5 C y 760 mm de mercurio (no corregida). La lectura del manómetro en una toma de presión al final de la tobera convergente es −11.8 mm de mercurio (manométrica). Calcule el número de Mach en esta posición. Determine la longitud del ducto requerida para alcanzar el flujo estrangulado. Calcule la temperatura y la presión de estancamiento en el estado de estrangulación en el ducto de área constante.

***13.81** Para la condición del problema 13.64, encuentre la longitud, L, de tubería de acero comercial de 50 mm de diámetro entre las secciones ① y ②.

***13.82** Fluye aire en un ducto aislado. En una sección, la temperatura, la presión absoluta y la velocidad son 200 C, 2.00 MPa y 140 m/s. Encuentre la temperatura en este ducto donde la presión ha disminuido a 1.26 MPa (abs) como un resultado de la fricción. Si el ducto ($e/D = 0.0003$) tiene 150 mm de diámetro, encuentre la distancia entre las dos secciones.

13.83 Fluye hidrógeno en una tubería horizontal aislada de 900 pies de largo y 2.5 pulg de diámetro. La temperatura y la presión iniciales son 140 F y 60.5 psia. El factor de fricción promedio es 0.015. Determine la relación de flujo máxima posible. Calcule la caída de presión requerida para mantener esta relación de flujo.

***13.84** Para las condiciones del problema 13.68, determine la longitud del ducto. Suponga que éste es circular y que está hecho de acero comercial. Grafique las variaciones de la presión y del número de Mach contra la distancia a lo largo del ducto.

***13.85** Considere el flujo descrito en el problema ejemplo 13.8. Empleando las tablas para el flujo de la

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

línea de Fanno de un gas ideal, grafique la presión estática, la temperatura y el número de Mach contra L/D, medidos desde la entrada del tubo; continúe hasta que se alcance el estado de estrangulamiento.

*13.86 Mediante el empleo de coordenadas T/T_0 y $(s - s^*)/c_p$, donde s^* es la entropía a $M = 1$, grafique la línea de Fanno empezando a partir de las condiciones de entrada especificadas en el problema ejemplo 13.8. Emplee tablas para flujo de la línea de Fanno y proceda hasta $M = 1$.

*13.87 Mediante el empleo de coordenadas T/T^* y $(s - s^*)/c_p$, donde s^* es la entropía a $M = 1$, grafique la línea de Fanno para flujo de aire ($k = 1.4$) para $0.1 < M < 3.0$.

*13.88 Fluye aire a través de un ducto aislado de área constante de 40 pies de largo con $D = 2.12$ pies. La rugosidad relativa es $e/D = 0.002$. En la entrada del ducto, $T_1 = 100$ F y $p_1 = 17.0$ psia. En una posición aguas abajo, $p_2 = 14.7$ psia y el flujo es subsónico. ¿La información proporcionada es suficiente para resolver con respecto a M_1 y M_2? Pruebe su respuesta gráficamente. Encuentre la relación de flujo másico en el ducto, así como T_2.

*13.89 Se conduce aire dentro de un tubo a través de una tobera convergente-divergente que inicialmente tiene temperatura y presión de estancamiento de 1000 R y 200 psia. El flujo en la tobera es isentrópico y en el tubo, adiabático. En la unión entre la tobera y el tubo, la presión es de 2.62 psia. El tubo tiene 4 pies de largo y 1 pulg de diámetro. Si el número de salida de Mach es la unidad, encuentre el factor de fricción promedio a lo largo del tubo. Calcule el cambio en la presión entre la entrada y la descarga del tubo.

*13.90 El ducto del problema 13.74 tiene una rugosidad relativa $e/D = 0.0002$ y un diámetro hidráulico de 0.5 pies. Determine la longitud L, del ducto.

*13.91 Para las condiciones del problema 13.76, determine la longitud del ducto. Suponga que el ducto es circular y que está hecho de acero comercial. Grafique las variaciones de la presión y del número de Mach contra la distancia a lo largo del ducto.

*13.92 Empezando con las condiciones de entrada del problema 13.76, y empleando coordenadas T/T_0 y $(s - s^*)/c_p$, grafique las ramas supersónica y subsónica de la línea de Fanno.

*13.93 Un arreglo de ducto liso de área constante ($D = 150$ mm) se va a alimentar mediante una tobera convergente-divergente desde un tanque que contiene aire a 295 K y 1.0 MPa (abs). Se desea una operación libre de ondas de choque. El número de Mach en la entrada del ducto va a ser 2.1 y el número de Mach en la salida del mismo será de 1.4. Todo el arreglo estará aislado. Encuentre *a*) la presión requerida a la salida del ducto, *b*) la longitud del ducto que se necesita y *c*) el cambio en la entropía específica a lo largo del ducto. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento, así como la línea de proceso sobre un diagrama Ts.

**13.94 Considere un flujo compresible a través de un ducto de área constante. El flujo es adiabático y el número de Mach se mantiene constante en $M = 1/\sqrt{k}$ extrayendo gas a través de una pared porosa. El flujo extraído sale en dirección normal a la pared. El flujo es friccionante con un factor de fricción, f, y el diámetro equivalente del ducto es D. Obtenga una expresión para el cambio de presión en una sección del ducto de longitud L, en términos de f, k, L y D.

**13.95 En los largos ductos de área constante, como los que se usan para el gas natural, la temperatura puede considerarse constante. Suponga que sale gas de una estación de bombeo a 50 psia y 70 F a $M = 0.10$. En la sección a lo largo de la tubería donde la presión a descendido a 20 psia, calcule el número de Mach del flujo. ¿Se ha añadido o extraído calor del gas a lo largo del tramo entre las tomas de presión? Justifique su respuesta. Dibuje el proceso sobre un diagrama Ts. Indique (cualitativamente) T_{0_1}, T_{0_2} y p_{0_2}.

**13.96 Fluye aire por un canal, donde la fricción y la transferencia de calor se combinan para mantener la temperatura constante y provocar que el flujo se estrangule a la salida del canal. Las condiciones a

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

** Estos problemas requieren información de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

la entrada son 500 R, 150 psia y $M = 0.5$. El diámetro del canal es $D = 1.25$ pies. Calcule la velocidad del flujo en la sección de salida. Evalúe la magnitud y la dirección del intercambio térmico en el proceso. Determine la presión en el plano de salida.

**13.97 Entra aire en un canal horizontal de área constante a 200 F, 600 psia y 350 pies/s. Determine la presión límite para flujo isotérmico. Compare con la presión límite para flujo adiabático friccionante.

**13.98 Gas natural, con las propiedades termodinámicas de metano puro, entra en un tubo horizontal a 200 F, 600 psia y 325 pies/s. Determine la presión límite para flujo isotérmico. Compare con la presión límite para flujo adiabático friccionante. 13

**13.99 Una tubería de acero limpia tiene 950 pies de largo y 5.25 pulg de diámetro interior. Entra aire a la tubería a 80 F, 120 psia y 80 pies/s. Calcule y compare las caídas de presión a lo largo de la tubería para flujo *a*) incompresible, *b*) isotérmico y *c*) adiabático.

**13.100 Entra aire en una tubería de 6 pulg de diámetro a 60 F, 200 psia y 190 pies/s. El factor de fricción promedio es 0.016. El flujo es isotérmico. Calcule el número de Mach local y la distancia desde la entrada del canal hasta el punto donde la presión alcanza 75 psia. 13

**13.101 Los siguientes datos corresponden a un gasoducto que atraviesa el país:

Diámetro interior:	2.00 pies	Temperatura:	520 R
Presión máxima:	45.000 psfa	Tasa de flujo másico:	5.15 slug/s
Presión mínima:	15 000 psfa	Constante de gas:	3000 pies · lbf/slug · R
Factor de presión promedio:	0.012		

Suponiendo flujo isotérmico estable, calcule las velocidades de gas máxima y mínima. Estime la distancia máxima entre las estaciones de bombeo. ¿Qué potencia mínima se requiere para operar cada uno de los compresores del ducto?

**13.102 Se va a bombear gas natural (masa molecular $M_m = 18$ y $k = 1.3$) por una tubería de 36 pulg de diámetro interior que conecta dos estaciones compresoras separadas por una distancia de 40 millas. En la estación aguas arriba, la presión no será mayor a 90 psig, y en la estación aguas abajo por lo menos será de 10 psig. Calcule la relación de flujo máxima permisible (pies^3/día a 70 F y 1 atm) suponiendo el suficiente intercambio térmico a través de la tubería para mantener el gas a 70 F. 13

13.103 Considere un flujo de aire sin fricción en un ducto de área constante. En la sección ①, $M_1 = 0.50$, $p_1 = 1.10$ MPa (abs) y $T_{0_1} = 333$ K. Por el efecto del intercambio térmico, el número de Mach en la sección ② es $M_2 = 0.90$ y la temperatura de estancamiento es $T_{0_2} = 478$ K. Determine la cantidad de intercambio térmico por unidad de masa hacia o del fluido entre las secciones ① y ②, así como la diferencia de presión, $p_1 - p_2$. 13

13.104 Fluye aire por una tubería de 2 pulg de diámetro interior con fricción despreciable. Las condiciones a la entrada son $T_1 = 60$ F, $p_1 = 150$ psia y $M_1 = 0.30$. Determine el intercambio térmico por libra de aire requerido para producir $M_2 = 1.0$ en la salida de la tubería, donde $p_2 = 72.0$ psia.

13.105 Considere un flujo de aire sin fricción, unidimensional y estable en un ducto de área constante ($A = 0.0231$ m^2) con adición de calor. Las propiedades del flujo son: $T_{0_1} = 900$ K, $p_{0_1} = 400$ kPa (abs), $\rho_1 = 1.30$ kg/m^3, $T_2 = 929$ K y $M_2 = 0.75$. Calcule el número de Mach en la sección ①. Encuentre la relación de adición de calor al flujo. Evalúe la presión en la sección ②. Calcule el cambio de entropía, $s_2 - s_1$. 13

13.106 Fluye aire sin fricción por un corto ducto de área constante. A la entrada del ducto, $M_1 = 0.30$, $T_1 = 50$ C y $\rho_1 = 2.16$ kg/m^3. Como resultado del calentamiento, el número de Mach y la densidad del tubo son $M_2 = 0.60$ y $\rho_2 = 0.721$ kg/m^3. Determine la adición de calor por unidad de masa y el cambio de entropía en el proceso.

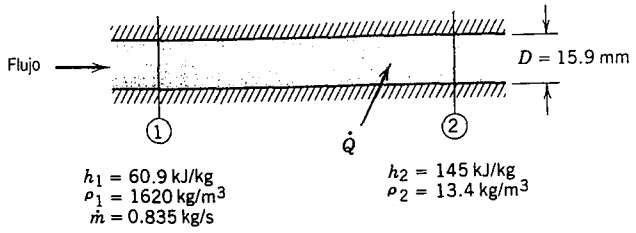
13.107 Una mezcla de combustible-aire, con las propiedades termodinámicas de aire puro, entra en un 13

** Estos problemas requieren información de secciones que pueden omitirse sin perder continuidad en el material del texto.

combustor de área constante. La temperatura de estancamiento de la corriente de entrada es constante en 400 K. La fricción es despreciable. Cuando se añade calor al flujo a la relación de 1.4 MJ/kg, se estrangula el flujo en la salida del ducto. En esta condición, la presión estática en la entrada es 144.6 kPa (abs) y la presión en la salida del ducto es 64.7 kPa (abs). Calcule *a*) la temperatura de salida del combustor, *b*) el número de Mach de entrada del combustor y *c*) la pérdida en la presión de estancamiento a través del combustor. Indique los puntos de estado estático y de estancamiento sobre un diagrama *Ts*; señale la dirección del proceso.

13.108 Fluye aire sin fricción por un ducto de 75 mm de diámetro. A la entrada, el número de Mach, la temperatura de estancamiento y la presión absoluta son $M_1 = 0.2$, $T_{0_1} = 278$ K y $p_1 = 275$ kPa. El calor se añade a la relación de 219 kJ/kg del fluido que circula, y la temperatura de salida es 489 K. Determine la temperatura de estancamiento y el número de Mach a la salida del ducto, así como el cambio de entropía en el proceso.

13.109 Freón líquido, empleado para enfriar componentes electrónicos, fluye establemente dentro de un tubo horizontal de diámetro constante, $D = 15.9$ mm. Se transfiere calor al flujo, y el líquido hierve y sale del tubo como vapor. Los efectos de la fricción son despreciables comparados con los efectos de la adición de calor. Se muestran las condiciones de flujo. Encuentre *a*) la relación de transferencia de calor y *b*) la diferencia de presiones, $p_1 - p_2$.



P13.109

13.110 Fluye aire a 1.42 kg/s por un ducto de 100 mm de diámetro. En la sección de entrada, la temperatura y la presión absoluta son 52 C y 60.0 kPa. En la sección aguas arriba donde se estrangula el flujo, $T_2 = 45$ C. Determine la adición de calor por unidad de masa, el cambio en la entropía y el cambio en la presión de estancamiento en el proceso, suponiendo flujo sin fricción.

13.111 Fluye aire establemente y sin fricción en un ducto de 0.5 pies^2 de área de sección transversal. Las condiciones a la entrada son $M_1 = 0.30$, $T_{0_1} = 400$ R y $p_{0_1} = 12.0$ psia. La temperatura de estancamiento y la presión estática a la salida son 797 R y 9.43 psia. Determine la relación de intercambio térmico y el número de Mach de salida.

13.112 Fluye aire en un ducto de área constante sin fricción. En la sección (1), $p_1 = 97.3$ psia, $T_1 = 992$ R y $V_1 = 309$ pies/s. Por el efecto de la adición de calor, aguas abajo $V_2 = 652$ pies/s. Determine la presión, temperatura, presión de estancamiento y temperatura de estancamiento en la sección (2), y la adición de calor por unidad de masa entre las secciones (1) y (2).

13.113 Se añade gasolina a la corriente de aire en el carburador de un motor de encendido de chispa para formar una mezcla casi estequiométrica (1 lbm de gasolina por 16 lbm de aire). El combustible se evapora en una corta sección de un ducto de área constante donde la fricción puede ignorarse. (El calor latente de vaporización de la gasolina es 140 Btu/lbm.) Como una primera aproximación, desprecie los cambios en la composición química y la masa de la corriente de aire, la cual abandona la sección de evaporación a 9.6 F. Determine la temperatura y presión de estancamiento del flujo que sale del ducto, si la temperatura a la entrada del ducto es 43.6 F (suponga condiciones atmosféricas estándar y flujo isentrópico de la atmósfera a la entrada del ducto). Calcule el cambio en la presión de estancamiento provocado por el proceso de evaporación.

13.114 Fluye aire sin fricción por una sección de un ducto de área constante. La temperatura de entrada, presión y número de Mach son 818 R, 200 psia y 0.3. La velocidad en la salida del ducto será $V_2 \leq$ 2000 pies/s. Calcule las propiedades de flujo en la salida del ducto y la relación máxima permisible de adición de calor.

13.115 Tres metros antes de la salida de un ducto de área constante (área = 0.02 m^2), el aire está a 126 kPa (abs) y 260 C. El aire fluye establemente por el ducto (sin fricción) a 1.83 kg/s. El aire sale del ducto subsónicamente a la presión atmosférica. Determine el número de Mach, la temperatura y la temperatura de estancamiento a la salida del ducto, así como la adición de calor a lo largo de 3 m de la longitud del ducto.

13.116 Considere el flujo sin fricción de aire en un ducto de área constante, $A = 0.087$ $pies^2$. En una sección, las propiedades estáticas son 500 R y 15.0 psia, y el número de Mach es 0.2. En otra sección, aguas abajo, la presión estática es 10.0 psia. Dibuje un diagrama *Ts* que muestre los estados estático y de estancamiento. Calcule la velocidad y temperatura del flujo aguas abajo. Evalúe la relación de intercambio de calor en el proceso.

13.117 Un combustor de un motor jet JT8D (como el empleado en el avión Douglas DC-9) tiene una relación de flujo de aire de 15 lbm/s. El área es constante y los efectos friccionantes son despreciables. Las propiedades en la entrada del combustor son 1260 R, 235 psia y 609 pies/s. A la salida del combustor, $T = 1850$ R y $M = 0.476$. El valor calorífico del combustible es 18 000 Btu/lbm; la proporción de aire-combustible es lo suficientemente grande de manera que las propiedades son las del aire. Calcule la presión en la salida del combustor. Determine la relación de adición de energía a la corriente de aire. Encuentre la relación de flujo másico del combustible requerido, y compárela con la del flujo de aire. Muestre el proceso sobre un diagrama *Ts*, indicando los estados estático y de estancamiento y la dirección del proceso.

13.118 Considere un flujo de aire sin fricción en un ducto con $D = 4$ pulg. En la sección ①, la temperatura y la presión son 30 F y 10 psia; la relación de flujo másico es 1.2 lbm/s. ¿Cuánto calor puede añadirse sin estrangular el flujo? Evalúe el cambio resultante en la presión de estancamiento.

13.119 Un ducto de área constante se alimenta con aire que proviene de una tobera convergente divergente. En la entrada al ducto, se conocen las siguientes propiedades: $p_{0_1} = 800$ kPa (abs), $T_{0_1} = 700$ K y $M_1 = 3.0$. A corta distancia a través del ducto (en la sección ②) $\rho_2 = 0.334$ kg/m^3. Suponiendo flujo sin fricción, determine la velocidad, presión y el número de Mach en la sección ②, y el intercambio térmico entre la entrada y la sección ②.

13.120 Considere un flujo de aire unidimensional y estable en un ducto de área constante *tanto* con fricción *como* con intercambio térmico. En la sección ①, la temperatura, presión y velocidad son 600 R, 60 psia y 500 pies/s. En la sección ② aguas abajo, la temperatura y la presión son 800 R y 40 psia. Evalúe el intercambio térmico por unidad de masa y la presión de estancamiento en la sección ②.

13.121 El flujo de aire sin fricción en un ducto de área constante descarga a presión atmosférica en la sección ②. Aguas arriba en la sección ①, $M_1 = 3.0$, $T_1 = 215$ R y $p_1 = 1.73$ psia. Entre las secciones ① y ②, 48.5 Btu por libra masa de aire se añade al flujo. ¿p_2 es más grande, igual o menor que la presión atmosférica? ¿M_2 es supersónico, sónico o subsónico? Aparte de un diagrama *Ts*, bosqueje la distribución de presión contra la distancia a lo largo del canal, marcando las secciones ① y ②.

***13.122** Fluye aire sin fricción en un ducto de área constante. En la sección ①, $M_1 = 0.50$, $p_1 = 1.10$ MPa (abs) y $T_{0_1} = 335$ K. Por el efecto del intercambio térmico, el número de Mach se incrementa a $M_2 = 0.9$ en la sección ②. Determine la adición de calor por unidad de masa entre las secciones ① y ②, así como la presión p_2.

***13.123** Por medio de una tobera convergente, aire de la atmósfera (288 K y 101 kPa) se lleva a la entrada del múltiple de un motor de carreras. El flujo es isentrópico a través de la tobera. El aire la abandona y entra al múltiple a $M = 0.30$. En el múltiple, se evapora alcohol combustible en una corta sección de un ducto de área constante donde la fricción es despreciable. El efecto es extraer 60.3 kJ/kg de energía térmica de la corriente de aire. Suponga que las propiedades del fluido son las del aire puro.

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

Encuentre *a*) el número de Mach y *b*) la presión en la salida de la sección de evaporación. Indique los puntos de estado estático y de estancamiento y el proceso sobre un diagrama *Ts*.

*13.124 Fluye aire sin fricción en un ducto de área constante. En la sección ①, $T_1 = 992$ R, $p_1 = 97.3$ psia y $V_1 = 309$ pies/s. La adición de calor ocasiona que la velocidad aumente a 652 pies/s en la sección ②. Determine el número de Mach, la temperatura, presión, temperatura de estancamiento y presión de estancamiento en la sección ②.

*13.125 Fluye aire establemente y sin fricción a 1.83 kg/s por un ducto con un área de sección transversal de 0.02 m^2. En la entrada del ducto, la temperatura y la presión absoluta son 260 C y 126 kPa. El flujo de salida se descarga subsónicamente a la presión atmosférica. Determine el número de Mach, la temperatura y la temperatura de estancamiento en la salida del ducto, así como la relación de intercambio térmico.

*13.126 Una tobera convergente-divergente alimenta un corto ducto de área constante. En la entrada del ducto, las condiciones locales de estancamiento isentrópico son $T_{0_1} = 700$ K y $p_{0_1} = 800$ kPa (abs), y $M_1 = 3.0$. Una corta distancia a través del ducto en la sección ②, $\rho_2 = 0.334$ kg/m^3. Suponiendo flujo sin fricción en el ducto, determine la velocidad, la presión y el número de Mach en la sección ②, así como el intercambio térmico entre la entrada y la sección ②.

*13.127 Fluye aire sin fricción en una corta sección de un ducto de área constante. A la entrada del ducto, $M_1 = 0.30$, $T_1 = 50$ C y $\rho_1 = 2.16$ kg/m^3. A la salida del ducto, $M_2 = 0.60$. Determine la adición de calor por masa unitaria, el cambio en la entropía y el cambio en la presión de estancamiento en el proceso.

*13.128 En el flujo sin fricción de aire por un ducto de 100 mm de diámetro, entran 1.42 kg/s a 52 C y 60.0 kPa (abs). Determine la cantidad de calor que debe añadirse para estrangular el flujo, y las propiedades del fluido en el estado de estrangulamiento.

*13.129 Fluye aire sin fricción por un ducto de 75 mm de diámetro. A la entrada, $M_1 = 0.20$, $T_{0_1} = 278$ K y $p_1 = 275$ kPa. El calor se suministra a 219 kJ/kg de aire que fluye. Determine la temperatura de estancamiento y el número de Mach a la salida del ducto, así como los cambios en la entropía y la presión de estancamiento en el proceso.

*13.130 Fluye aire establemente en un ducto de área constante sin fricción de 0.5 $pies^2$. Las condiciones de entrada son $M_1 = 0.3$, $T_{0_1} = 400$ R y $p_{0_1} = 10$ psia; la temperatura de estancamiento de salida es $T_{0_2} = 797$ R. Determine la cantidad de calor agregado, así como el número de Mach y la presión a la salida.

*13.131 El aire de un sistema de admisión de un avión entra a la cámara de combustión del avión, donde se añade calor durante un proceso sin fricción en un tubo con área constante de 0.01 m^2. La temperatura local de estancamiento isentrópico y el número de Mach a la entrada del combustor son 427 K y 0.3. La relación de flujo másico es 0.5 kg/s. Cuando la relación de suministro de calor se fija en 404 kW, el flujo abandona el combustor a 1026 K y 22.9 kPa (abs). Determine para este proceso *a*) el número de Mach a la salida del combustor, *b*) la presión estática en la entrada del combustor y *c*) el cambio en la presión local de estancamiento isentrópico durante el proceso de adición de calor. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento e indique la dirección del proceso sobre un diagrama *Ts*.

*13.132 Entra aire en el múltiple de entrada de un motor de encendido de chispa a 0.308 kg/s con $T_{0_1} = 300$ K. En cierta localización, $M_1 = 0.30$ y $p_1 = 94.0$ kPa (abs). La corriente de aire se enfría por medio de la evaporación de gasolina. Después de la sección de evaporación, $M_2 = 0.28$. Los efectos de la fricción y del cambio de área son despreciables. Trate el fluido como aire puro y encuentre el área de flujo. Calcule el intercambio térmico por unidad de masa de aire, el cambio en la presión de estancamiento para el proceso y el cambio en la entropía. Sobre un diagrama *Ts* muestre los estados estático y de estancamiento, así como la dirección del proceso.

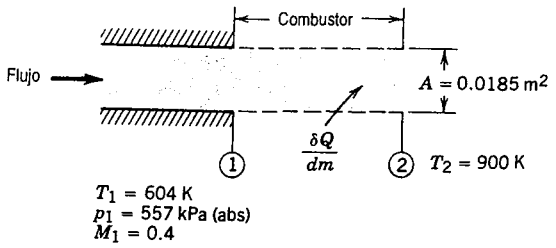
* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

*13.133 Considere el flujo de aire unidimensional y estable en un combustor con área constante de 0.5 pies^2, donde se queman hidrocarburos, añadidos a la corriente de aire. El proceso es equivalente a un calentamiento simple porque la cantidad de combustible es pequeña comparada con la de aire; el calentamiento ocurre a lo largo de una corta distancia de modo que la fricción es despreciable. Las propiedades en la entrada del combustor son 818 R, 200 psia y $M = 0.3$. La velocidad en la salida del combustor no debe exceder 2000 pies/s. Encuentre las propiedades en la salida del combustor y la relación de suministro de calor. Muestre el proceso sobre un diagrama *Ts*, indicando los puntos de estado estático y de estancamiento antes y después de la adición de calor.

*13.134 El flujo en el combustor de una turbina de gas se modela como el calentamiento de aire sin fricción, unidimensional y estable en un canal de área constante. Para cierto proceso, las condiciones a la entrada son 960 F, 225 psia y $M = 0.4$. Calcule la máxima adición de calor posible. Encuentre todas las propiedades del fluido en la sección de salida y la reducción en la presión de estancamiento. Muestre el proceso sobre un diagrama *Ts*, indicando todos los puntos de estado estático y de estancamiento.

*13.135 Un túnel de viento supersónico se alimenta de un tanque de aire de alta presión a 25 C. La temperatura de la sección de prueba se va a mantener arriba de 0 C para prevenir la formación de partículas de hielo. Para lograr esto, el aire del tanque se calienta antes de que fluya dentro de una tobera convergente-divergente que alimenta la sección de prueba. El calentamiento se efectúa en una corta sección con área constante. La salida del calentador es $\dot{Q} = 10$ kW. El número de Mach de diseño en la sección de prueba del túnel de viento va a ser 3.0. Evalúe la temperatura de estancamiento requerida en la salida del calentador. Calcule la relación de flujo másico máxima a la cual el aire puede ser suministrado a la sección de prueba del túnel. Determine la razón de áreas, A_e/A_t.

*13.136 Considere el flujo estable de aire en un combustor donde la energía térmica se suministra mediante el quemado del combustible. Ignore la fricción y suponga que las propiedades termodinámicas son constantes e iguales a las del aire puro. Calcule la temperatura de estancamiento y el número de Mach a la salida del quemador. Evalúe la adición de calor por unidad de masa y la relación de intercambio térmico. Exprese la relación de adición de calor como una fracción de la máxima relación posible de adición de calor con este número de Mach de entrada.



P13.136

*13.137 Un avión jet vuela a $M = 0.85$ y 10 km de altura en un día con condiciones estándar. El sistema de entrada frena el aire a $M_1 = 0.3$ respecto al avión. El flujo en el sistema de entrada es adiabático, pero la fricción provoca que la presión de estancamiento absoluta descienda en 5 por ciento. El aire de la entrada se comprime a $p_2 = 30\ p_1$ en la sección del compresor del motor. El flujo en el compresor es adiabático, pero la temperatura de estancamiento de la corriente aumenta en 750 K debido a la adición de trabajo. El número de Mach con el que se abandona el compresor y se entra al combustor es $M_2 = 0.4$. El calor se suministra en el combustor, donde la temperatura máxima debe mantenerse en $T_3 = 1630$ K o menos. Evalúe para estas condiciones *a*) la máxima adición de calor posible en el combustor, *b*) el número de Mach de salida del combustor para la parte *a*), y *c*)

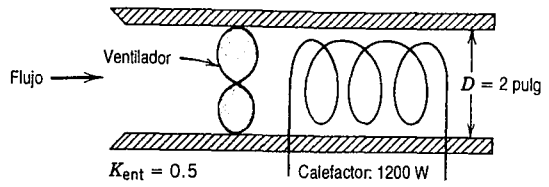
el cambio en la presión de estancamiento a través del combustor. Sobre un diagrama Ts para el proceso, muestre los estados estático y de estancamiento e indique la dirección del proceso.

*13.138 Mediante el empleo de coordenadas T/T^* y $(s - s^*)/c_p$, donde s^* es la entropía a $M = 1$, grafique la línea de Rayleigh para flujo de aire ($k = 1.4$) para $0.4 < M < 3.0$.

*13.139 Empezando con las condiciones de entrada del problema 13.76, y empleando las coordenadas T/T_{0_1} y $(s - s^*)/c_p$, grafique las ramas supersónica y subsónica de la línea de Rayleigh para el flujo.

13.140 Fluye aire establemente por un tubo redondo con $D = 50$ mm. El proceso no está especificado. Las condiciones en la sección (1) son $T_1 = 260$ K, $p_1 = 95.0$ kPa (abs) y $M_1 = 0.6$; en la sección (2) aguas abajo, $p_2 = 64.9$ kPa (abs) y $M_2 = 0.85$. Calcule el calor suministrado por unidad de masa, la fuerza de fricción ejercida por el gas sobre el tubo y el cambio en la entropía.

13.141 Se muestra un pequeño secador de pelo de mano con un elemento calefactor de 1200 W. Las pérdidas de calor cedidas a los alrededores son despreciables. La temperatura de entrada es 70 F; la temperatura de salida debe mantenerse por debajo de 140 F para evitar dañar el pelo. Ignore la fricción, pero suponga que el coeficiente de pérdida de entrada es $K_{ent} = 0.50$. Encuentre la relación de flujo volumétrico mínima de aire que debe proporcionarse. Estime el aumento de presión a través del ventilador (exprese su respuesta en pulgadas de agua).



P13.141

13.142 Un avión jet comercial vuela a $M = 0.85$ a una altura de 40 000 pies. El aire para el sistema de presurización de la cabina se toma del exterior a través de un ducto de entrada y se frena isentrópicamente a 100 pies/s respecto al avión. Luego entra a un compresor donde su presión se eleva adiabáticamente para brindar una presión de la cabina equivalente a 8000 pies de altitud. El aumento de la temperatura del aire a través del compresor es de 170 F. Finalmente, el aire se enfría a 70 F (en un intercambiador térmico con fricción despreciable) antes de agregarse al aire de la cabina. Dibuje un diagrama del sistema, marcando todas las componentes y numerando las secciones transversales apropiadas. Determine la temperatura y presión de estancamiento y estática en cada sección transversal. Dibuje a escala y marque un diagrama Ts que muestre los puntos de estado estático y de estancamiento y donde se señalen las trayectorias del proceso. Evalúe el trabajo añadido en el compresor y la energía rechazada en el intercambiador de calor.

13.143 En un esquema propuesto por un inventor para un motor de cohete, el aire y el hidrógeno se almacenarán en recipientes independientes a 293 K y 305 kPa (abs). Los gases fluirán separada e isentrópicamente en un ducto sin fricción de área constante, donde el hidrógeno será quemado con un pequeño porcentaje de aire. El número de Mach en la entrada del ducto es 0.3; a la salida del ducto, la temperatura de estancamiento es 559 K y la presión estática es 244 kPa (abs). Los gases —esencialmente aire caliente— fluyen después por una tobera convergente a la atmósfera. El área del ducto es 0.04 m^2 y el área de salida de la tobera es 0.0285 m^2. Bosqueje el ducto y la tobera y dibuje un diagrama Ts para el aire, donde se muestren todos los estados estático y de estancamiento. Calcule el empuje estático de este motor a nivel del mar. Bosqueje una forma de la tobera que

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

proporcionaría flujo libre de ondas de choque a nivel del mar y calcule el área de salida para esta nueva tobera, suponiendo que las condiciones aguas arriba de la entrada de la tobera son invariables.

13.144 Aire, con $T_{0_1} = 333$ K y $p_{0_1} = 600$ kPa (abs), se aproxima a una onda de choque normal a $M_1 = 2.0$. La velocidad aguas abajo de la onda de choque es $V_2 = 204$ m/s. Determine la presión estática aguas abajo de la onda de choque.

13.145 Una onda de choque normal permanece en un ducto de área constante. Se acerca aire a la onda de choque con $T_{0_1} = 1000$ R, $p_{0_1} = 100$ psia y $M_1 = 3.0$. El número de Mach aguas abajo de la onda es $M_2 = 0.475$. Determine la presión estática aguas abajo de la onda de choque.

13.146 Se aproxima aire a una onda de choque normal a $V_1 = 951$ m/s, con $T_{0_1} = 700$ K y $p_1 = 125$ kPa (abs); $M_1 = 3.0$. Aguas abajo de la onda de choque, $p_2 = 1.29$ MPa (abs). Determine la velocidad y la temperatura aguas abajo.

13.147 Una onda de choque normal se presenta en aire en una sección donde la velocidad de flujo es 924 m/s. En esta sección, $T_1 = 10$ C y $p_1 = 35.0$ kPa (abs). Aguas abajo de la onda de choque, $p_2 = 301$ kPa (abs). Determine la velocidad y el número de Mach aguas abajo de la onda de choque.

13.148 Una corriente de aire con $T_1 = 0$ C, $p_1 = 60.0$ kPa (abs) y $V_1 = 497$ m/s, experimenta una onda de choque normal. La temperatura aguas abajo de la onda de choque es 87 C. Determine el número de Mach, la velocidad y la presión de estancamiento aguas abajo de la onda de choque.

13.149 Aire experimenta una onda de choque normal. Aguas arriba, $T_1 = 35$ C, $p_1 = 229$ kPa y $V_1 = 704$ m/s. Aguas abajo de la onda de choque, $\rho_2 = 6.91$ kg/m^3. Determine la temperatura y la presión de estancamiento de la corriente de aire que abandona la onda de choque.

13.150 Una corriente de aire se acerca a una onda de choque normal a $M_1 = 2.64$. Aguas arriba, $p_{0_1} = 3.00$ MPa (abs) y $\rho_1 = 1.65$ kg/m^3. La razón entre la presión estática y la presión de estancamiento inmediatamente detrás de la onda de choque es 0.843. Determine el número de Mach y la temperatura aguas abajo.

13.151 Un avión supersónico vuela a $M = 2.2$ a 12 km de altura. Se usa un tubo de pitot para registrar la presión de estancamiento y calcular la velocidad del aire. Una onda de choque normal permanece en el frente del tubo de pitot; el número de Mach que sigue a la onda de choque es 0.547. Evalúe las condiciones locales de estancamiento isentrópico en el frente de la onda. Estime la presión registrada por el tubo de pitot. Muestre todos los puntos de estado estáticos y de estancamiento, así como la trayectoria del proceso, sobre un diagrama *Ts*.

13.152 Una onda de choque normal ocurre cuando se inserta un tubo de pitot estático dentro de un túnel de viento supersónico. Las presiones medidas por el tubo son $p_{0_2} = 68.1$ kPa (abs) y $p_2 = 54.8$ kPa (abs). Antes de la onda, $T_1 = 160$ K y $p_1 = 11.0$ kPa (abs). Calcule la velocidad del aire en el túnel de viento.

13.153 Una sonda de prueba de presión total se sitúa en un túnel de viento supersónico donde $T = 530$ R y $M = 2.0$. Una onda de choque normal permanece enfrente de la sonda. Detrás de la onda de choque, $M_2 = 0.577$ y $p_2 = 5.76$ psia. Encuentre *a*) la presión y temperatura de estancamiento aguas abajo y *b*) todas las propiedades del fluido aguas arriba de la onda. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento, así como el proceso, sobre un diagrama *Ts*.

13.154 Fluye aire establemente por una tubería aislada larga de área constante. En la sección ①, $M_1 = 2.0$, $T_1 = 140$ F y $p_1 = 35.9$ psia. En la sección ②, aguas abajo de una onda de choque normal, $V_2 = 1080$ pies/s. Determine la densidad y el número de Mach en la sección ②. Elabore un bosquejo cualitativo de la distribución de presión a lo largo de la tubería.

13.155 Se aproxima aire a una onda de choque normal a 0 C, 60 kPa (abs) y 497 m/s. La velocidad del aire inmediatamente aguas abajo de la onda es 267 m/s. Evalúe todas las propiedades de flujo aguas abajo de la onda y el cambio de entropía a través de la misma. Muestre los estados estático y de estancamiento, y la dirección del proceso, sobre un diagrama *Ts*.

13.156 Se aproxima aire a una onda de choque normal con $T_1 = 18$ C, $p_1 = 101$ kPa y $V_1 = 766$ m/s. La

temperatura inmediatamente aguas abajo de la onda es $T_2 = 551$ K. Determine la velocidad inmediatamente aguas abajo de la onda de choque y el cambio de presión a lo largo de la misma. Calcule el cambio de presión correspondiente para una desaceleración sin onda de choque y sin fricción entre las mismas velocidades.

13.157 Un túnel de viento supersónico se va a operar a $M = 2.2$ en la sección de prueba. Aguas arriba de la misma, el área de la garganta de la tobera es 0.07 m^2. El aire se suministra en condiciones de estancamiento de 500 K y 1.0 MPa (abs). En una condición de flujo, mientras se eleva la velocidad del túnel, permanece una onda de choque en el plano de salida de la tobera. El flujo es estable y la temperatura aguas abajo de la onda de choque es 472 K. Para esta condición de *arranque*, inmediatamente aguas abajo de la onda encuentre *a*) el número de Mach, *b*) la presión estática, *c*) la presión de estancamiento y *d*) el área mínima teóricamente posible para la segunda garganta aguas abajo de la sección de prueba. Sobre un diagrama *Ts*, muestre los puntos de estado estático y de estancamiento y la dirección del proceso.

13.158 Un avión supersónico vuela a $M_1 = 2.7$ a 20 km de altitud en un día con condiciones estándar. El aire entra al sistema de entrada del motor donde se frena isentrópicamente a $M_2 = 1.3$. En esta posición, ocurre una onda de choque normal. (Inmediatamente aguas abajo de la onda, $M_3 = 0.786$.) El flujo subsónico resultante se desacelera aún más a $M_4 = 0.40$. La difusión subsónica es adiabática pero no isentrópica; la presión final es 104 kPa (abs). Evalúe *a*) la temperatura de estancamiento para el flujo, *b*) el cambio de presión a través de la onda, *c*) el cambio en la entropía, $s_4 - s_1$, y *d*) la presión final de estancamiento. Muestre el proceso sobre un diagrama *Ts*, indicando todos los estados estáticos y de estancamiento.

13.159 Una onda de choque se propaga hacia afuera a partir de una explosión. A radios grandes, la curvatura es pequeña y la onda puede tratarse como una intensa onda de choque normal. (El aumento de presión y temperatura asociado con la onda de choque explosiva decrece lentamente conforme la onda viaja hacia afuera.) En un instante, el frente de la onda de choque explosiva viaja a $M = 1.60$ con respecto a aire no perturbado en condiciones estándar. La presión estática inmediatamente detrás de la onda es 286 kPa (abs). Encuentre *a*) la velocidad del aire detrás de la onda de choque explosiva con respecto a la onda y *b*) la velocidad del aire detrás de la onda de choque como lo ve un observador sobre el suelo. Dibuje un diagrama *Ts* para el proceso de acuerdo a como lo ve un observador sobre la onda, indicando los puntos de estado estático y de estancamiento y los valores de las propiedades.

13.160 Una corriente de aire, con $T_1 = 0$ C, $p_1 = 60.0$ kPa (abs) y $V_1 = 497$ m/s, experimenta una onda de choque normal. Determine el número de Mach, la velocidad y la presión de estancamiento aguas abajo de la onda.

***13.161** Aire, con $T_{0_1} = 333$ K y $p_{0_1} = 600$ kPa (abs) se acerca a una onda de choque normal a $M_1 = 2.0$. Determine la presión estática aguas abajo de la onda y la reducción en la presión de estancamiento a través de la onda.

***13.162** Se aproxima aire a una onda de choque normal a $V_1 = 951$ m/s, con $T_{0_1} = 700$ K y $p_1 = 125$ kPa (abs); $M_1 = 3.0$. Determine la velocidad y temperatura del aire que abandona la onda y el cambio de entropía a través de la misma.

***13.163** Una onda de choque normal permanece en un ducto de área constante. Se aproxima aire a la onda con $T_{0_1} = 1000$ R, $p_{0_1} = 100$ psia y $M_1 = 3.0$. Determine la presión estática aguas abajo de la onda. Compare la presión aguas abajo con la que se alcanza desacelerando isentrópicamente hasta el mismo número subsónico de Mach.

***13.164** Una masa de aire experimenta una onda de choque normal. Aguas arriba, $T_1 = 35$ C, $p_1 = 229$ kPa (abs) y $V_1 = 704$ m/s. Determine la temperatura y la presión de estancamiento de la corriente de aire que abandona la onda de choque.

***13.165** Una corriente de aire se aproxima a una onda de choque normal a $M_1 = 2.64$. Aguas arriba, $p_{0_1} =$

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

3.00 MPa (abs) y $\rho_1 = 1.65$ kg/m^3. Determine el número de Mach y la temperatura aguas abajo, y el cambio en la entropía a lo largo de la onda de choque.

***13.166** Una onda de choque normal ocurre en una sección de aire donde $V_1 = 924$ m/s, $T_1 = 10$ C y $p_1 = 35.0$ kPa (abs). Determine la velocidad y el número de Mach aguas abajo de la onda, y el cambio en la presión de estancamiento a lo largo de la onda.

***13.167** Se aproxima aire a una onda de choque normal con $T_1 = 18$ C, $p_1 = 101$ kPa (abs) y $V_1 = 766$ m/s. Determine la velocidad inmediatamente aguas abajo de la onda y el cambio de presión a lo largo de la onda. Calcule el cambio de presión correspondiente para una desaceleración sin onda de choque y sin fricción entre las mismas velocidades.

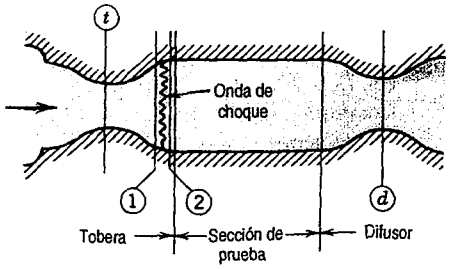
***13.168** Un avión supersónico vuela a $M = 2.2$ a 12 km de altura. Se usa un tubo de pitot para registrar la presión y calcular la velocidad del aire. Una onda de choque normal permanece frente al tubo. Evalúe las condiciones locales de estancamiento isentrópico en frente de la onda. Estime la presión de estancamiento registrada por el tubo de pitot. Muestre los puntos de estado estático y de estancamiento, y la trayectoria del proceso, sobre el diagrama *Ts*.

***13.169** Un avión supersónico vuela a $M = 2.7$ a 20 km de altura en un día con condiciones estándar. El aire que se aproxima a la cara delantera en donde hay un tubo de carga total (pitot), pasa por una onda de choque normal y luego es llevado isentrópicamente hasta el reposo respecto al avión. Determine la temperatura final del aire y la presión registrada por el tubo de carga total.

***13.170** Sondas de presión y temperatura de estancamiento se localizan en la nariz de un avión supersónico que se encuentra a 35 000 pies de altura. Una onda de choque normal permanece enfrente de las sondas. La temperatura de las sondas indica $T_0 = 420$ F detrás de la onda. Calcule el número de Mach y la velocidad del aire del avión. Encuentre las presiones estática y de estancamiento detrás de la onda de choque. Indique el proceso y los puntos de estado estático y de estancamiento en un diagrama *Ts*.

***13.171** El avión supersónico Concorde vuela a $M = 2.2$ a 20 km de altitud. El sistema de entrada del motor desacelera el aire isentrópicamente hasta un número de Mach local de 1.3. El aire pasa por una onda de choque normal y se desacelera aún más hasta $M = 0.4$ en la sección del compresor del motor. Suponga, como una primera aproximación, que este proceso de difusión subsónica es isentrópico y emplee datos de atmósfera estándar para las condiciones de la corriente libre. Determine la temperatura, la presión y la presión de estancamiento del aire que entra al compresor del motor.

***13.172** La parte subsónica del difusor de entrada descrito en el problema 13.171 tiene una eficiencia isentrópica de 0.97; el aumento de presión estática real es 97 por ciento del valor que podría obtenerse a partir de una desaceleración isentrópica entre las mismas velocidades inicial y final. Puede suponerse que la difusión supersónica será isentrópica. El flujo completo es adiabático. Determine la reducción total en la presión de estancamiento para el flujo de entrada y la presión estática de la corriente de aire que entra al compresor del motor a $M = 0.4$.



P13.173

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

*13.173 Considere el principio de un túnel de viento supersónico, como se muestra. El área de la garganta de la tobera es 1.25 pies^2, y el número de Mach de diseño de la sección de prueba es 2.50. Cuando el túnel arranca, una onda de choque normal permanece en la divergencia de la tobera donde el área es 3.05 pies^2. Las condiciones de estancamiento aguas arriba son T_0 = 1080 R y p_0 = 115 psia. Determine el área mínima posible de la garganta del difusor en este instante. Calcule el aumento de entropía a lo largo de la onda de choque.

*13.174 Un avión supersónico vuela a M = 2.7 a 60 000 pies de altura. Una onda de choque normal permanece enfrente de un tubo de pitot sobre la aeronave; el tubo registra una presión de estancamiento de 10.4 psia. Calcule la presión estática y la temperatura detrás de la onda de choque. Evalúe la pérdida en la presión de estancamiento a lo largo de la onda. Determine el cambio en la entropía específica a través de la onda. Muestre los estados estático y de estancamiento y la trayectoria del proceso en un diagrama Ts.

*13.175 Un avión vuela supersónicamente a 10 km de altitud en un día con condiciones estándar. La verdadera velocidad del aire del avión es 659 m/s. Calcule el número de Mach de vuelo del avión. Un tubo de carga total unido a la aeronave se usa para registrar la presión de estancamiento que una computadora a bordo convierte al número de Mach de vuelo. Sin embargo, el programador de la computadora ha ignorado la onda de choque normal que permanece frente al tubo de carga total y ha supuesto flujo isentrópico. Evalúe la presión registrada por el tubo de carga total. Determine la velocidad del aire errónea, calculada por el programa de computadora.

*13.176 Un avión supersónico vuela a 22 km de altitud en un día con condiciones estándar. El tubo de estancamiento con la cara hacia adelante registra una presión total de 55.3 kPa (abs). Determine el número de Mach y la velocidad del avión.

*13.177 Una sonda de presión total se emplea para medir la velocidad de un flujo de aire supersónico. Una onda de choque normal permanece enfrente del tubo. Las condiciones de flujo aguas arriba son T_1 = 40 F y p_1 = 4.15 psia. Aguas abajo de la onda, p_{0_2} = 22.6 psia. Calcule la velocidad del aire que se aproxima a la onda de choque.

*13.178 Fluye aire establemente a través de una larga tubería aislada de 2 pulg de diámetro. En la sección ①, M_1 = 2.0, T_1 = 140 F y p_1 = 35.9 psia. Una onda de choque normal ocurre en la sección ② donde M_2 = 1.88. En la sección ④, a cierta distancia aguas abajo de la onda de choque, la velocidad es 1080 pies/s. Determine las propiedades de flujo en las secciones ② y ③, inmediatamente aguas arriba y aguas abajo de la onda, y el número de Mach y la presión en la sección ④. Determine la longitud de la tubería y grafique la distribución de presión a lo largo de la misma.

13.179 Fluye aire por una tobera convergente-divergente diseñada para producir un número de Mach de salida M = 2.80. Las condiciones de estancamiento aguas arriba son atmosféricas; la contrapresión se mantiene por medio de una bomba de vacío. Determine la contrapresión requerida para provocar una onda de choque normal que permanezca en el plano de salida y la velocidad del flujo después de la onda de choque. (La razón de presiones estáticas a través de una onda de choque normal que ocurre a M = 2.80 es 8.98.)

13.180 Una onda de choque normal ocurre en la sección divergente de una tobera convergente-divergente donde A = 4.0 pulg^2 y M = 2.00. (El número de Mach inmediatamente aguas abajo de la onda es 0.577.) Aguas arriba, T_{0_1} = 1000 R y p_{0_1} = 100 psia. El área de salida de la tobera es 6.0 pulg^2 y la temperatura de salida es 977 R. Suponga que el flujo es isentrópico excepto a través de la onda. Encuentre la presión de salida de la tobera. Muestre el proceso en un diagrama Ts e indique los puntos de estado estático y de estancamiento.

13.181 Un difusor supersónico para un avión se diseña de modo que opere con una velocidad de vuelo de M = 3.0 y área de entrada de 3.0 m^2 a 30 km de altitud. Se presenta una onda de choque normal aguas abajo de la garganta del difusor en una sección donde el número de Mach es 1.4. (El número de Mach inmediatamente detrás de la onda de choque es 0.740.) El número de Mach final saliendo

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

del difusor será 0.4. Dibuje la forma del conducto requerido. Calcule T_0, T, p_0 y p en la entrada, la garganta, antes y después de la onda de choque y en la salida del difusor, suponiendo que todos los procesos son isentrópicos excepto a través de la onda. Muestre las trayectorias del proceso y los estados estático y de estancamiento en un diagrama *Ts*.

13.182 Un difusor supersónico para un avión se diseña con el fin de que opere con una velocidad de vuelo de $M = 2.2$ y área de entrada de 1.5 m^2 a 20 km de altitud. Una onda de choque normal ocurre aguas abajo de la garganta del difusor en una sección donde el número de Mach es 1.3. (El número de Mach inmediatamente detrás de la onda de choque es 0.786.) El número de Mach final saliendo del difusor será 0.3. Dibuje la forma del conducto que se requiere. Calcule T_0, T, p_0 y p en la entrada, la garganta, antes y después de la onda de choque y en la salida del difusor, suponiendo que todos los procesos son isentrópicos excepto a través de la onda. Muestre las trayectorias del proceso y los estados estático y de estancamiento en un diagrama *Ts*.

13.183 Un misil impulsado por medio de un motor de autorreactor volará a $M = 3.5$ y 30 km de altitud. El aire puede desacelerarse isentrópicamente a $M = 1.4$ en el sistema de entrada antes de que ocurra una onda de choque normal. Calcule el aumento de presión que teóricamente podría obtenerse en este proceso. Si la eficiencia del proceso de difusión es en realidad de 85 por ciento, calcule la pérdida en la presión de estancamiento en el proceso. (La eficiencia de un difusor se define como $\eta = \Delta h(\text{isentrópico})/\Delta h(\text{real})$ entre los mismos niveles de presión.) Muestre los estados estático y de estancamiento para los procesos teórico y real, en un diagrama *Ts*.

13.184 Fluye aire adiabáticamente desde un depósito, donde $T_{0_1} = 60$ C y $p_{0_1} = 600$ kPa (abs), por una tobera convergente-divergente. El número de Mach de diseño de la tobera es 2.94. Una onda de choque normal ocurre en la posición en la tobera donde $M = 2.42$. (El número de Mach inmediatamente detrás de la onda de choque es $M = 0.521$.) Suponiendo flujo isentrópico antes y después de la onda, determine la contrapresión aguas abajo de la tobera, si la temperatura ahí es de 54.6 C. Dibuje la distribución de presión.

13.185 Una onda de choque normal ocurre en la sección divergente de una tobera convergente-divergente donde $A = 4.0$ pulg^2 y $M = 2.50$. (El número de Mach inmediatamente aguas abajo de la onda es 0.513.) Las condiciones de estancamiento para el flujo aguas arriba son $T_0 = 1000$ R y $p_0 = 100$ psia. El área de salida de la tobera es 6.0 pulg^2 y la temperatura de salida es 981 R. Suponga que el flujo es isentrópico excepto a través de la onda. Determine la presión de salida de la tobera, el área de la garganta y la relación de flujo másico.

13.186 Una tobera convergente-divergente se diseña para expandir aire isentrópicamente a presión atmosférica desde un gran tanque donde $T_{0_1} = 150$ C y $p_{0_1} = 790$ kPa (abs). Una onda de choque normal permanece en la sección divergente en una posición donde $p_{0_2} = 160$ kPa (abs) y $A = 600$ mm^2. El número de Mach inmediatamente detrás de la onda de choque es 0.641. Determine la contrapresión de la tobera, el área de salida y el área de la garganta.

13.187 Considere el flujo de aire por una tobera convergente-divergente. Bosqueje el comportamiento aproximado de la relación de flujo másico contra la razón de contrapresiones, p_b/p_0. Dibuje la variación de la presión con respecto a la distancia a lo largo de la tobera, y el diagrama *Ts* para el flujo de la tobera, cuando la contrapresión es p^*.

13.188 Debido a la fricción, el desempeño real de una tobera difiere un poco del calculado utilizando relaciones de flujo isentrópicas. En ambos casos, es razonable considerar el flujo adiabático. La *eficiencia de la tobera*, η, se define como la razón entre la energía cinética real de salida y la energía cinética de salida que se obtendría en una tobera sin fricción que expandiera el gas a la misma presión final. Deduzca una expresión para la eficiencia de la tobera en términos de la temperatura de estancamiento y las temperaturas real e ideal en el plano de salida de la tobera. Suponga en ambos casos que el flujo dentro de la garganta de la tobera es isentrópico y que el flujo de salida es supersónico. Considere una tobera diseñada para producir $M_e = 2.2$ para flujo isentrópico de aire. Evalúe el número de Mach real del plano de salida para $0.8 < \eta < 1.0$.

***13.189** Fluye aire por una tobera convergente-divergente con $A_e/A_t = 3.5$. Las condiciones de estancamiento aguas arriba son las atmosféricas; la contrapresión se mantiene por medio de una bomba de vacío. Determine la contrapresión requerida para provocar una onda de choque normal que permanezca en el plano de salida de la tobera, y la velocidad del flujo que sale de la tobera.

***13.190** Una tobera convergente-divergente expande aire de 250 F y 50.5 psia a 14.7 psia. Las áreas de la garganta y del plano de salida son 0.801 y 0.917 pulg^2, respectivamente. Calcule el número de salida de Mach. Evalúe la relación de flujo másico a través de la tobera.

***13.191** Se une una tobera convergente-divergente a un gran tanque de aire, en el cual $T_{0_1} = 300$ K y $p_{0_1} = 250$ kPa (abs). En la garganta de la tobera (sección de área mínima), la presión es 132 kPa (abs). En la sección divergente, la presión cae a 68.1 kPa antes de aumentar abruptamente a través de una onda de choque normal. A la salida de la tobera, la presión es 180 kPa. Encuentre el número de Mach inmediatamente detrás de la onda. Determine la presión inmediatamente aguas abajo de la onda. Calcule el cambio en la entropía a través de la onda. Dibuje el diagrama *Ts* para este flujo, indicando los puntos de estado estático y de estancamiento para las condiciones en la garganta de la tobera, a ambos lados de la onda de choque y en el plano de salida.

***13.192** Una tobera convergente-divergente, con área de salida $A_t = 1.0$ pulg^2, se une a un gran tanque en el cual la presión y la temperatura se mantienen a 100 psia y 600 R. El área de salida de la tobera es 1.58 pulg^2. Determine el número de Mach de salida en las condiciones de diseño. Con referencia a la figura 13.20, determine las contrapresiones correspondientes a las fronteras de los regímenes I, II, III y IV. Trace la gráfica correspondiente para esta tobera.

***13.193** Una tobera convergente-divergente, con $A_e/A_t = 4.0$, se diseña para expandir aire isentrópicamente a presión atmosférica. Determine el número de salida de Mach a las condiciones de diseño y la presión de estancamiento de entrada requerida. Con referencia a la figura 13.20, determine las contrapresiones que correspondan a las fronteras de los regímenes I, II, III y IV. Dibuje la gráfica de la razón de presiones contra la distancia axial, para esta tobera.

***13.194** Fluye aire adiabáticamente desde un depósito, donde $T = 60$ C y $p = 600$ kPa (abs), a través de una tobera convergente-divergente con $A_e/A_t = 4.0$. Una onda de choque normal ocurre donde $M = 2.42$. Suponiendo flujo isentrópico antes y después de la onda de choque, determine la contrapresión aguas abajo de la tobera. Dibuje la distribución de presión.

***13.195** Una onda de choque normal ocurre en la sección divergente de una tobera convergente-divergente donde $A = 4.0$ pulg^2 y $M = 2.50$. Aguas arriba, $T_0 = 1000$ R y $p_0 = 100$ psia. El área de salida de la tobera es 6.0 pulg^2. Suponga que el flujo es isentrópico excepto a través de la onda de choque. Determine la presión de salida de la tobera, el área de la garganta y la relación de flujo másico.

***13.196** Una tobera convergente-divergente se diseña para expandir aire isentrópicamente a la presión atmosférica desde un gran tanque, donde $T_0 = 150$ C y $p_0 = 790$ kPa (abs). Una onda de choque normal permanece en la sección divergente, donde $p = 160$ kPa (abs) y $A = 600$ mm^2. Determine la contrapresión de la tobera, el área de la salida y el área de la garganta.

***13.197** Una tobera convergente-divergente, con razón de presiones de diseño $p_e/p_0 = 0.128$, se opera con una condición de contrapresión tal que $p_b/p_0 = 0.830$, provocando que una onda de choque normal permanezca en la sección divergente. Determine el número de Mach al cual ocurre la onda de choque.

***13.198** Fluye aire por una tobera convergente-divergente, con $A_e/A_t = 3.5$. Las condiciones de estancamiento aguas arriba son las atmosféricas; la contrapresión se mantiene por medio de un sistema de vacío. Determine el rango de contrapresiones dentro del cual ocurrirá una onda de choque normal en la tobera, y la correspondiente relación de flujo másico, si $A_t = 500$ mm^2.

***13.199** Fluye aire por una tobera convergente-divergente, con $A_e/A_t = 1.87$. Aguas arriba, $T_{0_1} = 240$ F y $p_{0_1} = 100$ psia. La contrapresión se mantiene a 40 psia. Determine el número de Mach y la velocidad de flujo en el plano de salida de la tobera.

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

***13.200** Una tobera convergente-divergente, con $A_e/A_t = 1.633$, se diseña para operar con la presión atmosférica en el plano de salida. Determine el (los) rango(s) de presiones de estancamiento para los cuales la tobera estará libre de ondas de choque normales.

***13.201** Una onda de choque normal permanece en una sección de un ducto aislado de área constante. El flujo es friccionante. En la sección ①, a cierta distancia aguas arriba de la onda de choque, $T_1 = 470$ R. En la sección ④, a cierta distancia aguas abajo de la onda de choque, $T_4 = 750$ R y $M_4 = 1.0$. Denote las condiciones inmediatamente aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque mediante los subíndices ② y ③, respectivamente. Dibuje la distribución de presión a lo largo del ducto, indicando claramente las posiciones de las secciones ① a la ④. Trace un diagrama Ts para el flujo. Determine el número de Mach en la sección ①.

***13.202** Una onda de choque normal permanece en una sección de un ducto aislado de área constante. En la sección ①, a cierta distancia aguas arriba de la onda de choque, $T_1 = 668$ R, $p_{0_1} = 78.2$ psia y $M_1 = 2.05$. En la sección ④, a cierta distancia aguas abajo de la onda de choque, $M_4 = 1.00$. Calcule la velocidad del aire, V_2, inmediatamente adelante de la onda de choque, donde $T_2 = 388$ F. Evalúe el cambio en la entropía, $s_4 - s_1$.

* Los problemas marcados con un asterisco están diseñados para resolverse empleando tablas.

perar con la presión
le estancamiento para

de área constante. El
onda de choque, T_1 =
, T_4 = 750 R y M_4 =
le la onda de choque
presión a lo largo del
e un diagrama Ts para

de área constante. En
58 R, p_{0_1} = 78.2 psia y
ue, M_4 = 1.00. Calcule
de T_2 = 388 F. Evalúe

Apéndice A

Datos de propiedades de fluidos

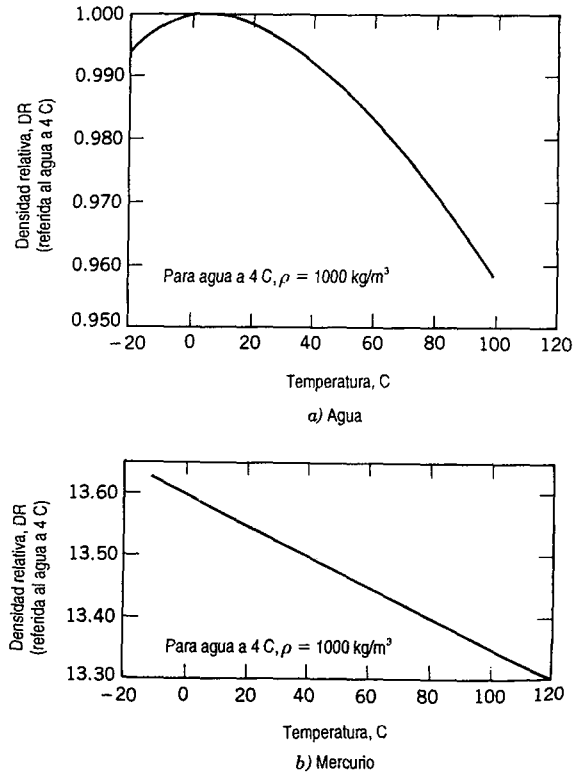


Fig. A.1 Densidad relativa del agua y el mercurio como una función de la temperatura. (Datos de [1].)
(La densidad relativa del mercurio varía linealmente con la temperatura. La variación está dada por DR = 13.60 − 0.00240T, cuando T se mide en grados centígrados.)

Tabla A.1 Densidades relativas de materiales de ingeniería seleccionados

(a) Líquidos manométricos comunes a 20 C (Datos de [1, 2, 3].)

Líquido	Densidad relativa[a]
Aceite azul de E. V. Hill	0.797
Aceite rojo Meriam	0.827
Benceno	0.879
Ftalato de dibutilo	1.04
Monocloronaftaleno	1.20
Tetracloruro de carbono	1.595
Bromoetilbenceno (azul Meriam)	1.75
Tetrabromoetano	2.95
Mercurio	13.55

[a] Densidad relativa, DR $\equiv \rho/\rho_{H_2O}$ (a 4 C); ρ_{H_2O} (a 4 C) = 1000 kg/m^3 (1.94 slug/pie^3).

(b) Materiales comunes (Datos de [4].)

Material	Densidad relativa (−)
Aluminio	2.64
Madera de balsa	0.14
Latón	8.55
Hierro fundido	7.08
Concreto (curado)	2.4*
Concreto (líquido)	2.5*
Cobre	8.91
Hielo (0 C)	0.917
Plomo	11.4
Roble	0.77
Acero	7.83
Styrofoam (1 pcf**)	0.0160
Styrofoam (3 pcf)	0.0481
Uranio (reducido)	18.7
Pino blanco	0.43

* dependiendo del agregado
** libras por pie cúbico

Tabla A.2 Propiedades físicas de líquidos comunes a 20 C (Datos de [1, 5, 6].)

Líquido	Módulo volumétrico isentrópico [a] (GN/m²)	Densidad relativa (−)
Benceno	1.48	0.879
Tetracloruro de carbono	1.36	1.595
Aceite de ricino	2.11	0.969
Petróleo crudo	—	0.82-0.92
Gasolina	—	0.72
Glicerina	4.59	1.26
Heptano	0.886	0.684
Keroseno	1.43	0.82
Aceite lubricante	1.44	0.88
Mercurio	28.5	13.55
Octano	0.963	0.702
Agua de mar [b]	2.42	1.025
Aceite SAE 10W	—	0.92
Agua	2.24	0.998

[a] Calculado a partir de la velocidad del sonido; 1 GN/m² = 10^9 N/m² (1 N/m² = 1.45 × 10^{-4} lbf/pulg²).

[b] La viscosidad dinámica del agua de mar a 20 C es $\mu = 1.08 \times 10^{-3}$ N · s/m².

Tabla A.3 Propiedades de la atmósfera estándar de los EU (Datos de [7].)

Altitud geométrica (m)	Temperatura (K)	p/p_{SL} (−)	ρ/ρ_{SL} (−)
−500	291.4	1.061	1.049
0	288.2	1.000[a]	1.000[b]
500	284.9	0.9421	0.9529
1000	281.7	0.8870	0.9075
1500	278.4	0.8345	0.8638
2000	275.2	0.7846	0.8217
2500	271.9	0.7372	0.7812
3000	268.7	0.6920	0.7423
3500	265.4	0.6492	0.7048
4000	262.2	0.6085	0.6689
4500	258.9	0.5700	0.6343
5000	255.7	0.5334	0.6012
6000	249.2	0.4660	0.5389
7000	242.7	0.4057	0.4817
8000	236.2	0.3519	0.4292
9000	229.7	0.3040	0.3813
10 000	223.3	0.2615	0.3376
11 000	216.8	0.2240	0.2978
12 000	216.7	0.1915	0.2546
13 000	216.7	0.1636	0.2176
14 000	216.7	0.1399	0.1860
15 000	216.7	0.1195	0.1590
16 000	216.7	0.1022	0.1359
17 000	316.7	0.08734	0.1162
18 000	216.7	0.07466	0.09930
19 000	216.7	0.06383	0.08489
20 000	216.7	0.05457	0.07258
22 000	218.6	0.03995	0.05266
24 000	220.6	0.02933	0.03832
26 000	222.5	0.02160	0.02797
28 000	224.5	0.01595	0.02047
30 000	226.5	0.01181	0.01503
40 000	250.4	0.002834	0.003262
50 000	270.7	0.0007874	0.0008383
60 000	255.8	0.0002217	0.0002497
70 000	219.7	0.00005448	0.00007146
80 000	180.7	0.00001023	0.00001632
90 000	180.7	0.000001622	0.000002588

[a] $p_{SL} = 1.01325 \times 10^5$ N/m^2 abs (= 14.696 psia)
[b] $\rho_{SL} = 1.2250$ kg/m^3 (= 0.002377 slug/pie^3)

.)

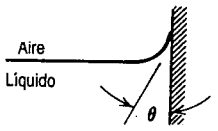
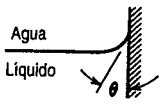
ρ/ρ_{SL} (−)
1.049
1.000[b]
0.9529
0.9075
0.8638
0.8217
0.7812
0.7423
0.7048
0.6689
0.6343
0.6012
0.5389
0.4817
0.4292
0.3813
0.3376
0.2978
0.2546
0.2176
0.1860
0.1590
0.1359
0.1162
0.09930
0.08489
0.07258
0.05266
0.03832
0.02797
0.02047
0.01503
0.003262
0.0008383
0.0002497
0.00007146
0.00001632
0.000002588

A-1 TENSIÓN SUPERFICIAL

Los valores de la tensión superficial, σ, para la mayor parte de los compuestos orgánicos son remarcablemente similares a temperatura ambiente; el intervalo típico es de 25 a 40 mN/m. El del agua es más alto, aproximadamente de 73 mN/m a 20 C. Los metales líquidos tienen valores en el rango comprendido entre 300 y 600 mN/m; el mercurio líquido tiene un valor cercano a 480 mN/m a 20 C. La tensión superficial disminuye con la temperatura; la reducción es casi lineal con la temperatura absoluta. La tensión superficial a la temperatura crítica es cero.

Suelen reportarse valores de σ para superficies en contacto con el vapor puro del líquido que está estudiándose, o con aire. A bajas presiones, ambos valores son casi los mismos.

Tabla A.4 Tensión superficial de líquidos comunes a 20 C (Datos de [1, 5, 8, 9].)

Líquido	Tensión superficial, σ (mN/m)[a]	Ángulo de contacto, θ (grados)
(a) En contacto con aire		
Benceno	28.9	
Tetracloruro de carbono	27.0	
Glicerina	63.0	
Hexano	18.4	
Keroseno	26.8	
Aceite lubricante	25-35	
Mercurio	484	140
Metanol	22.6	
Octano	21.8	
Agua	72.8	~ 0
(b) En contacto con agua		
Benceno	35.0	
Tetracloruro de carbono	45.0	
Hexano	51.1	
Mercurio	375	140
Metanol	22.7	
Octano	50.8	

[a] 1 mN/m = 10^{-3} N/m.

A-2 LA NATURALEZA FÍSICA DE LA VISCOSIDAD

La viscosidad es una medida de la fricción interna del fluido, esto es, la resistencia a la deformación. El mecanismo de la viscosidad en gases se entiende razonablemente bien, pero la teoría se ha desarrollado muy poco para los líquidos. Podemos obtener mayor información acerca de la naturaleza física del flujo viscoso analizando estos mecanismos brevemente.

La viscosidad de un fluido newtoniano está determinada por el estado del material. De tal modo, $\mu = \mu(T, p)$. La temperatura es la variable más importante, por lo que la consideraremos primero. Se disponen de excelentes ecuaciones empíricas para la viscosidad como una función de la temperatura.

A-2.1 Efecto de la temperatura en la viscosidad

a. Gases

Todas las moléculas de un gas están en continuo movimiento aleatorio. Cuando hay un movimiento en bloque debido al flujo, dicho movimiento se superpone a los movimientos aleatorios y luego se distribuye por todo el fluido mediante colisiones moleculares. Los análisis basados en la teoría cinética predicen que

$$\mu \propto \sqrt{T}$$

La predicción de la teoría cinética concuerda perfectamente con las tendencias experimentales, aunque debe determinarse la constante de proporcionalidad y uno o más factores de corrección; esto limita la aplicación práctica de esta sencilla ecuación.

Si se dispone de dos o más puntos experimentales, los datos deben correlacionarse mediante la correlación empírica de Sutherland

$$\mu = \frac{bT^{1/2}}{1 + S/T} \tag{A.1}$$

Las constantes b y S pueden determinarse de manera más simple escribiendo

$$\mu = \frac{bT^{3/2}}{S + T}$$

o

$$\frac{T^{3/2}}{\mu} = \left(\frac{1}{b}\right)T + \frac{S}{b}$$

(Compare esta expresión con $y = mx + c$.) De una gráfica de $T^{3/2}/\mu$ contra T, obtenemos la pendiente, $1/b$, y la ordenada al origen, S/b. Para el aire,

$$b = 1.458 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s K}^{1/2}}$$

$$S = 110.4 \text{ K}$$

Viscosidad absoluta, N · s/m²

Fig

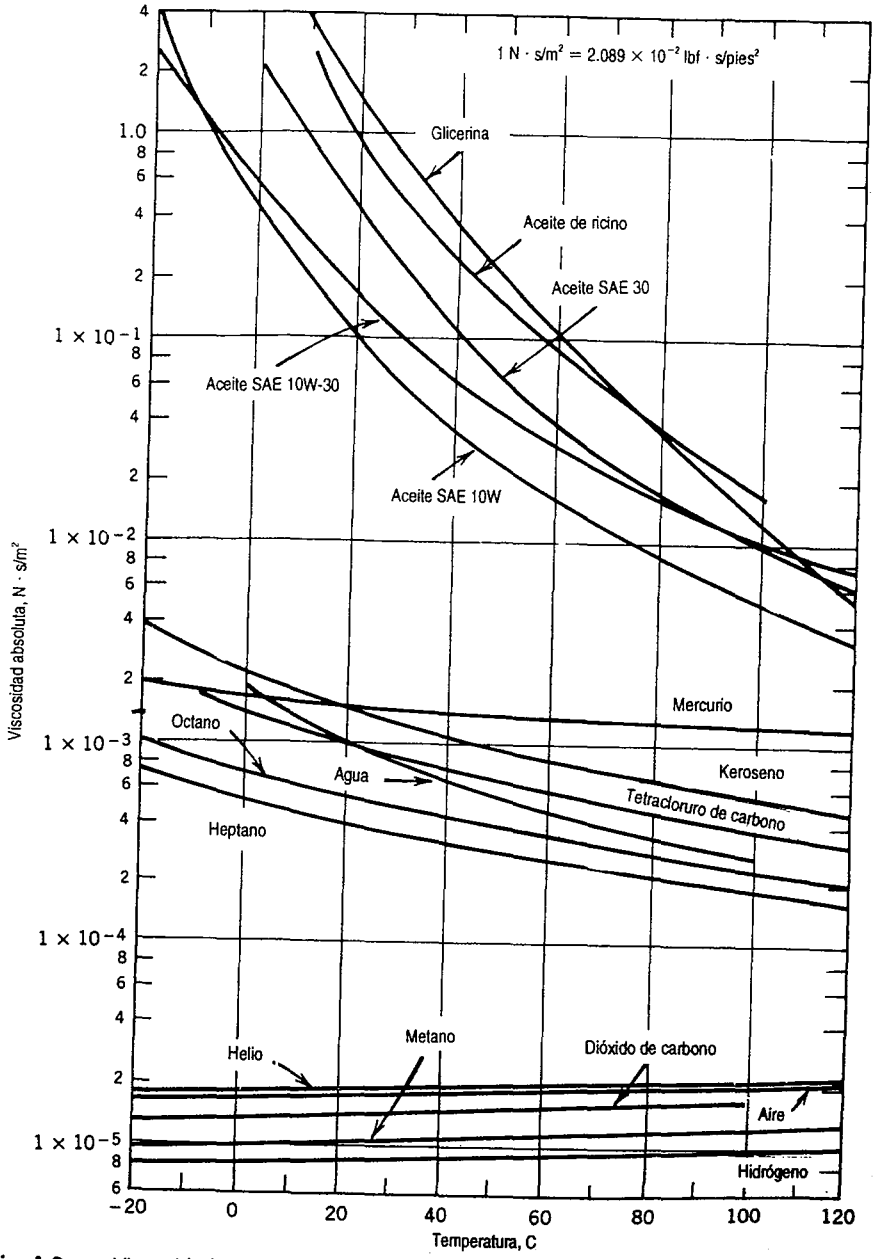


Fig. A.2 Viscosidad dinámica (absoluta) de fluidos comunes como una función de la temperatura. (Datos de [1, 6 y 10].)

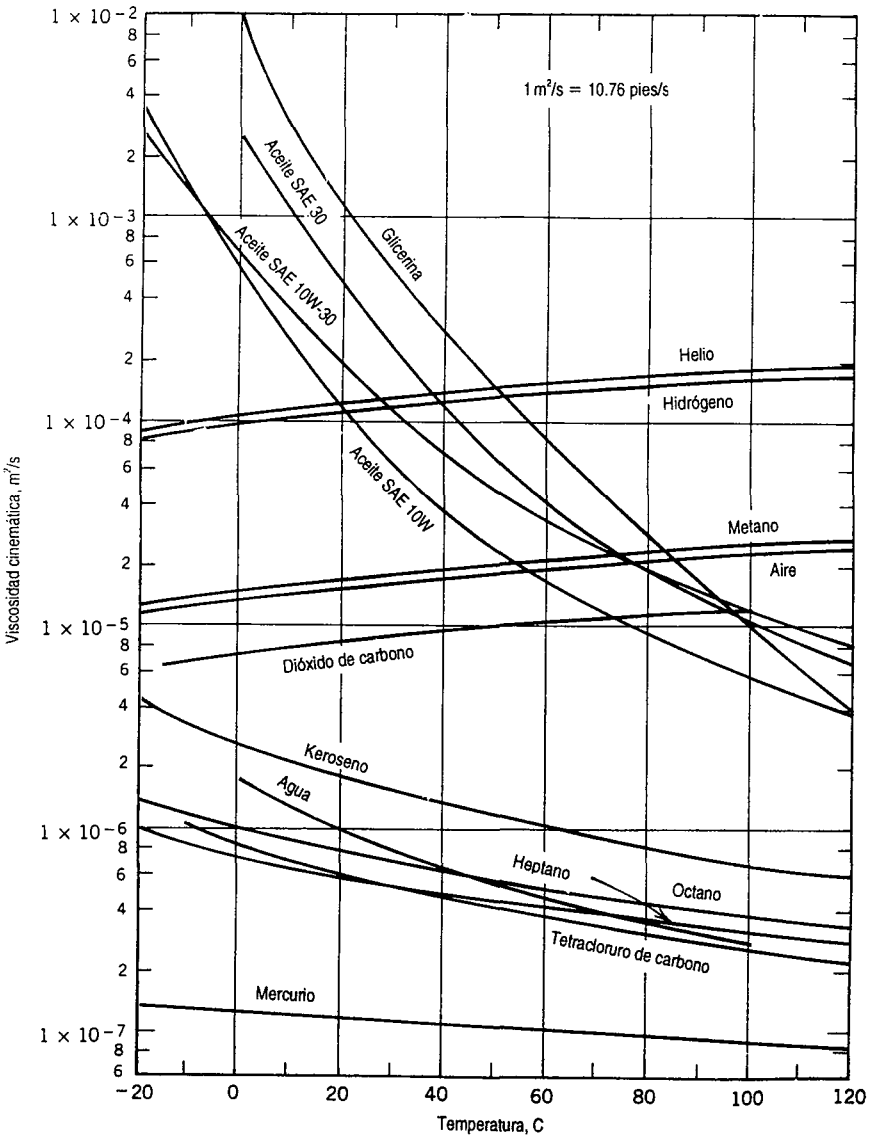


Fig. A.3 Viscosidad cinemática de fluidos comunes (a presión atmosférica) como una función de la temperatura. (Datos de [1, 6 y 10].)

Estas constantes se emplearon con la ecuación $A.1$ para calcular viscosidades para la atmósfera estándar en [7].

b. Líquido

No es posible estimar teóricamente las viscosidades para líquidos con exactitud. El fenómeno de la transferencia de momento por medio de colisiones moleculares parece oscurecerse en líquidos por los efectos de los campos de fuerza que interactúan entre las moléculas líquidas apiñadas y muy cercanas unas de otras.

Las viscosidades de líquidos son afectadas drásticamente por la temperatura. Esta dependencia en la temperatura absoluta se representa bien mediante la ecuación empírica

$$\mu = Ae^{B/T} \tag{A.2}$$

La ecuación $A.2$ requiere dos puntos para ajustar A y B. Esto puede hacerse fácilmente graficando $\log \mu$ contra $1/T$ en la forma

$$\log\ \mu = \log\ A + \frac{B}{T}\log\ e = \log\ A + \frac{0.434\,B}{T}$$

Log A es la ordenada al origen, y $0.434B$ es la pendiente de la gráfica resultante.

Advierta que la viscosidad de un líquido disminuye con la temperatura, en tanto que la de un gas aumenta con ella.

A-2.2 Efecto de la presión en la viscosidad

a. Gases

La viscosidad de los gases es esencialmente independiente de la presión entre unos cuantos centésimos de una atmósfera y unas cuantas atmósferas. Sin embargo, la viscosidad a altas presiones aumenta con la presión (o densidad).

b. Líquidos

Las viscosidades de la mayoría de los líquidos no son afectadas por presiones moderadas, pero se han encontrado grandes incrementos a presiones sumamente elevadas. Por ejemplo, la viscosidad del agua a 10 000 atm es el doble que a 1 atm. Compuestos de mayor complejidad muestran un aumento en la viscosidad de varios órdenes de magnitud sobre el mismo intervalo de temperatura.

Puede encontrarse mayor información en [11].

A-3 ACEITES LUBRICANTES

Los aceites lubricantes de motor y transmisión se clasifican por la viscosidad de acuerdo con estándares establecidos por la Society of Automotive Engineers (SAE) [12] de los Estados Unidos. Los intervalos de viscosidad permisibles para diversos grados se presentan en la tabla A.5, página 846.

Tabla A.5 Intervalos de viscosidad permisibles para las clasificaciones de lubricantes de la SAE. (Datos de [12].)

Tipo de lubricante	Número de viscosidad SAE	Intervalo de viscosidad (centistokes)[a]			
		A 0 F		A 210 F	
		Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
Carter del cigüeñal	5 W		1300	3.9	
	10 W	1300	2600	3.9	
	20 W	2600	10 500	3.9	
	20			5.7	9.6
	30			9.6	12.9
	40			12.9	16.8
	50			16.8	22.7
Transmisión y eje	75		15 000		
	80	15 000	100 000		
	90			75	120
	140			120	200
	250			200	
Fluido de transmisión automática	Tipo A	39[b]	43[b]	7	8.5

[a] centistoke = 1 cSt = 10^{-6} m^2/s (= 1.08×10^{-5} $pies^2/s$).
[b] A 100 F.

Las números de viscosidad con W (por ejemplo, 20W) se clasifican mediante la viscosidad a 0 F. Aquellos sin W se clasifican a partir de la viscosidad a 210 F.

Los aceites multigrado (por ejemplo, 10W-40) se formulan para minimizar la variación de la viscosidad con la temperatura. Se emplean mejoradores del "índice de viscosidad" de alto polímero para mezclar estos aceites multigrado. Tales aditivos son altamente no newtonianos; pueden sufrir una pérdida permanente de viscosidad debido al deslizamiento.

Se disponen gráficas especiales utilizadas para estimar la viscosidad de productos petroleros como una función de la temperatura. En las figuras A.2 y A.3, se emplearon gráficas para desarrollar los datos correspondientes a los aceites lubricantes típicos. Para mayores detalles, véase [13].

es de la SAE. (Datos

(centistokes)[a]	
A 210 F	
Mínimo	Máximo
3.9	
3.9	
3.9	
5.7	9.6
9.6	12.9
12.9	16.8
16.8	22.7
75	120
120	200
200	
7	8.5

diante la viscosidad a

izar la variación de la
viscosidad" de alto
ente no newtonianos;
o.
productos petroleros
plearon gráficas para
ayores detalles, véase

Tabla A.6 Propiedades termodinámicas de gases comunes a TPE[a] (Datos de [7, 14, 15].)

Gas	Símbolo químico	Masa molecular, M_m	R^b $\left(\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right)$	c_p $\left(\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right)$	c_v $\left(\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right)$	$k = \frac{c_p}{c_v}$ (—)	R^b $\left(\frac{\text{pies}\cdot\text{lbf}}{\text{lbm}\cdot\text{R}}\right)$	c_p $\left(\frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot\text{R}}\right)$	c_v $\left(\frac{\text{Btu}}{\text{lbm}\cdot\text{R}}\right)$
Aire	—	28.98	286.9	1004	717.4	1.40	53.33	0.2399	0.1713
Dióxido de carbono	CO_2	44.01	188.9	840.4	651.4	1.29	35.11	0.2007	0.1556
Monóxido de carbono	CO	28.01	296.8	1039	742.1	1.40	55.17	0.2481	0.1772
Helio	He	4.003	2077	5225	3147	1.66	386.1	1.248	0.7517
Hidrógeno	H_2	2.016	4124	14 180	10 060	1.41	766.5	3.388	2.402
Metano	CH_4	16.04	518.3	2190	1672	1.31	96.32	0.5231	0.3993
Nitrógeno	N_2	28.01	296.8	1039	742.0	1.40	55.16	0.2481	0.1772
Oxígeno	O_2	32.00	259.8	909.4	649.6	1.40	48.29	0.2172	0.1551
Vapor[c]	H_2O	18.02	461.4	~ 2000	~ 1540	~ 1.30	85.78	~ 0.478	~ 0.368

[a] TPE = temperatura y presión estándar, T = 15 C (59 F) y p = 101.325 kPa abs (14.696 psia).
[b] $R \equiv R_u/M_m$; R_u = 8314.3 J/kgmol · K (1545.3 pies · lbf/lbmol · R); 1 Btu = 778.2 pies · lbf.
[c] El vapor de agua se comporta como un gas ideal cuando se sobrecalienta por 55 C (100 F) o más.

REFERENCIAS

1. *Handbook of Chemistry and Physics*, 62a. ed. Cleveland, OH: Chemical Rubber Publishing Co., 1981-1982.
2. "Meriam Standard Indicating Fluids," Pamphlet No. 920GEN: 430-1, The Meriam Instrument Co., 10920 Madison Avenue, Cleveland, OH 44102.
3. E. Vernon Hill, Inc., P.O. Box 7053, Corte Madera, CA 94925.
4. Avallone, E. A., y T. Baumeister, III, eds., *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers*, 9a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1987.
5. *Handbook of Tables for Applied Engineering Science*. Cleveland, OH: Chemical Rubber Publishing Co., 1970.
6. Vargaftik, N. B., *Tables on the Thermophysical Properties of Liquids and Gases*, 2a. ed. Washington, D.C.: Hemisphere Publishing Corp., 1975.
7. *The U.S. Standard Atmosphere (1962)*. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1962.
8. Trefethen, L., "Surface Tension in Fluid Mechanics," in *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*. Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1972.
9. Streeter, V. L., ed., *Handbook of Fluid Dynamics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1961.
10. Touloukian, Y. S., S. C., Saxena, y P. Hestermans, *Thermophysical Properties of Matter, the TPRC Data Series, Vol. 11-Viscosity*. Nueva York: Plenum Publishing Corp., 1975.
11. Reid, R. C., y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1966.
12. "Crankcase Oil Viscosity Classification, Recommended Practice SAE J300b", *SAE Handbook*, 1976 ed. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1976.
13. ASTM Standard D 341-77, "Viscosity-TEmperature Charts for Liquid Petroleum Products", American Society for Testing and Materials, 1916 Race Street, Philadelphia, PA 19103.
14. NASA, *Comprressed Gas Handbook* (Revised). Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, SP-3045, 1970.
15. ASME, *Thermodynamic and Transport Properties of Steam*. Nueva York: American Society of Mechanical Engineers, 1967.

Rubber Publishing Co.,

Meriam Instrument Co.,

echanical Engineers, 9a.

nical Rubber Publishing

ses, 2a. ed. Washington,

Printing Office, 1962.
ents in Fluid Mechanics.

, 1961.
ies of Matter, the TPRC

eva York: McGraw-Hill,

", SAE Handbook, 1976

um Products", American

l Aeronautics and Space

k: American Society of

Apéndice B

Ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas para densidad constante es

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \tag{B.1}$$

Los esfuerzos normales y de corte en coordenadas cilíndricas para densidad y viscosidad constantes son

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \qquad \tau_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{B.2}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas para densidad y viscosidad constantes son

componente r:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r v_r]\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right\} \tag{B.3a}$$

componente θ:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$
$$=\rho g_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r v_\theta]\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right\} \tag{B.3b}$$

componente z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$
$$=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right\} \tag{B.3c}$$

$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$ (B.3b)

(B.3c)

Apéndice C

Cintas de video y películas de mecánica de fluidos

A continuación se listan (por proveedores) los títulos de las cintas de video y de películas de 16 mm acerca de mecánica de fluidos.

1. Encyclopaedia Britannica Educational Corporation
   310 South Michigan Avenue
   Chicago, Illinois 60604

   Las siguientes veintidós películas producidas por el National Committee for Fluid Mechanics Films (NCFMF)[1] pueden obtenerse en cinta de video (se indica la duración):

   Aerodynamic Generating of Sound (44 min, directores: M. J. Lighthill, J. E. Ffowcs-Williams)
   Boundary Layer Control (25 min, director: D. C. Hazen)
   Cavitation (31 min, director: P. Eisenberg)
   Channel Flow of a Compressible Fluid (29 min, director: D. E. Coles)
   Deformation of Continuous Media (338 min, director: J. L. Lumley)
   Eulerian and Lagrangian Descriptions in Fluid Mechanics (27 min, director: J. L. Lumley)
   Flow Instabilities (27 min, director: E. L. Mollo-Christensen)
   Flow Visualization (31 min, director: S. J. Kline)
   The Fluid Dynamics of Drag[2] (4 partes, 120 min, director: A. H. Shapiro)
   Fundamentals of Boundary Layers (24 min, director: F. H. Abernathy)
   Low-Reynolds-Number Flows (33 min, director: Sir G. I. Taylor)
   Magnetohydrodynamics (27 min, director: J. A. Shercliff)

[1] Resúmenes detallados de las películas del NCFMF se encuentran en *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics* (Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1972).
[2] El contenido de esta película se resume e ilustra en *Shape and Flow: The Fluid Dynamics of Drag*, por Ascher H. Shapiro (Nueva York: Anchor Books, 1961).

Pressure Fields and Fluid Acceleration (330 min, director: A. H. Shapiro)
Rarefied Gas Dynamics (33 min, directores: F. C. Hurlbut, F. S. Sherman)
Rheological Behavior of Fluids (22 min, director: H. Markovitz)
Rotating Flows (29 min, director: D. Fultz)
Secondary Flow (30 min, director: E. S. Taylor)
Stratified Flow (26 min, director: R. R. Long)
Surface Tension in Fluid Mechanics (29 min, director: L. M. Trefethen)
Turbulence (29 min, director: R. W. Stewart)
Vorticity (2 parts, 44 min, director: A. H. Shapiro)
Waves in Fluids (33 min, director: A. E. Bryson)

2. University of Iowa
The Audiovisual Center
C4 Seashore Hall
Iowa City, Iowa 52240

Las siguientes seis películas se prepararon como una serie, en el orden listado. Pueden verse individualmente sin una pérdida seria en la continuidad.

Introduction to the Study of Fluid Motion (24 min, director: H. Rouse). Esta película de orientación muestra una variedad de fenómenos de flujo familiares. Se ilustra el empleo de modelos a escala para el estudio empírico de fenómenos complejos y se señala la importancia de los números de Euler, Froude, Mach y Reynolds como parámetros de similitud empleando varias secuencias de flujos en modelo y prototipo.

Fundamental Principles of Flow (23 min, director: H. Rouse). En esta película se desarrollan los conceptos básicos y las relaciones físicas necesarias para analizar el movimiento de fluidos. Las ecuaciones de continuidad, momento y energía se deducen y emplean para analizar un dispositivo de propulsión a chorro.

Fluid Motion in a Gravitational Field (23 min, director: H. Rouse). Los efectos de la flotación y los flujos de superficie libre se ilustran en esta película. El número de Froud se presenta como un parámetro fundamental para flujos con superficie libre. Los movimientos ondulatorios se presentan para flujo en canal abierto y de densidad estratificada.

Characteristics of Laminar and Turbulent Flow (26 min, director: H. Rouse). Tintas, humo, partículas suspendidas y burbujas de hidrógeno se emplean para visualizar flujos laminares y turbulentos. Se presentan las inestabilidades que conducen a la turbulencia; se describen la producción y el decaimiento de la turbulencia, así como la combinación de la misma.

Form Drag, Lift, and Propulsion (24 min, director: H. Rouse) Se presentan los efectos de la separación de la capa límite en patrones de flujo y distribuciones de presión para diversas formas de cuerpos. Se analizan las características básicas de las formas de sustentación, incluso los efectos de la proporción dimensional, y los resultados se aplican al análisis del desempeño de hélices y convertidores de momento de torsión.

Effects of Fluid Compressibility (17 min, director: H. Rouse). La analogía hidráulica entre el flujo de un líquido en canal abierto y el flujo de un gas compresible se emplea para mostrar patrones ondulatorios representativos. La visualización óptica de flujo de Schlieren se utiliza en un túnel de viento supersónico para mostrar patrones de flujo que pasan por diferentes cuerpos a velocidades subsónicas y supersónicas.

3. University of Minnesota
Saint Anthony Falls Hydraulics Laboratory

Mississippi Rivere and 3rd Avenue, SE
Minneapolis, Minnesota 55414

Some Phenomena of Open-Channel Flow (33 min, muda). Se muestran muchas características del flujo en canal abierto. Se ilustran las aplicaciones de las curvas de energía específica y de presión-momento.

Fluid Mechanics-The Boundary Layer (30 min, sonora). El filme contiene una serie de demostraciones de principios físicos. Se propone para utilizarse como un resumen después de una discusión común en el salón de clases del fenómeno de la capa límite.

4. American Institute of Aeronautics and Astronautics
370 L'Enfant Promenade, S. W.
Washington, D.C. 20024-2518

America's Wings (29 min). Se entrevistan personas que han hecho contribuciones significativas al desarrollo de los aviones para vuelos a alta velocidad; los participantes analizan y explican sus aportaciones. Ésta es una película eficaz para un auditorio relativamente especializado.

5. Purdue University
Center for Instructional Services
Film Booking
Stewart Center
West Lafayette, Indiana 47907

Tacoma Narrows Bridge Collapse (3 min, color, muda; disponible como película de 16 mm o videocinta VHS). Este breve filme contiene las espectaculares tomas originales del colapso espontáneo, en una ligera brisa, del puente de suspensión de 2800 pies sobre el Río Tacoma, fenómeno que aconteció el 7 de noviembre de 1940.

Apéndice D

Selección de curvas de funcionamiento para bombas y ventiladores

D-1 INTRODUCCIÓN

Muchas firmas, en todo el mundo, fabrican maquinarias para fluidos en diversos tipos y capacidades estándar. Cada fabricante publica datos completos del funcionamiento para permitir la aplicación de sus máquinas en sistemas. Este apéndice contiene datos seleccionados de funcionamiento para usarse en la solución de problemas de sistemas de bombas y ventiladores. Se incluyen dos tipos de bomba y un tipo de ventilador.

La elección de un fabricante puede basarse en la práctica establecida, la ubicación o el costo. Una vez que se ha elegido el fabricante, la selección de la máquina es un proceso de tres pasos:

1. Seleccione un tipo de máquina, adecuado a la aplicación, del catálogo de la línea completa de un fabricante, el cual brinda los rangos de aumento de presión (carga) y la relación de flujo para cada tipo de máquina.
2. Elija un modelo de máquina apropiado y un control de velocidad de una gráfica selectora maestra, la cual superpone los rangos de carga y de relación de flujo de una serie de máquinas sobre una gráfica.
3. Verifique que la máquina candidata sea satisfactoria para la aplicación propuesta, empleando una curva de funcionamiento detallada para la máquina específica.

Es pertinente consultar con ingenieros de sistemas experimentados, ya sea empleados por el fabricante de la máquina o por su propia organización, antes de tomar la decisión final de compra.

En la actualidad muchos fabricantes emplean procedimientos computarizados para seleccionar la máquina que es más apropiada para cada aplicación. Tales procedimientos son simplemente versiones automatizadas del método de selección tradicional. El empleo de una gráfica selectora maestra y de curvas de funcionamiento detalladas se ilustra adelante para bombas y ventiladores, empleando datos de un fabricante acerca de cada tipo de máquina. La literatura técnica de otros fabricantes difiere en detalles, pero contiene la información necesaria para la selección de la máquina.

D-2 SELECCIÓN DE BOMBAS

En las figuras de la D.1 a la D.10 se muestran datos representativos para bombas Peerless [1] de caja dividida horizontal de un solo paso (serie AE), y en las figuras D.11 y D.12 para bombas Peerless de pasos múltiples (serie TU y TUT).

Las figuras D.1 y D.2 son gráficas generales de selección de bombas para equipos de la serie AE a 3500 y 1750 rpm nominales. En estas gráficas, el número de modelo (por ejemplo, 6AE14) indica el tamaño de la línea de descarga (tubería de 6 pulg nominales), la serie de la bomba (AE) y el diámetro máximo del impulsor (aproximadamente 14 pulg).

Las figuras de la D.3 a la D.10 son gráficas de funcionamiento detalladas para modelos individuales de bombas en la serie AE.

Las figuras D.11 y D.12 son gráficas generales de selección de bombas para la serie TU y TUT a 1750 rpm nominales. En la figura D.11 se presentan datos para bombas de dos pasos, en tanto que la figura D.12 contiene datos para bombas con tres, cuatro y cinco pasos.

Cada gráfica de funcionamiento de bomba contiene curvas de la carga total contra la relación de flujo volumétrico; las curvas para diferentes diámetros del impulsor —verificadas en la misma voluta— se presentan en una sola gráfica. Cada gráfica de funcionamiento contiene también las curvas que muestran la eficiencia y potencia de accionamiento de la bomba; el *NPSH* requerido, cuando varía con la relación de flujo, se muestra por medio de la curva en la base de cada gráfica. El punto de mejor eficiencia (PME) para cada impulsor puede determinarse empleando la curva de eficiencia.

El empleo de la gráfica general de selección de bombas y de las curvas de funcionamiento detalladas se ilustra en el problema ejemplo D.1.

EJEMPLO D.1 Procedimiento de selección de bombas

Seleccione una bomba que entregue 1750 gpm de agua a una carga total de 120 pies. Elija el modelo apropiado de bomba y el control de velocidad. Especifique la eficiencia de la bomba, la potencia motriz y el *NPSH* requerido.

PROBLEMA EJEMPLO D.1

DATOS: La selección de una bomba que entregue 1750 gpm de agua a una carga total de 120 pies.

ENCUENTRE:
a) El modelo de la bomba y la velocidad de accionamiento.
b) La eficiencia de la bomba.
c) La potencia motriz
d) El *NPSH* requerido.

SOLUCIÓN:
Emplee el procedimiento de selección de bombas descrito en la sección D-1. (Los números abajo corresponden a los pasos numerados que se dan en el procedimiento.)

1. Primero, seleccione un tipo de máquina adecuado a la aplicación. (Este paso en realidad requiere un catálogo de la línea completa del fabricante, el cual no se reproduce aquí. El catálogo de la línea

[1] Peerless Pump Division, FMC Corporation, P.O. Box 7026, Indianapolis, IN 46207-7026.

de productos Peerless especifica un gasto máximo y una carga de 2500 gpm y 660 pies para las bombas de la serie AE. De modo que puede obtenerse el funcionamiento requerido; suponga que la selección se hará a partir de esta serie.)

2. Segundo, consulte la gráfica general de selección de bombas. El punto de operación deseado no está dentro de ninguna curva de bomba en la gráfica de 3500 rpm (Fig. D.1). De la gráfica de 1750 rpm (Fig. D.2), seleccione una bomba modelo 6AE14. De la curva de funcionamiento para la bomba 6AE14 (Fig. D.6), elija un impulsor de 13 pulg.
3. Tercero, verifique el funcionamiento de la máquina empleando la gráfica de funcionamiento detallado. En la gráfica de funcionamiento correspondiente a la bomba 6AE14, proyecte una línea hacia arriba desde la abscisa en $Q = 1750$ gpm. Proyecte otra a través de $H = 120$ pies hacia la ordenada. La intersección es el funcionamiento de la bomba en el punto de operación deseado:

$$\eta \approx 85.8 \text{ porcentaje} \qquad \mathcal{P} \approx 64\text{HP}$$

Del punto de operación, proyecte una línea hacia abajo, hacia la curva del *NPSH* requerido. En la intersección, se lee $NPSH \approx 17$ pies.

Esto completa el proceso de selección para esta bomba. Es necesario consultar con ingenieros en sistemas experimentados para verificar que la condición de operación del sistema se ha predicho con exactitud y que la bomba se ha seleccionado de manera correcta.

D-3 SELECCIÓN DE VENTILADORES

La selección de ventiladores es similar a la de bombas. En la figura D.13 se muestra una gráfica maestra selectora de ventiladores, representativa para una serie de ventiladores de flujo axial de Buffalo Forge.[2] La gráfica muestra el funcionamiento de la serie completa de ventiladores, como una función del tamaño y de la velocidad de accionamiento del ventilador.

La gráfica general de selección de ventiladores se emplea para elegir el tamaño y la velocidad de accionamiento del ventilador de una aplicación particular. La evaluación final de lo adecuado del modelo de ventilador para la aplicación se efectúa utilizando gráficas de funcionamiento detallado para el modelo específico. Una muestra de una gráfica de funcionamiento para un ventilador Vaneaxial de tamaño 48 de Buffalo Forge, se presenta en la figura D.14.

La gráfica de funcionamiento se grafica como el aumento de la presión total contra la relación de flujo volumétrico. La figura D.14 contiene curvas para rodetes HB, LB y MB, operando a diversas velocidades constantes; las bandas sombreadas representan la eficiencia total medida para los ventiladores.

EJEMPLO D.2 Procedimiento de selección de ventiladores

Seleccione un ventilador de flujo axial para entregar 40 000 cfm de aire estándar a 1.25 pulg de H_2O de presión total. Elija el modelo de ventilador apropiado y la velocidad de accionamiento. Especifique la eficiencia y la potencia motriz del ventilador.

[2] Buffalo Forge, 465 Broadway, Buffalo, 14240 NY.

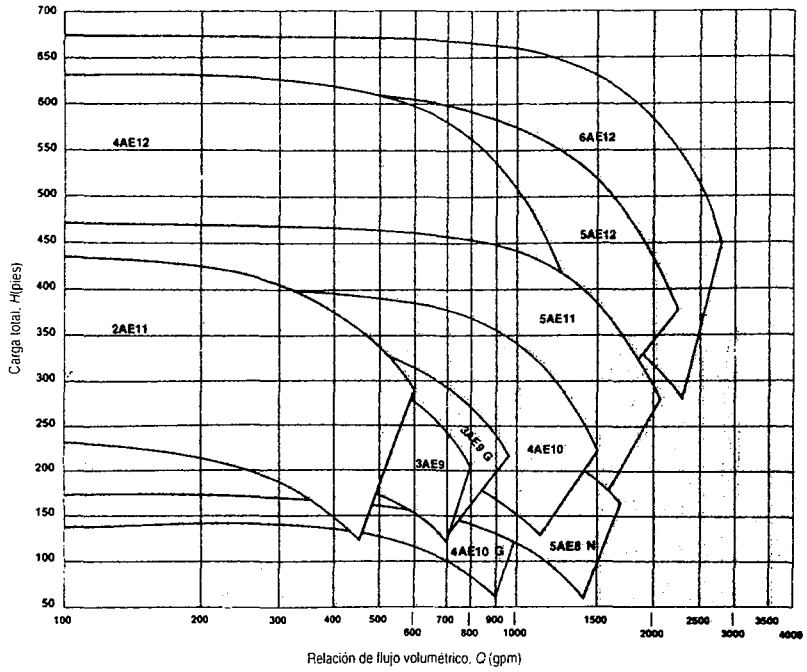


Fig. D.1 Gráfica selectora para bombas Peerless de caja horizontal bipartida (serie AE) a 3500 rpm nominales.

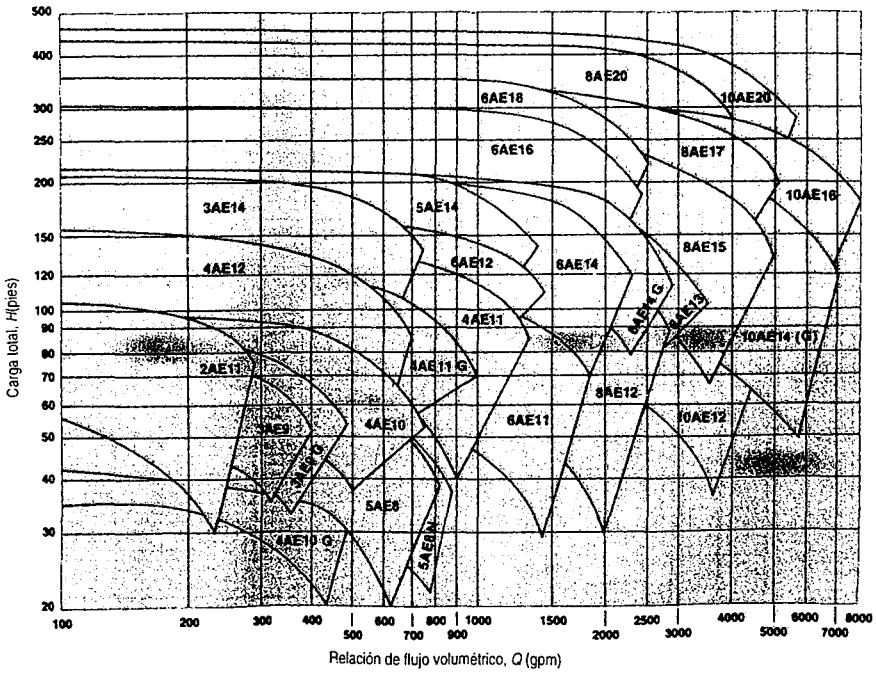


Fig. D.2 Gráfica selectora para bombas Peerless de caja horizontal bipartida (serie AE) a 1750 rpm nominales.

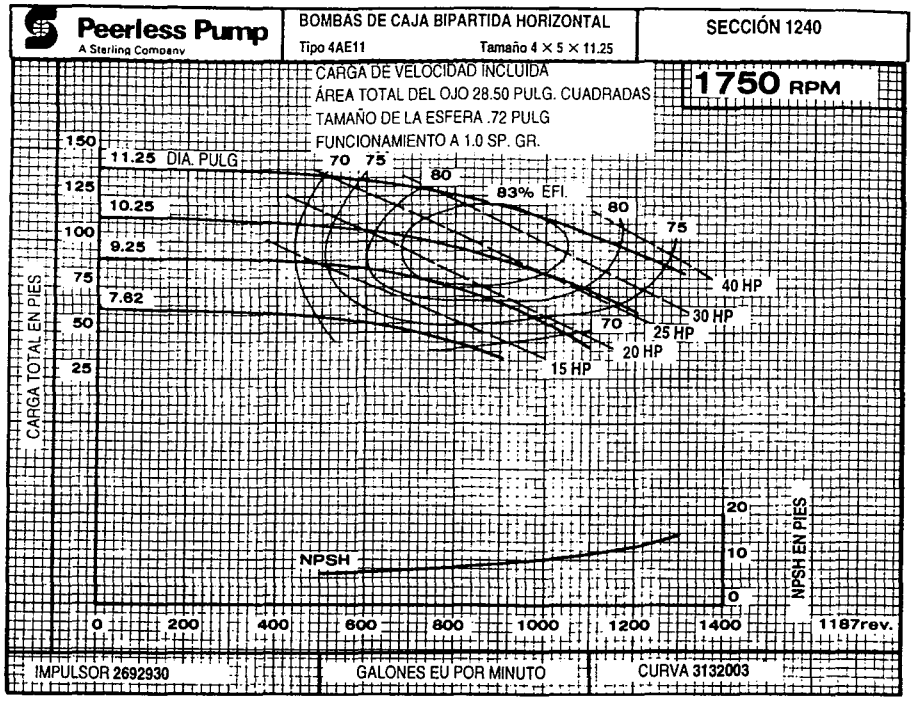


Fig. D.3 Curva de funcionamiento para la bomba Peerless 4AE11 a 1750 rpm.

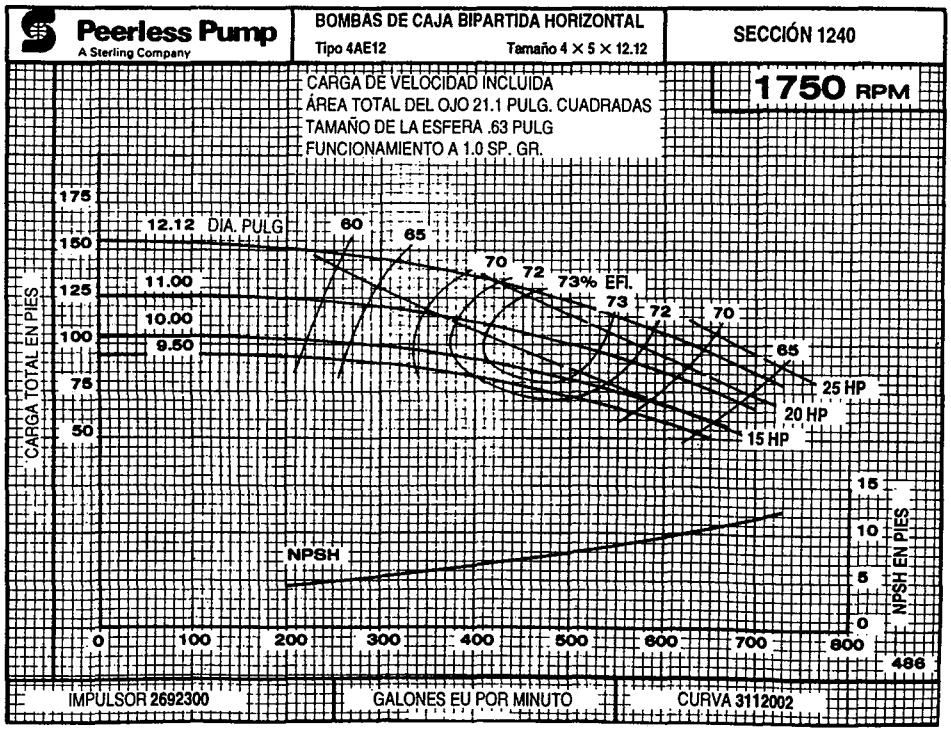


Fig. D.4 Curva de funcionamiento para la bomba Peerless 4AE12 a 1750 rpm.

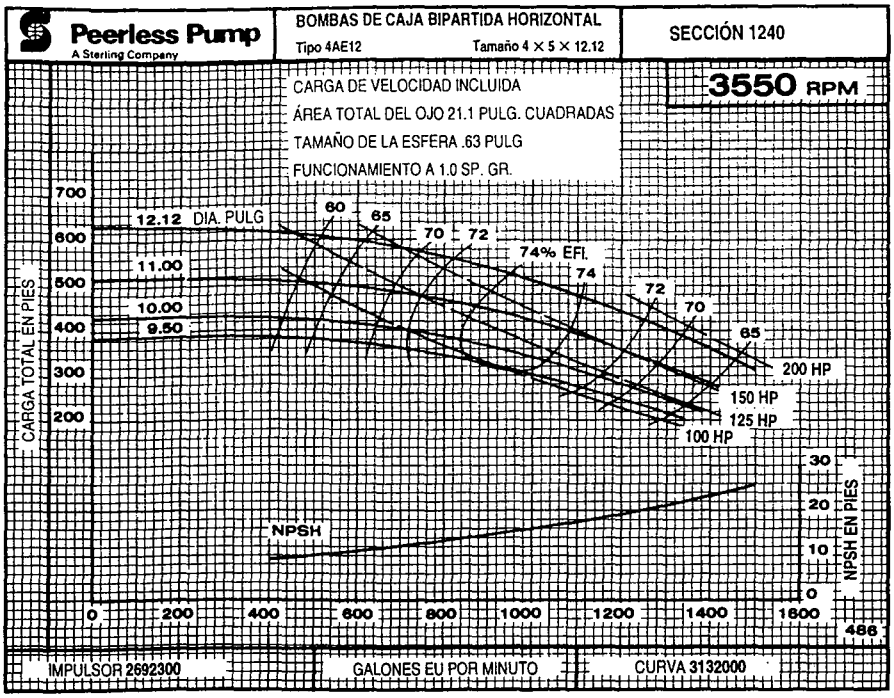


Fig. D.5 Curva de funcionamiento para la bomba Peerless 4AE12 a 3500 rpm.

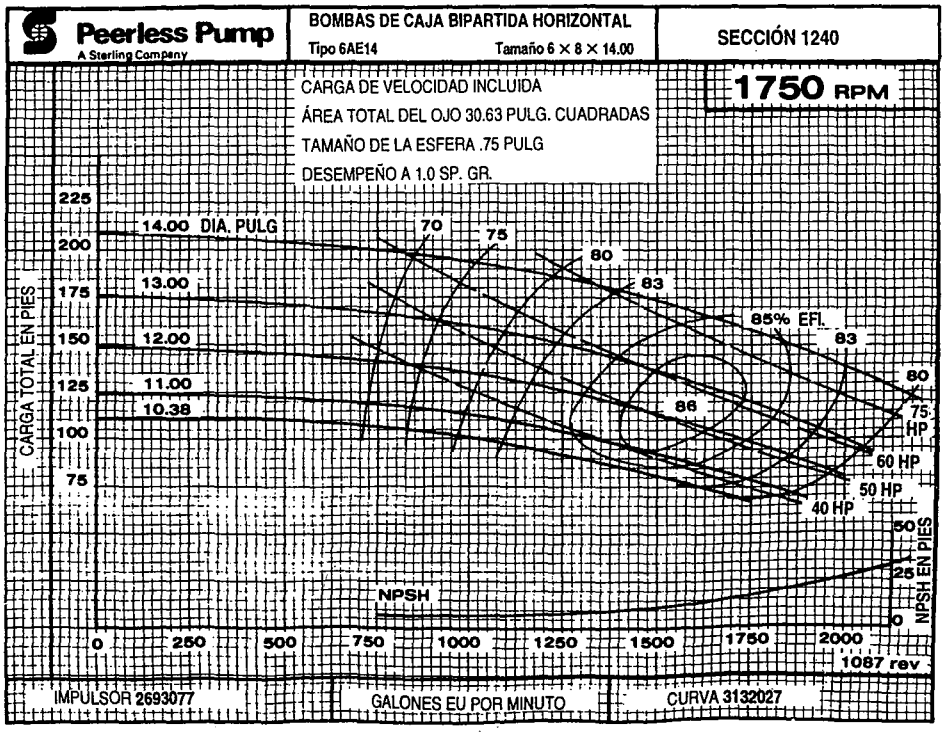


Fig. D.6 Curva de funcionamiento para la bomba Peerless 6AE14 a 1750 rpm.

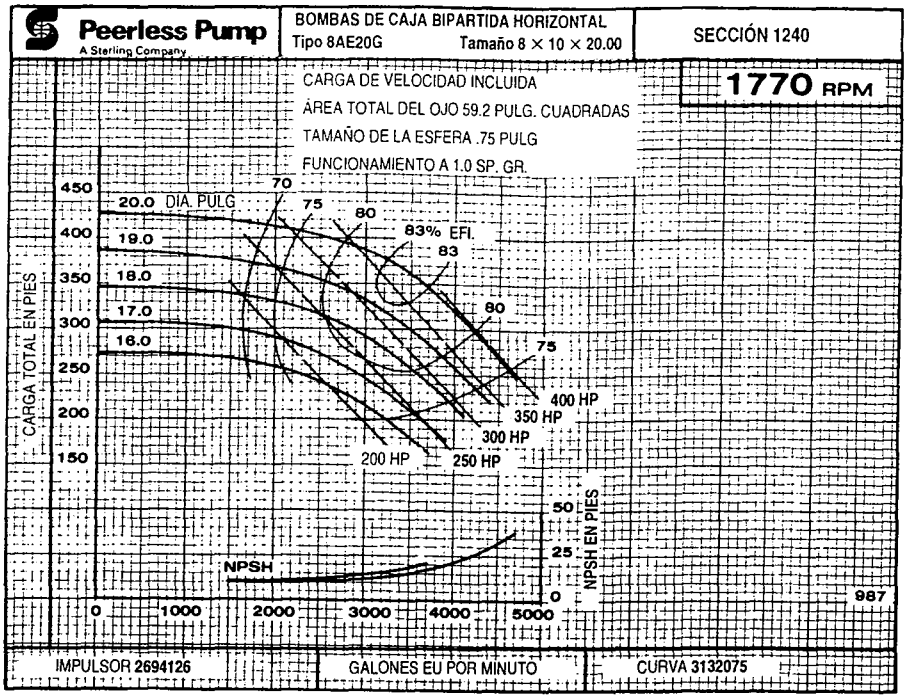


Fig. D.7 Curva de funcionamiento para la bomba Peerless 8AE20G a 1770 rpm.

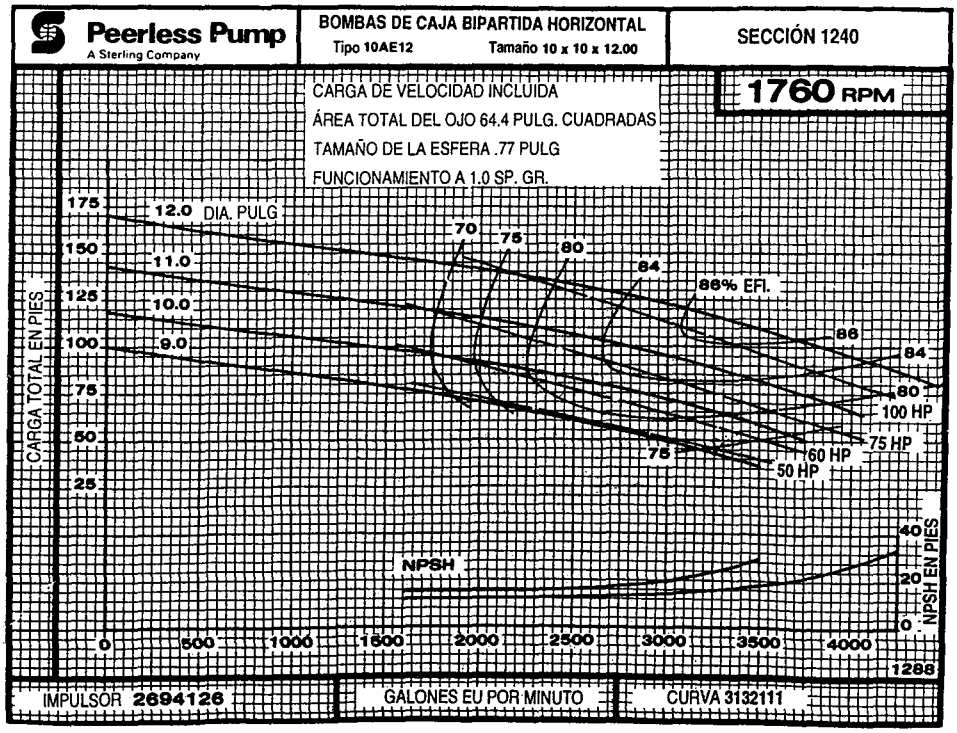


Fig. D.8 Curva de funcionamiento para la bomba Peerless 10AE12 a 1760 rpm.

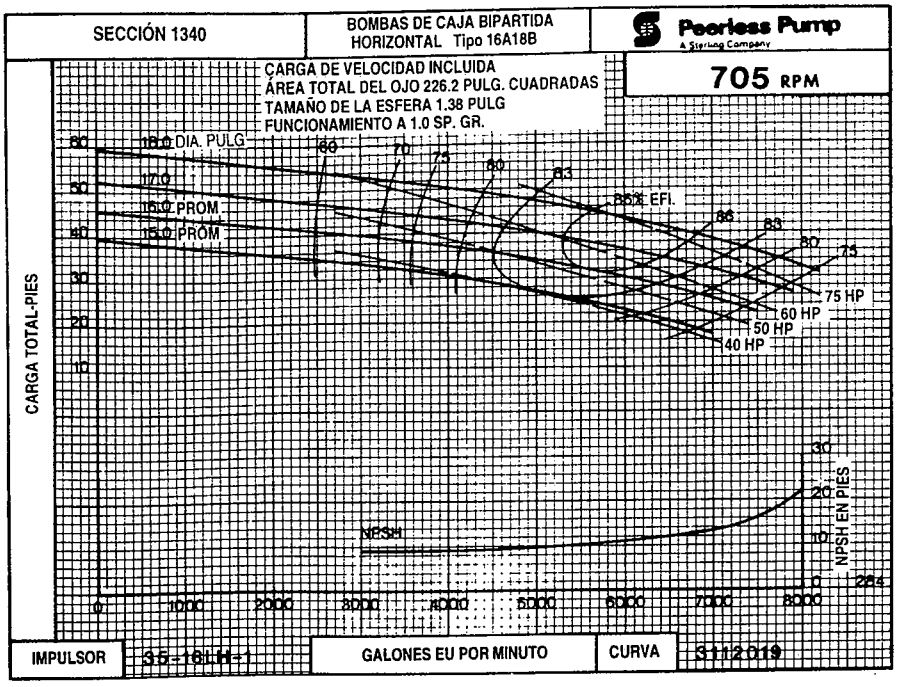


Fig. D.9 Curva de funcionamiento para la bomba Peerless 16AE18B a 705 rpm.

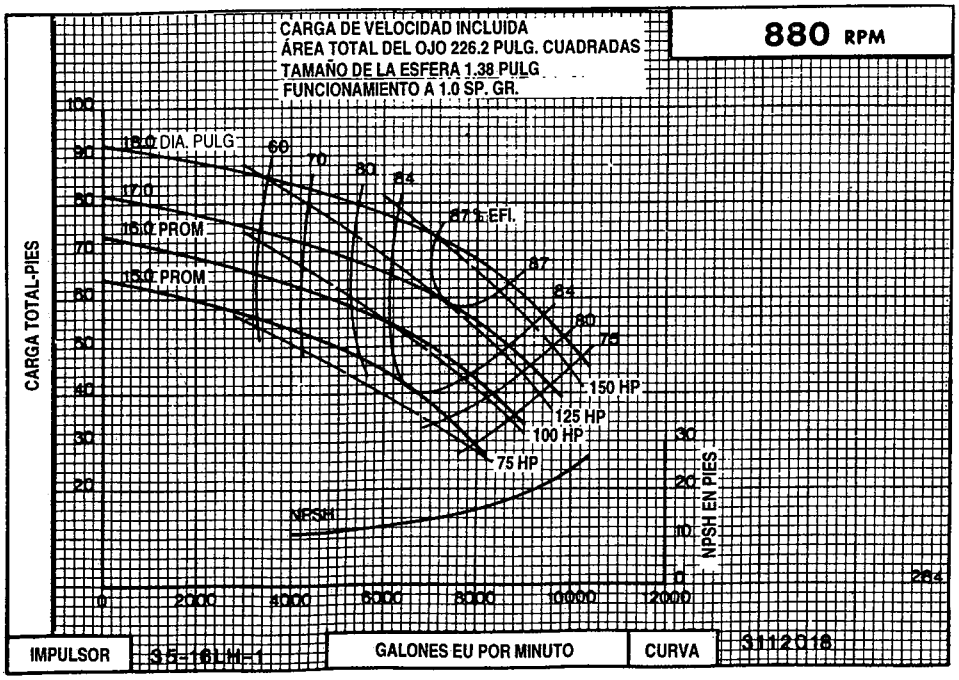


Fig. D.10 Curva de funcionamiento para la bomba Peerless 16AE18B A 880 rpm.

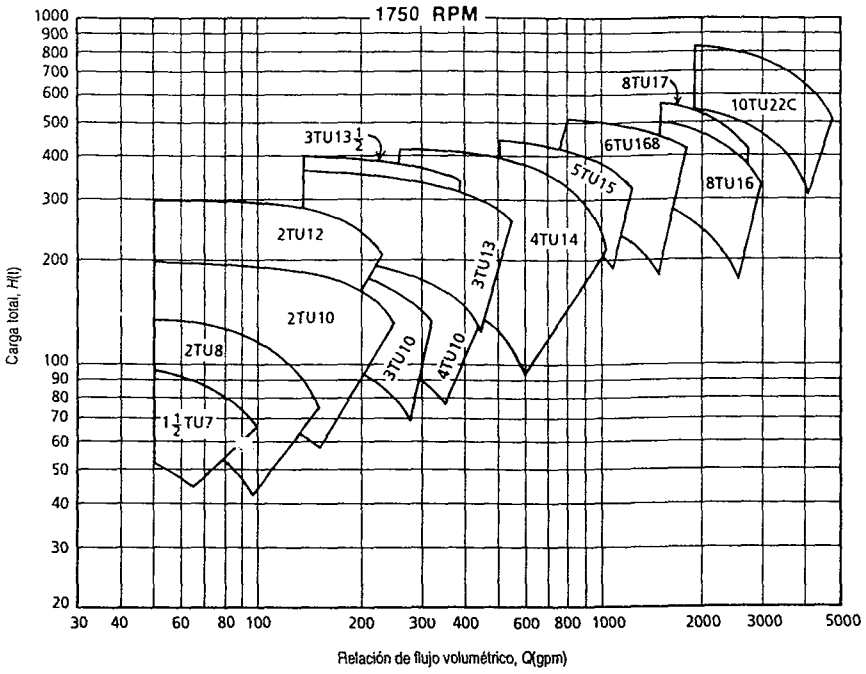


Fig. D.11 Gráfica general de selección de bombas Peerless de dos pasos (series TU y TUT) a 1750 rpm nominales.

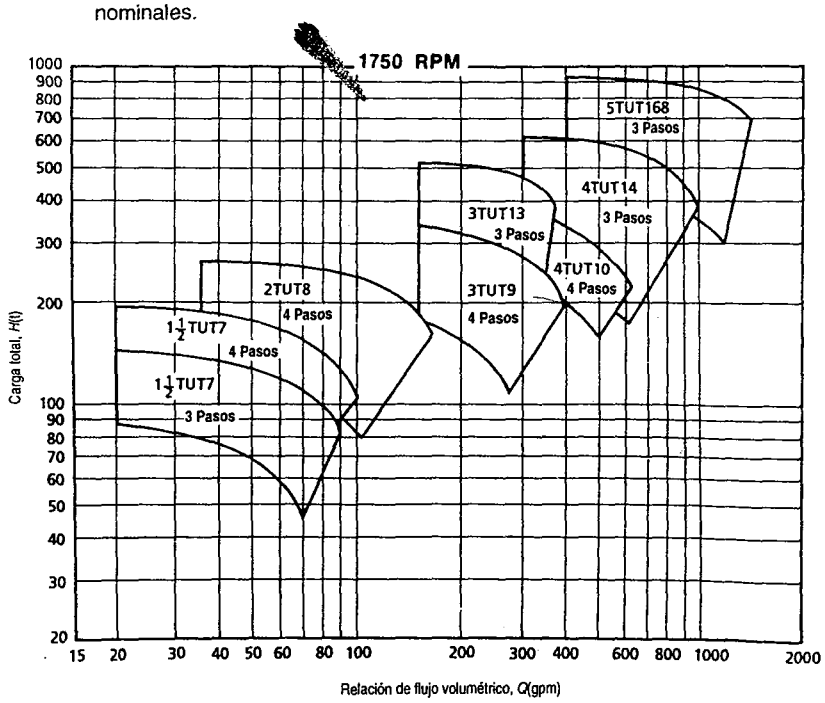
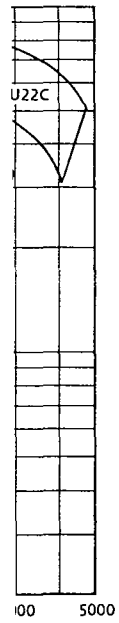


Fig. D.12 Gráfica general de selección de bombas Peerless de pasos múltiples (series TU y TUT) a 1750 rpm nominales.



s TU y TUT) a 1750 rpm

(series TU y TUT) a

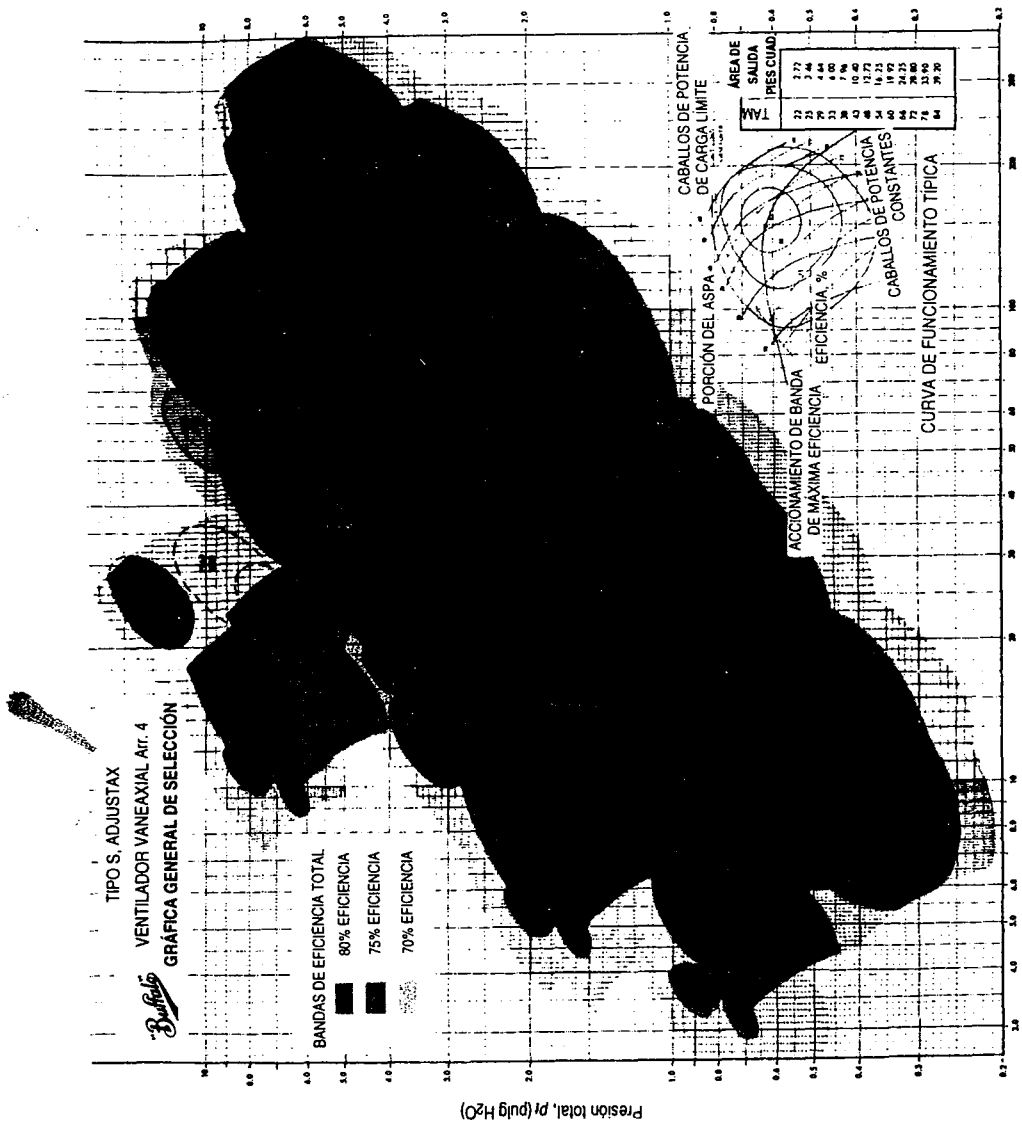


Fig. D.13 Gráfica general de selección de ventiladores axiales Buffalo Forge.

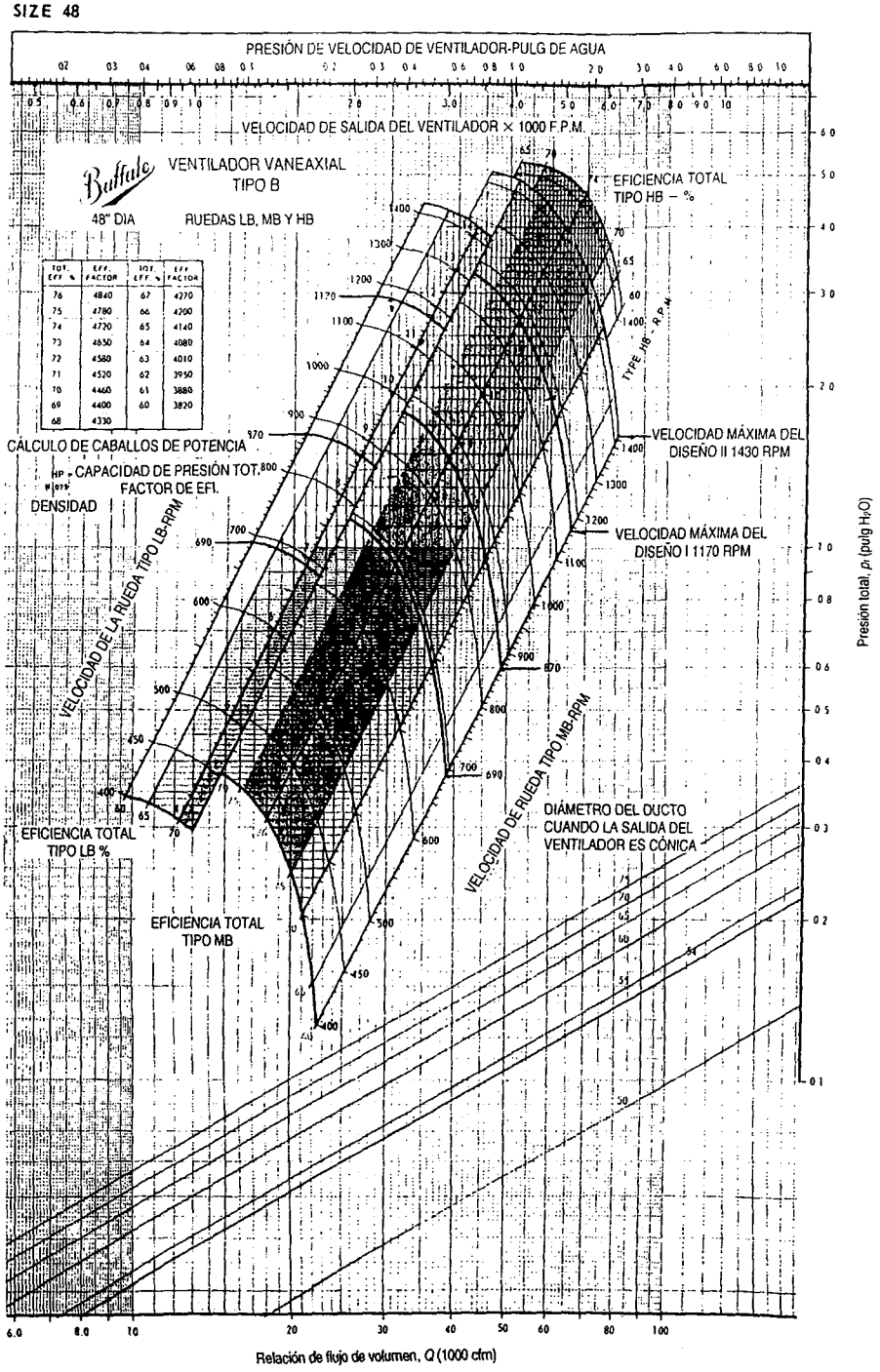
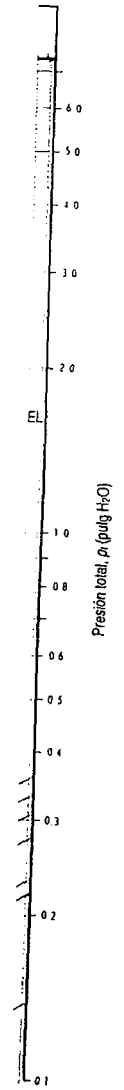


Fig. D.14 Gráfica de funcionamiento para ventiladores axiales Buffalo Forge.

REFEREN



PROBLEMA EJEMPLO D.2

DATOS: La selección de un ventilador axial para entregar 40 000 cfm de aire estándar a 1.25 pulg de H_2O de carga total.

ENCUENTRE: a) El tamaño y la velocidad de accionamiento del ventilador.
b) La eficiencia del ventilador. c) La potencia motriz

SOLUCIÓN:
Emplee el procedimiento de selección de ventilador descrito en la sección D-1. (Los números a continuación corresponden a los pasos numerados que se brindan en el procedimiento.)

1. Primero, elija un tipo de máquina adecuado a la aplicación. (Este paso en realidad requiere un catálogo de la línea completa del fabricante, el cual no se reproduce aquí. Suponga que la selección de ventilador se hará a partir de los datos de ventilador axial presentados en la figura D.13.)
2. Segundo, consulte la gráfica general de selección de ventiladores. El punto de operación deseado está dentro del contorno para el ventilador de tamaño 48 sobre la gráfica general (Fig. D.13). Para conseguir el funcionamiento deseado se requiere accionar el ventilador a 870 rpm.
3. Tercero, verifique el funcionamiento de la máquina empleando la gráfica de funcionamiento detallado (Fig. D.14). Sobre la gráfica de funcionamiento detallado, proyecte una línea hacia arriba desde la abscisa en $Q = 40\,000$ cfm. Proyecte otra desde $p = 1.25$ pulg H_2O hasta la ordenada. La intersección es el punto de operación deseado.

   Estas condiciones de operación no pueden ser satisfechas por la rueda tipo LB; sin embargo, se acercan a la eficiencia pico de la rueda tipo HB o de la MB. Las condiciones de operación pueden satisfacerse en aproximadamente 72 por ciento de la eficiencia total utilizando una rueda HB. Con una rueda MB, puede esperarse una eficiencia total un poco mayor que el 75 por ciento. De acuerdo con la gráfica, el "factor de eficiencia" es 4780 a $\eta = 0.75$, y el requerimiento de potencia motriz del ventilador es

$$\mathcal{P} = \frac{\text{Presión total} \times \text{Capacidad}}{\text{Factor de eficiencia}} = \frac{1.25 \text{ pulg } H_2O \times 40\,000 \text{ cfm}}{4780} = 10.5 \text{ HP}$$

Esto completa el proceso de selección de ventilador. También en este caso, es necesario consultar a ingenieros experimentados en sistemas para verificar que la condición de operación del sistema se ha ya predicho con exactitud y que el ventilador se haya seleccionado de manera correcta.

REFERENCIAS

1. Literatura técnica de bombas Peerless:

   Horizontal Split Case Single Stage Double Suction Pumps, Series AE, Brochure B-1200, 1987.
   Horizontal Split Case Series AE Pumps, 60 Hertz, Performance Curves, Brochure B-1240, n.d.
   Horizontal Split Case, Multistage Single Suction Pumps, Types TU, TUT, 60 Hertz, Performance Curves, Brochure B-1440, n.d.

2. Literatura técnica de Buffalo Forge:
   Axial Flow Fans, Bulletin F-305A, 1968.

Apéndice E

Tablas para el cálculo de flujo compresible

TABLA E.1 Funciones de flujo isentrópico (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	∞
0.02	0.9999	0.9997	0.9998	28.94
0.04	0.9997	0.9989	0.9992	14.48
0.06	0.9993	0.9975	0.9982	9.666
0.08	0.9987	0.9955	0.9968	7.262
0.10	0.9980	0.9930	0.9950	5.822
0.12	0.9971	0.9900	0.9928	4.864
0.14	0.9961	0.9864	0.9903	4.182
0.16	0.9949	0.9823	0.9873	3.673
0.18	0.9936	0.9777	0.9840	3.278
0.20	0.9921	0.9725	0.9803	2.964
0.22	0.9904	0.9669	0.9762	2.708
0.24	0.9886	0.9607	0.9718	2.496
0.26	0.9867	0.9541	0.9670	2.317
0.28	0.9846	0.9470	0.9619	2.166
0.30	0.9823	0.9395	0.9564	2.035
0.32	0.9799	0.9315	0.9506	1.922
0.34	0.9774	0.9231	0.9445	1.823
0.36	0.9747	0.9143	0.9380	1.736
0.38	0.9719	0.9052	0.9313	1.659
0.40	0.9690	0.8956	0.9243	1.590
0.42	0.9659	0.8857	0.9170	1.529
0.44	0.9627	0.8755	0.9094	1.474
0.46	0.9594	0.8650	0.9016	1.425
0.48	0.9560	0.8541	0.8935	1.380
0.50	0.9524	0.8430	0.8852	1.340

TABLA E.1 Funciones de flujo isentrópico (*continuación*)

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
0.50	0.9524	0.8430	0.8852	1.340
0.52	0.9487	0.8317	0.8766	1.303
0.54	0.9449	0.8201	0.8679	1.270
0.56	0.9410	0.8082	0.8589	1.240
0.58	0.9370	0.7962	0.8498	1.213
0.60	0.9328	0.7840	0.8405	1.188
0.62	0.9286	0.7716	0.8310	1.166
0.64	0.9243	0.7591	0.8213	1.145
0.66	0.9199	0.7465	0.8115	1.127
0.68	0.9154	0.7338	0.8016	1.110
0.70	0.9108	0.7209	0.7916	1.094
0.72	0.9061	0.7080	0.7814	1.081
0.74	0.9013	0.6951	0.7712	1.068
0.76	0.8964	0.6821	0.7609	1.057
0.78	0.8915	0.6691	0.7505	1.047
0.80	0.8865	0.6560	0.7400	1.038
0.82	0.8815	0.6430	0.7295	1.030
0.84	0.8763	0.6300	0.7189	1.024
0.86	0.8711	0.6170	0.7083	1.018
0.88	0.8659	0.6041	0.6977	1.013
0.90	0.8606	0.5913	0.6870	1.009
0.92	0.8552	0.5785	0.6764	1.006
0.94	0.8498	0.5658	0.6658	1.003
0.96	0.8444	0.5532	0.6551	1.001
0.98	0.8389	0.5407	0.6445	1.000
1.00	0.8333	0.5283	0.6339	1.000
1.02	0.8278	0.5160	0.6234	1.000
1.04	0.8222	0.5039	0.6129	1.001
1.06	0.8165	0.4919	0.6024	1.003
1.08	0.8108	0.4801	0.5920	1.005
1.10	0.8052	0.4684	0.5817	1.008
1.12	0.7994	0.4568	0.5714	1.011
1.14	0.7937	0.4455	0.5612	1.015
1.16	0.7880	0.4343	0.5511	1.020
1.18	0.7822	0.4232	0.5411	1.025
1.20	0.7764	0.4124	0.5311	1.030
1.22	0.7706	0.4017	0.5213	1.037
1.24	0.7648	0.3912	0.5115	1.043
1.26	0.7590	0.3809	0.5019	1.050
1.28	0.7532	0.3708	0.4923	1.058
1.30	0.7474	0.3609	0.4829	1.066
1.32	0.7416	0.3512	0.4736	1.075
1.34	0.7358	0.3417	0.4644	1.084
1.36	0.7300	0.3323	0.4553	1.094
1.38	0.7242	0.3232	0.4463	1.104
1.40	0.7184	0.3142	0.4374	1.115

TABLA E.1 Funciones de flujo isentrópico (*continuación*)

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
1.40	0.7184	0.3142	0.4374	1.115
1.42	0.7126	0.3055	0.4287	1.126
1.44	0.7069	0.2969	0.4201	1.138
1.46	0.7011	0.2886	0.4116	1.150
1.48	0.6954	0.2804	0.4032	1.163
1.50	0.6897	0.2724	0.3950	1.176
1.52	0.6840	0.2646	0.3869	1.190
1.54	0.6783	0.2570	0.3789	1.204
1.56	0.6726	0.2496	0.3711	1.219
1.58	0.6670	0.2423	0.3633	1.234
1.60	0.6614	0.2353	0.3557	1.250
1.62	0.6558	0.2284	0.3483	1.267
1.64	0.6502	0.2217	0.3409	1.284
1.66	0.6447	0.2152	0.3337	1.301
1.68	0.6392	0.2088	0.3266	1.319
1.70	0.6337	0.2026	0.3197	1.338
1.72	0.6283	0.1966	0.3129	1.357
1.74	0.6229	0.1907	0.3062	1.376
1.76	0.6175	0.1850	0.2996	1.397
1.78	0.6121	0.1794	0.2931	1.418
1.80	0.6068	0.1740	0.2868	1.439
1.82	0.6015	0.1688	0.2806	1.461
1.84	0.5963	0.1637	0.2745	1.484
1.86	0.5911	0.1587	0.2686	1.507
1.88	0.5859	0.1539	0.2627	1.531
1.90	0.5807	0.1492	0.2570	1.555
1.92	0.5756	0.1447	0.2514	1.580
1.94	0.5705	0.1403	0.2459	1.606
1.96	0.5655	0.1360	0.2405	1.633
1.98	0.5605	0.1318	0.2352	1.660
2.00	0.5556	0.1278	0.2301	1.688
2.02	0.5506	0.1239	0.2250	1.716
2.04	0.5458	0.1201	0.2200	1.745
2.06	0.5409	0.1164	0.2152	1.775
2.08	0.5361	0.1128	0.2105	1.806
2.10	0.5314	0.1094	0.2058	1.837
2.12	0.5266	0.1060	0.2013	1.869
2.14	0.5219	0.1027	0.1968	1.902
2.16	0.5173	0.09956	0.1925	1.935
2.18	0.5127	0.09650	0.1882	1.970
2.20	0.5081	0.09352	0.1841	2.005
2.22	0.5036	0.09064	0.1800	2.041
2.24	0.4991	0.08784	0.1760	2.078
2.26	0.4947	0.08514	0.1721	2.115
2.28	0.4903	0.08252	0.1683	2.154
2.30	0.4859	0.07997	0.1646	2.193

TABLA E.1 Funciones de flujo isentrópico (*continuación*)

A/A^*	M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
1.115	2.30	0.4859	0.07997	0.1646	2.193
1.126	2.32	0.4816	0.07751	0.1610	2.233
1.138	2.34	0.4773	0.07513	0.1574	2.274
1.150	2.36	0.4731	0.07281	0.1539	2.316
1.163	2.38	0.4689	0.07057	0.1505	2.359
1.176	2.40	0.4647	0.06840	0.1472	2.403
1.190	2.42	0.4606	0.06630	0.1440	2.448
1.204	2.44	0.4565	0.06426	0.1408	2.494
1.219	2.46	0.4524	0.06229	0.1377	2.540
1.234	2.48	0.4484	0.06038	0.1347	2.588
1.250	2.50	0.4444	0.05853	0.1317	2.637
1.267	2.52	0.4405	0.05674	0.1288	2.687
1.284	2.54	0.4366	0.05500	0.1260	2.737
1.301	2.56	0.4328	0.05332	0.1232	2.789
1.319	2.58	0.4289	0.05169	0.1205	2.842
1.338	2.60	0.4252	0.05012	0.1179	2.896
1.357	2.62	0.4214	0.04859	0.1153	2.951
1.376	2.64	0.4177	0.04711	0.1128	3.007
1.397	2.66	0.4141	0.04568	0.1103	3.065
1.418	2.68	0.4104	0.04429	0.1079	3.123
1.439	2.70	0.4068	0.04295	0.1056	3.183
1.461	2.72	0.4033	0.04166	0.1033	3.244
1.484	2.74	0.3998	0.04039	0.1010	3.306
1.507	2.76	0.3963	0.03917	0.09885	3.370
1.531	2.78	0.3928	0.03800	0.09671	3.434
1.555	2.80	0.3894	0.03685	0.09462	3.500
1.580	2.82	0.3860	0.03574	0.09259	3.527
1.606	2.84	0.3827	0.03467	0.09059	3.636
1.633	2.86	0.3794	0.03363	0.08865	3.706
1.660	2.88	0.3761	0.03262	0.08674	3.777
1.688	2.90	0.3729	0.03165	0.08489	3.850
1.716	2.92	0.3697	0.03071	0.08308	3.924
1.745	2.94	0.3665	0.02980	0.08130	3.999
1.775	2.96	0.3633	0.02891	0.07957	4.076
1.806	2.98	0.3602	0.02805	0.07788	4.155
1.837	3.00	0.3571	0.02722	0.07623	4.235
1.869	3.10	0.3422	0.02345	0.06852	4.657
1.902	3.20	0.3281	0.02023	0.06165	5.121
1.935	3.30	0.3147	0.01748	0.05554	5.629
1.970	3.40	0.3019	0.01512	0.05009	6.184
2.005	3.50	0.2899	0.01311	0.04523	6.790
2.041	3.60	0.2784	0.01138	0.04089	7.450
2.078	3.70	0.2675	0.009903	0.03702	8.169
2.115	3.80	0.2572	0.008629	0.03355	8.951
2.154	3.90	0.2474	0.007532	0.03044	9.799
2.193	4.00	0.2381	0.006586	0.02766	10.72

TABLA E.1 Funciones de flujo isentrópico (*continuación*)

M	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
4.00	0.2381	0.006586	0.02766	10.72
4.10	0.2293	0.005769	0.02516	11.71
4.20	0.2208	0.005062	0.02292	12.79
4.30	0.2129	0.004449	0.02090	13.95
4.40	0.2053	0.003918	0.01909	15.21
4.50	0.1980	0.003455	0.01745	16.56
4.60	0.1911	0.003053	0.01597	18.02
4.70	0.1846	0.002701	0.01463	19.58
4.80	0.1783	0.002394	0.01343	21.26
4.90	0.1724	0.002126	0.01233	23.07
5.00	0.1667	0.001890	0.01134	25.00

TABLA E.2 Funciones de flujo de la línea de Fanno (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

A/A^*	M	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*	$\bar{f}L_{máx}/D_h$
10.72	0.00	∞	1.200	∞	0.0000	∞
11.71	0.02	28.94	1.200	54.77	0.02191	1778
12.79	0.04	14.48	1.200	27.38	0.04381	440.5
13.95	0.06	9.666	1.199	18.25	0.06570	193.0
15.21	0.08	7.262	1.199	13.68	0.08758	106.7
16.56	0.10	5.822	1.198	10.94	0.1094	66.92
18.02	0.12	4.864	1.197	9.116	0.1313	45.41
19.58	0.14	4.182	1.195	7.809	0.0531	32.51
21.26	0.16	3.673	1.194	6.829	0.1748	24.20
23.07	0.18	3.278	1.192	6.066	0.1965	18.54
25.00	0.20	2.964	1.191	5.456	0.2182	14.53
	0.22	2.708	1.189	4.955	0.2398	11.60
	0.24	2.496	1.186	4.538	0.2614	9.387
	0.26	2.317	1.184	4.185	0.2829	7.688
	0.28	2.166	1.182	3.882	0.3044	6.357
	0.30	2.035	1.179	3.619	0.3257	5.299
	0.32	1.922	1.176	3.389	0.3470	4.447
	0.34	1.823	1.173	3.185	0.3682	3.752
	0.36	1.736	1.170	3.004	0.3894	3.180
	0.38	1.659	1.166	2.842	0.4104	2.706
	0.40	1.590	1.163	2.696	0.4313	2.309
	0.42	1.529	1.159	2.563	0.4522	1.974
	0.44	1.474	1.155	2.443	0.4729	1.692
	0.46	1.425	1.151	2.333	0.4936	1.451
	0.48	1.380	1.147	2.231	0.5141	1.245
	0.50	1.340	1.143	2.138	0.5345	1.069
	0.52	1.303	1.138	2.052	0.5548	0.9174
	0.54	1.270	1.134	1.972	0.5750	0.7866
	0.56	1.240	1.129	1.898	0.5951	0.6736
	0.58	1.213	1.124	1.828	0.6150	0.5757
	0.60	1.188	1.119	1.763	0.6348	0.4908
	0.62	1.166	1.114	1.703	0.6545	0.4172
	0.64	1.145	1.109	1.646	0.6740	0.3533
	0.66	1.127	1.104	1.592	0.6934	0.2979
	0.68	1.110	1.098	1.541	0.7127	0.2498
	0.70	1.094	1.093	1.493	0.7318	0.2081
	0.72	1.081	1.087	1.448	0.7508	0.1722
	0.74	1.068	1.082	1.405	0.7696	0.1411
	0.76	1.057	1.076	1.365	0.7883	0.1145
	0.78	1.047	1.070	1.326	0.8068	0.09167
	0.80	1.038	1.064	1.289	0.8251	0.07229
	0.82	1.030	1.058	1.254	0.8433	0.05593
	0.84	1.024	1.052	1.221	0.8614	0.04226
	0.86	1.108	1.045	1.189	0.8793	0.03097
	0.88	1.013	1.039	1.158	0.8970	0.02180
	0.90	1.0089	1.033	1.129	0.9146	0.01451

TABLA E.2 Funciones de flujo de la línea de Fanno (*Continuación*)

M	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*	$\bar{f}L_{máx}/D_h$
0.90	1.0089	1.033	1.129	0.9146	0.01451
0.92	1.0056	1.026	1.101	0.9320	0.008913
0.94	1.0031	1.020	1.074	0.9493	0.004815
0.96	1.0014	1.013	1.049	0.9663	0.002057
0.98	1.0003	1.007	1.024	0.9832	0.0004947
1.00	1.0000	1.000	1.000	1.000	0.0000
1.02	1.0003	0.9933	0.9771	1.017	0.0004587
1.04	1.0013	0.9866	0.9551	1.033	0.001769
1.06	1.0029	0.9798	0.9338	1.049	0.003838
1.08	1.0051	0.9730	0.9134	1.065	0.006585
1.10	1.0079	0.9662	0.8936	1.081	0.009935
1.12	1.011	0.9593	0.8745	1.097	0.01382
1.14	1.015	0.9524	0.8561	1.113	0.01819
1.16	1.020	0.9455	0.8383	1.128	0.02298
1.18	1.025	0.9386	0.8210	1.143	0.02814
1.20	1.030	0.9317	0.8044	1.158	0.03364
1.22	1.037	0.9247	0.7882	1.173	0.03942
1.24	1.043	0.9178	0.7726	1.188	0.04547
1.26	1.050	0.9108	0.7574	1.203	0.05174
1.28	1.058	0.9038	0.7427	1.217	0.05820
1.30	1.066	0.8969	0.7285	1.231	0.06483
1.32	1.075	0.8899	0.7147	1.245	0.07161
1.34	1.084	0.8829	0.7012	1.259	0.07850
1.36	1.094	0.8760	0.6882	1.273	0.08550
1.38	1.104	0.8690	0.6755	1.286	0.09259
1.40	1.115	0.8621	0.6632	1.300	0.09974
1.42	1.126	0.8551	0.6512	1.313	0.1069
1.44	1.138	0.8482	0.6396	1.326	0.1142
1.46	1.150	0.8413	0.6282	1.339	0.1215
1.48	1.163	0.8345	0.6172	1.352	0.1288
1.50	1.176	0.8276	0.6065	1.365	0.1361
1.52	1.190	0.8208	0.5960	1.377	0.1434
1.54	1.204	0.8139	0.5858	1.389	0.1506
1.56	1.219	0.8072	0.5759	1.402	0.1579
1.58	1.234	0.8004	0.5662	1.414	0.1651
1.60	1.250	0.7937	0.5568	1.425	0.1724
1.62	1.267	0.7870	0.5476	1.437	0.1795
1.64	1.284	0.7803	0.5386	1.449	0.1867
1.66	1.301	0.7736	0.5299	1.460	0.1938
1.68	1.319	0.7670	0.5213	1.471	0.2008
1.70	1.338	0.7605	0.5130	1.482	0.2078
1.72	1.357	0.7539	0.5048	1.494	0.2147
1.74	1.376	0.7474	0.4969	1.504	0.2216
1.76	1.397	0.7410	0.4891	1.515	0.2284
1.78	1.418	0.7345	0.4815	1.526	0.2352
1.80	1.439	0.7282	0.4741	1.536	0.2419

TABLA E.2 Funciones de flujo de la línea de Fanno (*Continuación*)

M	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*	$\bar{f}L_{máx}/D_h$
1.80	1.439	0.7282	0.4741	1.536	0.2419
1.82	1.461	0.7281	0.4668	1.546	0.2485
1.84	1.484	0.7155	0.4597	1.556	0.2551
1.86	1.507	0.7093	0.4528	1.566	0.2616
1.88	1.531	0.7030	0.4460	1.576	0.2680
1.90	1.555	0.6969	0.4394	1.586	0.2743
1.92	1.580	0.6907	0.4329	1.596	0.2806
1.94	1.606	0.6847	0.4265	1.605	0.2868
1.96	1.633	0.6786	0.4203	1.615	0.2930
1.98	1.660	0.6726	0.4142	1.624	0.2990
2.00	1.688	0.6667	0.4083	1.633	0.3050
2.02	1.716	0.6608	0.4024	1.642	0.3109
2.04	1.745	0.6549	0.3967	1.651	0.3168
2.06	1.775	0.6491	0.3911	1.660	0.3225
2.08	1.806	0.6433	0.3856	1.668	0.3282
2.10	1.837	0.6376	0.3802	1.677	0.3339
2.12	1.869	0.6320	0.3750	1.685	0.3394
2.14	1.902	0.6263	0.3698	1.694	0.3449
2.16	1.935	0.6208	0.3648	1.702	0.3503
2.18	1.970	0.6152	0.3598	1.710	0.3556
2.20	2.005	0.6098	0.3549	1.718	0.3609
2.22	2.041	0.6043	0.3502	1.726	0.3661
2.24	2.078	0.5990	0.3455	1.734	0.3712
2.26	2.115	0.5936	0.3409	1.741	0.3763
2.28	2.154	0.5883	0.3364	1.749	0.3813
2.30	2.193	0.5831	0.3320	1.756	0.3862
2.32	2.233	0.5779	0.3277	1.764	0.3911
2.34	2.274	0.5728	0.3234	1.771	0.3959
2.36	2.316	0.5677	0.3193	1.778	0.4006
2.38	2.359	0.5626	0.3152	1.785	0.4053
2.40	2.403	0.5576	0.3111	1.792	0.4099
2.42	2.448	0.5527	0.3072	1.799	0.4144
2.44	2.494	0.5478	0.3033	1.806	0.4189
2.46	2.540	0.5429	0.2995	1.813	0.4233
2.48	2.588	0.5381	0.2958	1.819	0.4277
2.50	2.637	0.5333	0.2921	1.826	0.4320
2.52	2.687	0.5286	0.2885	1.832	0.4362
2.54	2.737	0.5239	0.2850	1.839	0.4404
2.56	2.789	0.5193	0.2815	1.845	0.4445
2.58	2.842	0.5147	0.2781	1.851	0.4486
2.60	2.896	0.5102	0.2747	1.857	0.4526
2.62	2.951	0.5057	0.2714	1.863	0.4565
2.64	3.007	0.5013	0.2682	1.869	0.4604
2.66	3.065	0.4969	0.2650	1.875	0.4643
2.68	3.123	0.4925	0.2619	1.881	0.4681
2.70	3.183	0.4882	0.2588	1.887	0.4718

$\bar{f}L_{máx}/D_h$
0.01451
0.008913
0.004815
0.002057
0.0004947
0.0000
0.0004587
0.001769
0.003838
0.006585
0.009935
0.01382
0.01819
0.02298
0.02814
0.03364
0.03942
0.04547
0.05174
0.05820
0.06483
0.07161
0.07850
0.08550
0.09259
0.09974
0.1069
0.1142
0.1215
0.1288
0.1361
0.1434
0.1506
0.1579
0.1651
0.1724
0.1795
0.1867
0.1938
0.2008
0.2078
0.2147
0.2216
0.2284
0.2352
0.2419

TABLA E.2 Funciones de flujo de la línea de Fanno (*Continuación*)

M	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*	$\bar{f}L_{máx}/D_h$
2.70	3.183	0.4882	0.2588	1.887	0.4718
2.72	3.244	0.4839	0.2558	1.892	0.4755
2.74	3.306	0.4797	0.2528	1.989	0.4792
2.76	3.370	0.4755	0.2499	1.903	0.4827
2.78	3.434	0.4714	0.2470	1.909	0.4863
2.80	3.500	0.4673	0.2441	1.914	0.4898
2.82	3.567	0.4632	0.2414	1.919	0.4932
2.84	3.636	0.4592	0.2386	1.925	0.4966
2.86	3.706	0.4553	0.2359	1.930	0.5000
2.88	3.777	0.4513	0.2333	1.935	0.5033
2.90	3.850	0.4474	0.2307	1.940	0.5065
2.92	3.924	0.4436	0.2281	1.945	0.5097
2.94	3.999	0.4398	0.2256	1.950	0.5129
2.96	4.076	0.4360	0.2231	1.954	0.5160
2.98	4.155	0.4323	0.2206	1.959	0.5191
3.00	4.235	0.4286	0.2182	1.964	0.5222
3.50	6.79	0.3478	0.1685	2.064	0.5864
4.00	10.72	0.2857	0.1336	2.138	0.6331
4.50	16.56	0.2376	0.1083	2.194	0.6676
5.00	25.00	0.2000	0.08944	2.236	0.6938

TABLA E.3 Funciones de flujo de la línea de Rayleigh (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*	$\bar{f}L_{máx}/D_h$
0.00	0.0000	1.268	0.0000	2.400	0.0000	0.4718
0.02	0.001918	1.268	0.002301	2.399	0.0009595	0.4755
0.04	0.007648	1.267	0.009175	2.395	0.003831	0.4792
0.06	0.01712	1.265	0.02053	2.388	0.008597	0.4827
0.08	0.03021	1.262	0.03621	2.379	0.01522	0.4863
0.10	0.04678	1.259	0.05602	2.367	0.02367	0.4898
0.12	0.06661	1.255	0.07970	2.353	0.03388	0.4932
0.14	0.08947	1.251	0.1070	2.336	0.04578	0.4966
0.16	0.1151	1.246	0.1374	2.317	0.05931	0.5000
0.18	0.1432	1.241	0.1708	2.296	0.07438	0.5033
0.20	0.1736	1.235	0.2066	2.273	0.09091	0.5065
0.22	0.2057	1.228	0.2445	2.248	0.1088	0.5097
0.24	0.2395	1.221	0.2841	2.221	0.1279	0.5129
0.26	0.2745	1.214	0.3250	2.193	0.1482	0.5160
0.28	0.3104	1.206	0.3667	2.163	0.1696	0.5191
0.30	0.3469	1.199	0.4089	2.131	0.1918	0.5222
0.32	0.3837	1.190	0.4512	2.099	0.2149	0.5864
0.34	0.4206	1.182	0.4933	2.066	0.2388	0.6331
0.36	0.4572	1.174	0.5348	2.031	0.2633	0.6676
0.38	0.4935	1.165	0.5755	1.996	0.2883	0.6938
0.40	0.5290	1.157	0.6152	1.961	0.3137	
0.42	0.5638	1.148	0.6535	1.925	0.3395	
0.44	0.5975	1.139	0.6903	1.888	0.3656	
0.46	0.6301	1.131	0.7254	1.852	0.3918	
0.48	0.6614	1.122	0.7587	1.815	0.4181	
0.50	0.6914	1.114	0.7901	1.778	0.4445	
0.52	0.7199	1.106	0.8196	1.741	0.4708	
0.54	0.7470	1.098	0.8470	1.704	0.4970	
0.56	0.7725	1.090	0.8723	1.668	0.5230	
0.58	0.7965	1.083	0.8955	1.632	0.5489	
0.60	0.8189	1.075	0.9167	1.596	0.5745	
0.62	0.8398	1.068	0.9359	1.560	0.5998	
0.64	0.8592	1.061	0.9530	1.525	0.6248	
0.66	0.8771	1.055	0.9682	1.491	0.6494	
0.68	0.8935	1.049	0.9814	1.457	0.6737	
0.70	0.9085	1.043	0.9929	1.424	0.6975	
0.72	0.9221	1.038	1.003	1.391	0.7209	
0.74	0.9344	1.033	1.011	1.359	0.7439	
0.76	0.9455	1.028	1.017	1.327	0.7665	
0.78	0.9553	1.023	1.022	1.296	0.7885	
0.80	0.9639	1.019	1.025	1.266	0.8101	
0.82	0.9715	1.016	1.028	1.236	0.8313	
0.84	0.9781	1.012	1.029	1.207	0.8519	
0.86	0.9836	1.010	1.028	1.179	0.8721	
0.88	0.9883	1.007	1.027	1.152	0.8918	
0.90	0.9921	1.005	1.025	1.125	0.9110	

TABLA E.3 Funciones de flujo de la línea de Rayleigh (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*
0.90	0.9921	1.005	1.025	1.125	0.9110
0.92	0.9951	1.003	1.021	1.098	0.9297
0.94	0.9973	1.002	1.017	1.073	0.9480
0.96	0.9988	1.001	1.012	1.048	0.9658
0.98	0.9997	1.000	1.006	1.024	0.9831
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.02	0.9997	1.000	0.9930	0.9770	1.016
1.04	0.9990	1.001	0.9855	0.9546	1.032
1.06	0.9977	1.002	0.9776	0.9328	1.048
1.08	0.9960	1.003	0.9691	0.9115	1.063
1.10	0.9939	1.005	0.9603	0.8909	1.078
1.12	0.9915	1.007	0.9512	0.8708	1.092
1.14	0.9887	1.010	0.9417	0.8512	1.106
1.16	0.9856	1.012	0.9320	0.8322	1.120
1.18	0.9823	1.016	0.9220	0.8137	1.133
1.20	0.9787	1.019	0.9119	0.7958	1.146
1.22	0.9749	1.023	0.9015	0.7783	1.158
1.24	0.9709	1.028	0.8911	0.7613	1.171
1.26	0.9668	1.033	0.8805	0.7447	1.182
1.28	0.9624	1.038	0.8699	0.7287	1.194
1.30	0.9580	1.044	0.8592	0.7130	1.205
1.32	0.9534	1.050	0.8484	0.6978	1.216
1.34	0.9487	1.056	0.8377	0.6830	1.226
1.36	0.9440	1.063	0.8270	0.6686	1.237
1.38	0.9392	1.070	0.8161	0.6546	1.247
1.40	0.9343	1.078	0.8054	0.6410	1.256
1.42	0.9293	1.086	0.7947	0.6278	1.266
1.44	0.9243	1.094	0.7841	0.6149	1.275
1.46	0.9193	1.103	0.7735	0.6024	1.284
1.48	0.9143	1.112	0.7629	0.5902	1.293
1.50	0.9093	1.122	0.7525	0.5783	1.301
1.52	0.9042	1.132	0.7422	0.5668	1.310
1.54	0.8992	1.142	0.7319	0.5555	1.318
1.56	0.8942	1.153	0.7217	0.5446	1.325
1.58	0.8892	1.164	0.7117	0.5339	1.333
1.60	0.8842	1.176	0.7017	0.5236	1.340
1.62	0.8792	1.188	0.6919	0.5135	1.348
1.64	0.8743	1.200	0.6822	0.5036	1.355
1.66	0.8694	1.213	0.6726	0.4941	1.361
1.68	0.8645	1.226	0.6631	0.4847	1.368
1.70	0.8597	1.240	0.6538	0.4756	1.357
1.72	0.8549	1.255	0.6446	0.4668	1.381
1.74	0.8502	1.269	0.6355	0.4581	1.387
1.76	0.8455	1.284	0.6265	0.4497	1.393
1.78	0.8409	1.300	0.6177	0.4415	1.399
1.80	0.8363	1.316	0.6089	0.4335	1.405

as ideal, $k = 1.4$)

V/V^*
0.9110
0.9297
0.9480
0.9658
0.9831
1.000
1.016
1.032
1.048
1.063
1.078
1.092
1.106
1.120
1.133
1.146
1.158
1.171
1.182
1.194
1.205
1.216
1.226
1.237
1.247
1.256
1.266
1.275
1.284
1.293
1.301
1.310
1.318
1.325
1.333
1.340
1.348
1.355
1.361
1.368
1.357
1.381
1.387
1.393
1.399
1.405

TABLA E.3 Funciones de flujo de la línea de Rayleigh (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*
1.80	0.8363	1.316	0.6089	0.4335	1.405
1.82	0.8317	1.332	0.6004	0.4257	1.410
1.84	0.8273	1.349	0.5919	0.4181	1.416
1.86	0.8228	1.367	0.5836	0.4107	1.421
1.88	0.8185	1.385	0.5754	0.4035	1.426
1.90	0.8141	1.403	0.5673	0.3964	1.431
1.92	0.8099	1.422	0.5594	0.3896	1.435
1.94	0.8057	1.442	0.5516	0.3828	1.441
1.96	0.8015	1.462	0.5439	0.3763	1.446
1.98	0.7974	1.482	0.5364	0.3699	1.450
2.00	0.7934	1.503	0.5289	0.3636	1.455
2.02	0.7894	1.525	0.5216	0.3575	1.459
2.04	0.7855	1.547	0.5144	0.3516	1.463
2.06	0.7816	1.569	0.5074	0.3458	1.467
2.08	0.7778	1.592	0.5004	0.3401	1.471
2.10	0.7741	1.616	0.4936	0.3345	1.475
2.12	0.7704	1.640	0.4868	0.3291	1.479
2.14	0.7667	1.665	0.4802	0.3238	1.483
2.16	0.7631	1.691	0.4737	0.3186	1.487
2.18	0.7596	1.717	0.4673	0.3136	1.490
2.20	0.7561	1.743	0.4611	0.3086	1.494
2.22	0.7527	1.771	0.4549	0.3038	1.497
1.24	0.7493	1.799	0.4488	0.2991	1.501
2.26	0.7460	1.827	0.4429	0.2945	1.504
2.28	0.7428	1.856	0.4370	0.2899	1.507
2.30	0.7395	1.886	0.4312	0.2855	1.510
2.32	0.7364	1.917	0.4256	0.2812	1.513
2.34	0.7333	1.948	0.4200	0.2770	1.517
2.36	0.7302	1.979	0.4145	0.2728	1.520
2.38	0.7272	2.012	0.4091	0.2688	1.522
2.40	0.7242	2.045	0.4038	0.2648	1.525
2.42	0.7213	2.079	0.3986	0.2609	1.528
2.44	0.7184	2.114	0.3935	0.2571	1.531
2.46	0.7156	2.149	0.3885	0.2534	1.533
2.48	0.7128	2.185	0.3836	0.2497	1.536
2.50	0.7101	2.222	0.3787	0.2462	1.539
2.52	0.7074	2.259	0.3739	0.2427	1.541
2.54	0.7047	2.298	0.3692	0.2392	1.543
2.56	0.7021	2.337	0.3646	0.2359	1.546
2.58	0.6995	2.377	0.3601	0.2326	1.548
2.60	0.6970	2.418	0.3556	0.2294	1.551
2.62	0.6945	2.459	0.3512	0.2262	1.553
2.64	0.6921	2.502	0.3469	0.2231	1.555
2.66	0.6896	2.545	0.3427	0.2201	1.557
2.68	0.6873	2.589	0.3385	0.2171	1.559
2.70	0.6849	2.634	0.3344	0.2142	1.561

TABLA E.3 Funciones de flujo de la línea de Rayleigh (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

M	T_0/T_0^*	p_0/p_0^*	T/T^*	p/p^*	V/V^*
2.70	0.6849	2.634	0.3344	0.2142	1.561
2.72	0.6826	2.680	0.3304	0.2113	1.563
2.74	0.6804	2.727	0.3264	0.2085	1.565
2.76	0.6782	2.775	0.3225	0.2058	1.567
2.78	0.6760	2.824	0.3186	0.2031	1.569
2.80	0.6738	2.873	0.3149	0.2004	1.571
2.82	0.6717	2.924	0.3111	0.1978	1.573
2.84	0.6696	2.975	0.3075	0.1953	1.575
2.86	0.6675	3.028	0.3039	0.1927	1.577
2.88	0.6655	3.081	0.3004	0.1903	1.578
2.90	0.6635	3.136	0.2969	0.1879	1.580
2.92	0.6615	3.191	0.2934	0.1855	1.582
2.94	0.6596	3.248	0.2901	0.1832	1.583
2.96	0.6577	3.306	0.2868	0.1809	1.585
2.98	0.6558	3.365	0.2835	0.1787	1.587
3.00	0.6540	3.424	0.2803	0.1765	1.588
3.50	0.6158	5.328	0.2142	0.1322	1.620
4.00	0.5891	8.227	0.1683	0.1026	1.641
4.50	0.5698	12.50	0.1354	0.08177	1.656
5.00	0.5556	18.63	0.1111	0.06667	1.667

jas ideal, $k = 1.4$)

V/V^*
1.561
1.563
1.565
1.567
1.569
1.571
1.573
1.575
1.577
1.578
1.580
1.582
1.583
1.585
1.587
1.588
1.620
1.641
1.656
1.667

TABLA E.4 Funciones de flujo de onda de choque normal (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

M_1	M_2	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.02	0.9805	1.000	1.013	1.047	1.033
1.04	0.9620	0.9999	1.026	1.095	1.067
1.06	0.9444	0.9998	1.039	1.144	1.101
1.08	0.9277	0.9994	1.052	1.194	1.135
1.10	0.9118	0.9989	1.065	1.245	1.169
1.12	0.8966	0.9982	1.078	1.297	1.203
1.14	0.8820	0.9973	1.090	1.350	1.238
1.16	0.8682	0.9961	1.103	1.403	1.272
1.18	0.8549	0.9946	1.115	1.458	1.307
1.20	0.8422	0.9928	1.128	1.513	1.342
1.22	0.8300	0.9907	1.141	1.570	1.376
1.24	0.8183	0.9884	1.153	1.627	1.411
1.26	0.8071	0.9857	1.166	1.686	1.446
1.28	0.7963	0.9827	1.178	1.745	1.481
1.30	0.7860	0.9794	1.191	1.805	1.516
1.32	0.7760	0.9757	1.204	1.866	1.551
1.34	0.7664	0.9718	1.216	1.928	1.585
1.36	0.7572	0.9676	1.229	1.991	1.620
1.38	0.7483	0.9630	1.242	2.055	1.655
1.40	0.7397	0.9582	1.255	2.120	1.690
1.42	0.7314	0.9531	1.268	2.186	1.724
1.44	0.7235	0.9477	1.281	2.253	1.759
1.46	0.7157	0.9420	1.294	2.320	1.793
1.48	0.7083	0.9360	1.307	2.389	1.828
1.50	0.7011	0.9298	1.320	2.458	1.862
1.52	0.6941	0.9233	1.334	2.529	1.896
1.54	0.6874	0.9166	1.347	2.600	1.930
1.56	0.6809	0.9097	1.361	2.673	1.964
1.58	0.6746	0.9026	1.374	2.476	1.998
1.60	0.6684	0.8952	1.388	2.820	2.032
1.62	0.6625	0.8876	1.402	2.895	2.065
1.64	0.6568	0.8799	1.416	2.971	2.099
1.66	0.6512	0.8720	1.430	3.048	2.132
1.68	0.6458	0.8640	1.444	3.126	2.165
1.70	0.6406	0.8557	1.458	3.205	2.198
1.72	0.6355	0.8474	1.473	3.285	2.230
1.74	0.6305	0.8389	1.487	3.366	2.263
1.76	0.6257	0.8302	1.502	3.447	2.295
1.78	0.6210	0.8215	1.517	3.530	2.327
1.80	0.6165	0.8127	1.532	3.613	2.359
1.82	0.6121	0.8038	1.547	3.698	2.391
1.84	0.6078	0.7947	1.562	3.783	2.422
1.86	0.6036	0.7857	1.577	3.870	2.454
1.88	0.5996	0.7766	1.592	3.957	2.485
1.90	0.5956	0.7674	1.608	4.045	2.516

TABLA E.4 Funciones de flujo de onda de choque normal (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

M_1	M_2	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
1.90	0.5956	0.7674	1.608	4.045	2.516
1.92	0.5918	0.7581	1.624	4.134	2.546
1.94	0.5880	0.7488	1.639	4.224	2.577
1.96	0.5844	0.7395	1.655	4.315	2.607
1.98	0.5808	0.7302	1.671	4.407	2.637
2.00	0.5774	0.7209	1.687	4.500	2.667
2.02	0.5740	0.7115	1.704	4.594	2.696
2.04	0.5707	0.7022	1.720	4.689	2.725
2.06	0.5675	0.6928	1.737	4.784	2.755
2.08	0.5643	0.6835	1.754	4.881	2.783
2.10	0.5613	0.6742	1.770	4.978	2.812
2.12	0.5583	0.6649	1.787	5.077	2.840
2.14	0.5554	0.6557	1.805	5.176	2.868
2.16	0.5525	0.6464	1.822	5.277	2.896
2.18	0.5498	0.6373	1.839	5.378	2.924
2.20	0.5471	0.6281	1.857	5.480	2.951
2.22	0.5444	0.6191	1.875	5.583	2.978
2.24	0.5418	0.6100	1.892	5.687	3.005
2.26	0.5393	0.6011	1.910	5.792	3.032
2.28	0.5368	0.5921	1.929	5.898	3.058
2.30	0.5344	0.5833	1.947	6.005	3.085
2.32	0.5321	0.5745	1.965	6.113	3.110
2.34	0.5297	0.5658	1.984	6.222	3.136
2.36	0.5275	0.5572	2.002	6.331	3.162
2.38	0.5253	0.5486	2.021	6.442	3.187
2.40	0.5231	0.5402	2.040	6.553	3.212
2.42	0.5210	0.5318	2.059	6.666	3.237
2.44	0.5189	0.5234	2.079	6.779	3.261
2.46	0.5169	0.5152	2.098	6.894	3.285
2.48	0.5149	0.5071	2.118	7.009	3.310
2.50	0.5130	0.4990	2.137	7.125	3.333
2.52	0.5111	0.4910	2.157	7.242	3.357
2.54	0.5092	0.4832	2.177	7.360	3.380
2.56	0.5074	0.4754	2.198	7.479	3.403
2.58	0.5056	0.4677	2.218	7.599	3.426
2.60	0.5039	0.4601	2.238	7.720	3.449
2.62	0.5022	0.4526	2.259	7.842	3.471
2.64	0.5005	0.4452	2.280	7.965	3.494
2.66	0.4988	0.4379	2.301	8.088	3.516
2.68	0.4972	0.4307	2.322	8.213	3.537
2.70	0.4956	0.4236	2.343	8.338	3.559
2.72	0.4941	0.4166	2.364	8.465	3.580
2.74	0.4926	0.4097	2.386	8.592	3.601
2.76	0.4911	0.4028	2.407	8.721	3.622
2.78	0.4897	0.3961	2.429	8.850	3.643
2.80	0.4882	0.3895	2.451	8.980	3.664

as ideal,

ρ_2/ρ_1
2.516
2.546
2.577
2.607
2.637
2.667
2.696
2.725
2.755
2.783
2.812
2.840
2.868
2.896
2.924
2.951
2.978
3.005
3.032
3.058
3.085
3.110
3.136
3.162
3.187
3.212
3.237
3.261
3.285
3.310
3.333
3.357
3.380
3.403
3.426
3.449
3.471
3.494
3.516
3.537
3.559
3.580
3.601
3.622
3.643
3.664

TABLA E.4 Funciones de flujo de onda de choque normal (flujo unidimensional, gas ideal, $k = 1.4$)

M_1	M_2	p_{0_2}/p_{0_1}	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
2.80	0.4882	0.3895	2.451	8.980	3.664
2.82	0.4868	0.3829	2.473	9.111	3.684
2.84	0.4854	0.3765	2.496	9.243	3.704
2.86	0.4840	0.3701	2.518	9.376	3.724
2.88	0.4827	0.3639	2.540	9.510	3.743
2.90	0.4814	0.3577	2.563	9.645	3.763
2.92	0.4801	0.3517	2.586	9.781	3.782
2.94	0.4788	0.3457	2.609	9.918	3.801
2.96	0.4776	0.3398	2.632	10.06	3.820
2.98	0.4764	0.3340	2.656	10.19	3.839
3.00	0.4752	0.3283	2.679	10.33	3.857
3.10	0.4695	0.3012	2.799	11.05	3.947
3.20	0.4644	0.2762	2.922	11.78	4.031
3.30	0.4596	0.2533	3.049	12.54	4.112
3.40	0.4552	0.2322	3.180	13.32	4.188
3.50	0.4512	0.2130	3.315	14.13	4.261
3.60	0.4474	0.1953	3.454	14.95	4.330
3.70	0.4440	0.1792	3.596	15.81	4.395
3.80	0.4407	0.1645	3.743	16.68	4.457
3.90	0.4377	0.1510	3.893	17.58	4.516
4.00	0.4350	0.1388	4.047	18.50	4.571
4.10	0.4324	0.1276	4.205	19.45	4.624
4.20	0.4299	0.1173	4.367	20.41	4.675
4.30	0.4277	1.1080	4.532	21.41	4.723
4.40	0.4255	0.09948	4.702	22.42	4.768
4.50	0.4236	0.09170	4.875	23.46	4.812
4.60	0.4127	0.08459	5.052	24.52	4.853
4.70	0.4199	0.07809	5.233	25.61	4.893
4.80	0.4183	0.07214	5.418	26.71	4.930
4.90	0.4167	0.06670	5.607	27.85	4.966
5.00	0.4152	0.06172	5.800	29.00	5.000

Apéndice F

Análisis de la incertidumbre experimental

F-1 INTRODUCCIÓN

Los resultados de las pruebas experimentales a menudo se utilizan en el análisis y el diseño en ingeniería. No todos los datos son igualmente buenos; la validez de los datos debe documentarse antes de que los resultados de las pruebas se usen para diseñar. El análisis de la incertidumbre es el procedimiento empleado para cuantificar la validez y exactitud de los datos.

El análisis de la incertidumbre también es útil durante el diseño de experimentos. Un estudio cuidadoso puede dilucidar el origen potencial de errores inaceptables y sugerir métodos de medición mejorados.

F-2 TIPOS DE ERROR

Siempre se presentan errores cuando se efectúan mediciones experimentales. Además de errores propios del experimentador, el error experimental puede ser de dos tipos. El error fijo (o sistemático) ocasiona que las mediciones repetidas sean erróneas en la misma cantidad en cada ensayo. Este tipo de error es el mismo para cada lectura y puede eliminarse mediante la calibración o corrección apropiada. El error aleatorio (irrepetibilidad) es diferente en cada lectura y por ello no puede eliminarse. Los factores que introducen el error aleatorio son inciertos por su naturaleza. El objetivo del análisis de incertidumbre es estimar el probable error aleatorio en resultados experimentales.

Suponemos que el equipo se ha construido correctamente y calibrado de manera adecuada para eliminar los errores fijos. Asimismo, consideramos que la instrumentación tiene resolución adecuada y que las fluctuaciones en las lecturas no son excesivas. Suponemos también que se tiene cuidado al realizar y registrar las observaciones de manera que sólo quedan los errores aleatorios.

F-3 ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

Nuestra meta es estimar la incertidumbre en las mediciones experimentales y de resultados calculados debida a errores aleatorios. El procedimiento consta de tres pasos:

1. Estimar el intervalo de la incertidumbre para cada cantidad medida.
2. Establecer el límite de confianza en cada medición.
3. Analizar la propagación de la incertidumbre en los resultados calculados a partir de los datos experimentales.

A continuación describiremos el procedimiento de cada paso e ilustraremos aplicaciones con ejemplos.

Paso 1. *Estimación del intervalo de incertidumbre de la medición.* Designe las variables medidas en un experimento como $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Una posible manera para encontrar el intervalo de la incertidumbre correspondiente a cada variable sería repetir cada medición varias veces. El resultado sería una distribución de datos para cada variable. Los errores aleatorios en las mediciones usualmente producen una distribución *normal (gausiana)* de frecuencias de valores medidos. La dispersión de los datos en una distribución normal está caracterizada por la desviación estándar, σ. El intervalo de la incertidumbre para cada variable medida, x_i, puede establecer como $\pm n\sigma_i$, donde $n = 1, 2$ o 3.

Para datos distribuidos normalmente, alrededor de 99 por ciento de los valores medidos de x_i yacen dentro de $\pm 3\sigma_i$ del valor medio, 95 por ciento se encuentra dentro de $\pm 2\sigma_i$ y 50 por ciento dentro de $\pm\sigma_i$ del valor medio del conjunto de datos [1]. De tal modo, sería posible cuantificar los errores esperados dentro de cualquier *límite de confianza* deseado si se contara con un conjunto de datos estadísticamente significativo.

El método de mediciones repetidas suele ser impráctico. En muchas aplicaciones no es posible obtener suficientes datos para una muestra estadísticamente significativa debido al tiempo y costo implicados. Sin embargo, la distribución normal sugiere varios conceptos importantes:

1. Los pequeños errores son más probables que los grandes.
2. Los errores positivos y negativos son casi igualmente probables.
3. No es posible especificar un error finito máximo.

Una situación más común en el trabajo de ingeniería es un experimento de "una sola muestra", donde sólo se efectúa una medición en cada punto [2]. Una estimación razonable de la incertidumbre en la medición, incertidumbre debida a errores aleatorios en un experimento de una sola muestra, suele ser más menos la mitad de la división más pequeña de la escala (el *conteo mínimo*) del instrumento. Sin embargo, este planteamiento también debe utilizarse con precaución, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO F.1 Incertidumbre en la lectura de un barómetro

La altura observada de la columna de un barómetro de mercurio es $h = 752.6$ mm. El conteo mínimo en la escala de vernier es 0.1 mm, por lo que podría estimarse el probable error de la medición como ± 0.05 mm.

Una medición probablemente no se efectuaría tan precisamente. Las regletas y el menisco del barómetro deben alinearse a simple vista. La regleta tiene un conteo mínimo de 1 mm. Como una

estimación conservadora, podría efectuarse una medición hasta el milímetro más cercano. El valor probable de una sola medida se expresaría entonces como 752.6 ±0.5 mm. La incertidumbre relativa en la altura barométrica se establecería como

$$u_h = \pm \frac{0.5 \text{ mm}}{752.6 \text{ mm}} = \pm 0.000664 \quad \text{o} \quad \pm 0.0664 \text{ por ciento}$$

Comentarios:

1. Un intervalo de incertidumbre de ±0.1 por ciento corresponde a un resultado especificado hasta tres cifras significativas; esta precisión es suficiente para la mayor parte del trabajo de ingeniería.
2. La medición de la altura del barómetro fue precisa, como muestra la estimación de la incertidumbre. ¿Pero fue exacta? A temperaturas ambiente típicas, ¡la lectura observada del barómetro debe reducirse por una corrección de temperatura de casi 3 mm! Éste es un ejemplo de un error fijo que requiere un factor de corrección.

Paso 2. *Establecer el límite de confianza en cada medición.* El intervalo de incertidumbre de una medición debe establecerse a probabilidades específicas. Por ejemplo, podría escribirse $h = 752.6 \pm 0.5$ mm (20 a 1). Esto significa que uno está dispuesto a apostar 20 a 1 que la altura de la columna de mercurio en realidad está adentro de ±0.5 mm del valor establecido. Debe ser evidente [3] que "... la especificación de tales probabilidades sólo puede efectuarla el experimentador con base en ... una experiencia de laboratorio total. No hay sustituto para el juicio acertado de la ingeniería de sonido al estimar la incertidumbre de una variable medida."

El enunciado del intervalo de confianza se basa en el concepto de desviación estándar para una distribución normal. Probabilidades de 100 a 1 corresponden a $\pm 3\sigma$; se espera que 99 por ciento de todas las lecturas futuras caerán dentro del intervalo. Probabilidades de 20 a 1 corresponden a $\pm 2\sigma$ y probabilidades de 2 a 1 corresponden a límites de confianza de $\pm\sigma$. Probabilidades de 20 a 1 son las que por lo común se emplean en el trabajo de ingeniería.

Paso 3. *Analizar la propagación de la incertidumbre en los cálculos.* Suponga que se efectúan en el laboratorio mediciones de variables independientes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La incertidumbre relativa de cada cantidad medida independientemente se estima como u_i. Las mediciones se emplean para calcular algún resultado, R, para el experimento. Deseamos analizar cuántos errores en las x_i *se propagan* en el cálculo de R a partir de valores medidos.

En general, R puede expresarse matemáticamente como $R = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El efecto sobre R de un error al medir una x_i individual puede estimarse por analogía con la derivada de una función [4]. Una variación, δx_i, en x_i provocaría que R variara de acuerdo con

$$\delta R_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i$$

En las aplicaciones, es conveniente normalizar esta ecuación dividiendo entre R para obtener

$$\frac{\delta R_i}{R} = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i}\delta x_i = \frac{x_i}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\delta x_i}{x_i} \tag{F.1}$$

La ecuación F.1 podría utilizarse para estimar el intervalo de incertidumbre en el resultado debido a las variaciones en x_i. Para hacer esto, se sustituye el intervalo de incertidumbre para x_i

$$u_{R_i} = \frac{x_i}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i} u_{x_i} \tag{F.2}$$

¿Cómo estimamos la incertidumbre en R debida a los efectos combinados de los intervalos de incertidumbre en todas las x_i? El intervalo de incertidumbre en cada variable tiene un rango de valores. Es improbable que todas tengan valores adversos al mismo tiempo. Puede demostrarse [2] que la mejor representación es

$$u_R = \pm\left[\left(\frac{x_1}{R}\frac{\partial R}{\partial x_1}u_1\right)^2 + \left(\frac{x_2}{R}\frac{\partial R}{\partial x_2}u_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{R}\frac{\partial R}{\partial x_n}u_n\right)^2\right]^{1/2} \tag{F.3}$$

EJEMPLO F.2 Incertidumbre en el volumen de un cilindro

Obtenga una expresión para la incertidumbre en la determinación del volumen de un cilindro a partir de mediciones de su radio y altura. El volumen de un cilindro en términos del radio y la altura es

$$\forall = \forall(r, h) = \pi r^2 h$$

Diferenciando, obtenemos

$$d\forall = \frac{\partial \forall}{\partial r}dr + \frac{\partial \forall}{\partial h}dh = 2\pi r h\ dr + \pi r^2 dh$$

puesto que

$$\frac{\partial \forall}{\partial r} = 2\pi r h \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \forall}{\partial h} = \pi r^2$$

De la ecuación F.2, la incertidumbre fraccionaria debida al radio es

$$u_{\forall,r} = \frac{\delta \forall_r}{\forall} = \frac{r}{\forall}\frac{\partial \forall}{\partial r}u_r = \frac{r}{\pi r^2 h}(2\pi r h)u_r = 2u_r$$

y la incertidumbre debida a la altura es

$$u_{\forall,h} = \frac{\delta \forall_h}{\forall} = \frac{h}{\forall}\frac{\partial \forall}{\partial h}u_h = \frac{h}{\pi r^2 h}(\pi r^2)u_h = u_h$$

La incertidumbre combinada en el volumen es entonces

$$u_{\forall} = \pm\,[(2u_r)^2 + (u_h)^2]^{1/2} \tag{F.4}$$

Comentario:
El coeficiente 2, en la ecuación F.4, muestra que la incertidumbre en la medición del radio del cilindro tiene un efecto mayor que la incertidumbre al medir la altura. Esto es cierto debido a que el radio se eleva al cuadrado en la ecuación para el volumen.

F-4 APLICACIONES A DATOS

Las aplicaciones a datos obtenidos de mediciones de laboratorio se ilustran en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO F.3 Incertidumbre en la relación de flujo másico de un líquido

La relación de flujo de una masa de agua que pasa por un tubo se va a determinar recogiendo agua en un vaso de laboratorio. La relación de flujo másico se calcula a partir de la masa neta de agua recogida dividida por el intervalo de tiempo,

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \tag{F.5}$$

donde $\Delta m = m_f - m_e$. Los errores estimados para las cantidades medidas son

Masa del vaso lleno, $m_f = 400 \pm 2$ g (20 a 1)

Masa del vaso vacío, $m_e = 200 \pm 2$ g (20 a 1)

Intervalo de tiempo de recolección, $\Delta t = 10 \pm 0.2$ s (20 a 1)

Las incertidumbres relativas en las cantidades medidas son

$$u_{m_f} = \pm \frac{2 \text{ g}}{400 \text{ g}} = \pm 0.005$$

$$u_{m_e} = \pm \frac{2 \text{ g}}{200 \text{ g}} = \pm 0.01$$

$$u_{\Delta t} = \pm \frac{0.2 \text{ s}}{10 \text{ s}} = \pm 0.02$$

La incertidumbre relativa en el valor medido de la masa neta se calcula de la ecuación F.3 como

$$u_{\Delta m} = \pm \left[\left(\frac{m_f}{\Delta m} \frac{\partial \Delta m}{\partial m_f} u_{m_f} \right)^2 + \left(\frac{m_e}{\Delta m} \frac{\partial \Delta m}{\partial m_e} u_{m_e} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \pm \{[(2)(1)(\pm 0.005)]^2 + [(1)(-1)(\pm 0.01)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{\Delta m} = \pm 0.0141$$

Debido a que $\dot{m} = \dot{m}(\Delta m, \Delta t)$, podemos escribir la ecuación F.3 como

$$u_{\dot{m}} = \pm \left[\left(\frac{\Delta m}{\dot{m}} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta m} u_{\Delta m} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\dot{m}} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta t} u_{\Delta t} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{F.6}$$

Los términos de la derivada parcial requerida son

$$\frac{\Delta m}{\dot{m}} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta m} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta t}{\dot{m}} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta t} = -1$$

Al sustituir en la ecuación F.6 obtenemos

$$u_{\dot{m}} = \pm \{[(1)(\pm 0.0141)]^2 + [(-1)(\pm 0.02)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{\dot{m}} = \pm 0.0245 \quad \text{o} \quad \pm 2.45 \text{ por ciento (20 a 1)}$$

ıido

:ogiendo agua
a neta de agua

Comentario:
El intervalo de incertidumbre del 2 por ciento en la medida del tiempo es el que contribuye de manera más importante al intervalo de incertidumbre en el resultado.

EJEMPLO F.4 Incertidumbre en el número de Reynolds para flujo de agua

(F.5)

El número de Reynolds se va a calcular para el flujo de agua en un tubo. La ecuación para calcular el número de Reynolds es

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\pi \mu D} = Re(\dot{m}, D, \mu) \tag{F.7}$$

Hemos considerado el intervalo de la incertidumbre al calcular la relación de flujo másico. ¿Qué hay acerca de las incertidumbres en μ y D? El diámetro del tubo está dado como $D = 6.35$ mm. ¿Suponemos que este valor es exacto? El diámetro podría medirse hasta el 0.1 mm más cercano. Si es así, la incertidumbre relativa en el diámetro se estimaría como

$$u_D = \pm \frac{0.05 \text{ mm}}{6.35 \text{ mm}} = \pm 0.00787 \quad \text{o} \quad \pm 0.787 \text{ por ciento}$$

La viscosidad del agua depende de la temperatura. Ésta se estima como $T = 24 \pm 0.5$ C. ¿Cómo afectará la incertidumbre en la temperatura a la incertidumbre en μ? Una forma de estimar esto es escribir

$$u_{\mu(T)} = \pm \frac{\delta \mu}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} (\pm \delta T) \tag{F.8}$$

ción F.3 como

La derivada puede estimarse de datos tabulados de la viscosidad cerca de la temperatura nominal de 24 C. Por tanto,

$$\frac{d\mu}{dT} \approx \frac{\Delta \mu}{\Delta T} = \frac{\mu(25 \text{ C}) - \mu(23 \text{ C})}{(25 - 23) \text{ C}}$$

$$= (0.000890 - 0.000933) \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{1}{2 \text{ C}}$$

$$\frac{d\mu}{dT} = -2.15 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2 \cdot \text{C}$$

(F.6)

Se deduce de la ecuación F.8 que la incertidumbre en la viscosidad debida a la temperatura es

$$u_{\mu(T)} = \frac{1}{0.000911} \frac{\text{m}^2}{\text{N} \cdot \text{s}} \times -2.15 \times 10^{-5} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2 \cdot \text{C}} \times (\pm 0.5 \text{ C})$$

$$u_{\mu(T)} = \pm 0.0118 \quad \text{o} \quad \pm 1.18 \text{ por ciento}$$

Los datos tabulados de viscosidad también tienen cierta incertidumbre en sí mismos. Si ésta es ± 1.0 por ciento, una estimación para la incertidumbre total de la viscosidad es

$$u_\mu = \pm [(0.01)^2 + (\pm 0.0118)^2]^{1/2} = \pm 0.0155 \quad \text{o} \quad \pm 1.55 \text{ por ciento}$$

Las incertidumbres en la relación de flujo másico, el diámetro del tubo y la viscosidad, necesarios para calcular el intervalo de incertidumbre correspondiente al número de Reynolds calculado, ahora se conocen. Las derivadas parciales requeridas, determinadas a partir de la ecuación F.7, son

$$\frac{\dot{m}}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \dot{m}} = \frac{\dot{m}}{Re}\frac{4}{\pi \mu D} = \frac{Re}{Re} = 1$$

$$\frac{\mu}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \mu} = \frac{\mu}{Re}(-1)\frac{4\dot{m}}{\pi \mu^2 D} = -\frac{Re}{Re} = -1$$

$$\frac{D}{Re}\frac{\partial Re}{\partial D} = \frac{D}{Re}(-1)\frac{4\dot{m}}{\pi \mu D^2} = -\frac{Re}{Re} = -1$$

La sustitución en la ecuación F.3 produce

$$u_{Re} = \pm \{[(1)(\pm 0.0245)]^2 + [(-1)(\pm 0.0155)]^2 + [(-1)(\pm 0.00787)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{Re} = \pm 0.0300 \quad \text{o} \quad \pm 3.00 \text{ por ciento}$$

Comentario:
Los ejemplos F.3 y F.4 ilustran dos puntos importantes para el diseño de experimentos. Primero, la masa de agua colectada, Δm, se calcula a partir de dos cantidades medidas, m_f y m_e. Para cualquier intervalo de incertidumbre establecido en las mediciones de m_f y m_e, la incertidumbre *relativa* en Δm puede reducirse haciendo Δm más grande. Esto podría lograrse empleando recipientes mayores o un intervalo de medición más largo, Δt, que también reduciría la incertidumbre relativa en el Δt medido. Segundo, la incertidumbre en los datos de la propiedad tabulados puede ser importante. La incertidumbre de los datos también se incrementa por la incertidumbre en la medición de la temperatura del fluido.

F-5 RESU

F-6 REFE

EJEMPLO F.5 Incertidumbre en la velocidad del aire

La velocidad del aire se calcula a partir de las mediciones de un tubo de pitot en un túnel de viento. De la ecuación de Bernoulli,

$$V = \left(\frac{2gh\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aire}}}\right)^{1/2} \tag{F.9}$$

donde h es la altura observada de la columna del manómetro.

El único elemento nuevo en este ejemplo es la raíz cuadrada. La variación en V, debida al intervalo de incertidumbre en h, es

$$\frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{h}{V}\frac{1}{2}\left(\frac{2gh\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aire}}}\right)^{-1/2}\frac{2g\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aire}}}$$

$$\frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{h}{V}\frac{1}{2}\frac{1}{V}\frac{2g\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aire}}} = \frac{1}{2}\frac{V^2}{V^2} = \frac{1}{2}$$

Empleando la ecuación F.3, calculamos la incertidumbre en V como

$$u_V = \pm\left[\left(\frac{1}{2}u_h\right)^2 + \left(\frac{1}{2}u_{\rho_{agua}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}u_{\rho_{aire}}\right)^2\right]^{1/2}$$

Si $u_h = \pm 0.01$ y se ignoran las demás incertidumbres,

$$u_V = \pm\left\{\left[\frac{1}{2}(\pm 0.01)\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$u_V = \pm 0.00500 \quad \text{o} \quad \pm 0.500 \text{ por ciento}$$

Comentario:
La raíz cuadrada reduce el intervalo de incertidumbre en la velocidad calculada a la mitad del intervalo correspondiente a u_h.

F-5 RESUMEN

Un enunciado de la probable incertidumbre de los datos es una parte importante de los resultados experimentales reportados completa y claramente. La estimación de la incertidumbre en los resultados experimentales requiere cuidado, experiencia y juicio, en común con muchos esfuerzos en ingeniería. Hemos realzado la necesidad de cuantificar la incertidumbre de las mediciones, pero el espacio sólo permite incluir unos cuantos ejemplos. Mucha mayor información puede encontrarse en las referencias siguientes (por ejemplo, [5]). Le recomendamos consultarlas cuando diseñe experimentos o analice datos.

F-6 REFERENCIAS

1. Pugh, E. M., y G. H. Winslow, *The Analysis of Physical Measurements.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
2. Kline, S. J., y F. A. McClintock, "Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments", *Mechanical Engineering, 75*, 1, enero 1953, pp. 3-9.
3. Doebelin, E. O., *Measurement Systems,* 4a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1990.
4. Young, H. D., *Statistical Treatment of Experimental Data.* Nueva York: McGraw-Hill, 1962.
5. Holman, J. P., *Experimental Methods for Engineers*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1989.

Apéndice G

Unidades, prefijos y factores de conversión del SI

Tabla G.1 Unidades y prefijos del SI[a]

Unidades del SI	Cantidad	Unidad	Símbolo del SI	Fórmula
Unidades básicas del SI:	Longitud	metro	m	—
	Masa	kilogramo	kg	—
	Tiempo	segundo	s	—
	Temperatura	Kelvin	K	—
Unidad suplementaria del SI:	Ángulo plano	radian	rad	—
Unidades derivadas del SI:	Energía	joule	J	$N \cdot m$
	Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
	Potencia	watt	W	J/s
	Presión	pascal	Pa	N/m^2
	Trabajo	joule	J	$N \cdot m$

Prefijos del SI	Factor de multiplicación	Prefijo	Símbolo del SI
	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	tera	T
	$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	giga	G
	$1\,000\,000 = 10^{6}$	mega	M
	$1\,000 = 10^{3}$	kilo	k
	$0.01 = 10^{-2}$	centi[b]	c
	$0.001 = 10^{-3}$	milli	m
	$0.000\,001 = 10^{-6}$	micro	μ
	$0.000\,000\,001 = 10^{-9}$	nano	n
	$0.000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	pico	p

[a] Fuente: Estándar de la ASTM para la Práctica Métrica E 380-89, 1989.
[b] Se evitará cuando sea posible.

G-1 CONVERSIÓN DE UNIDADES

Los datos necesarios para resolver problemas no siempre están disponibles en unidades consistentes. Por ello, a menudo es necesario convertir de un sistema de unidades a otro.

En principio, todas las unidades de derivadas pueden expresarse en términos de unidades básicas. Por tanto, sólo serían requeridos los factores de conversión para unidades básicas.

En la práctica, muchas cantidades de la ingeniería se expresan en términos de unidades definidas, por ejemplo, el caballo de potencia, la unidad térmica británica (Btu), el cuarto o la milla náutica. Las definiciones para tales cantidades son necesarias, y factores de conversión adicionales son útiles en los cálculos.

Las unidades del SI básicas y los factores de conversión necesarios, más unas cuantas definiciones y factores de conversión convenientes, se presentan en la tabla G.2.

Tabla G.2 Factores de conversión y definiciones

Factor de conversión fundamental	Unidad inglesa	Valor del SI exacto	Valor del SI aproximado
Longitud	1 pulg	0.0254 m	—
Masa	1 lbm	0.453 592 37 kg	0.4536 kg
Temperatura	1 F	5/9 K	—

Definiciones:	
Aceleración de la gravedad:	$g = 9.80066\ m/s^2$ ($= 32.174\ pies/s^2$)
Energía:	Btu (unidad térmica británica) ≡ cantidad de energía requerida para aumentar la temperatura de 1 lbm de agua 1 F (1 Btu = 778.2 pies · lbf)
	kilocaloría ≡ cantidad de energía requerida para elevar 1 K 1 kg de agua (1 kcal = 4187 J)
Longitud:	1 milla = 5280 pies; 1 milla naútica = 6076.1 pies
Potencia:	1 caballo de potencia ≡ 550 pies · lbf/s
Presión:	1 bar ≡ 10^5 Pa
Temperatura:	Grado Fahrenheit, $T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$ (donde T_C es en grados Celsius)
	Grado Rankine, $T_R = T_F + 459.67$
	Kelvin, $T_K = T_C + 273.15$ (exacto)
Viscosidad:	1 Poise ≡ 0.1 kg/m · s
	1 Stoke ≡ 0.0001 m^2/s
Volumen:	1 gal ≡ 231 $pulg^2$ (1 pie^3 = 7.48 gal)

Factores de conversión útiles:	
	1 lbf = 4.448 N
	1 $lbf/pulg^2$ = 6895 Pa
	1 Btu = 1055 J
	1 HP = 746 W = 2545 Btu/hr
	1 kW = 3413 Btu/hr
	1 cuarto = 0.000946 m^3 = 0.9046 litro
	1 kcal = 3.968 Btu

Fórmula
—
—
—
—
—
N · m
kg · m/s^2
J/s
N/m^2
N · m

del SI
T
G
M
k
c
m
μ
n
p

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 1

1.2 $\forall = 0.0567\ m^3$, $d = 0.477$ m

1.3 KE = 5×10^3 pies · lbf/slug; 31.7 pies · lbf/pie^3

1.4 KE = 450 J/kg; 1.61 kJ/m^3

1.6 $\rho_m = 1.218$ kg/m^3, $\rho_d = 1.225$ kg/m^3

1.7 $\rho = 930 \pm 27.2$ kg/m^3 (20 a 1)

1.8 $\rho = 1130 \pm 21.4$ kg/m^3,
DR = 1.13 ± 0.0214 (20 a 1)

1.9 $\rho = 1260 \pm 24.6$ kg/m^3,
DR = 1.26 ± 0.0246 (20 a 1)

1.11 $\rho = 0.0765$ lbm/pies^3, $u_\rho = \pm 0.348\%$

1.12 $\rho = 1.39$ kg/m^3, $u_\rho = \pm 0.238\%$

1.13 $u_{\dot{m}} = \pm 1.30\%, \pm 0.217\%$

1.16 $u_a = \pm 3.47\%$

1.18 $\delta D = \pm 0.00441$ pulg

1.19 $u_8 = \pm 1.95\%$, $u_{12} = \pm 0.122\%$

1.22 $\forall = 0.254$ pies^3, $L = 1.29$ pies

1.23 $W = 394$ kJ

1.24 $T_2 = 285$ C

1.25 $T_2 \approx 269$ F, $p_2 \approx 41$ psia, $W_{salida} = 5390$ Btu

1.27 $F_D = 878$ lbf, $\Delta \mathcal{P} = -7.73$ HP

1.28 $R = 2V_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta/g$, $\theta_{máx} = 45°$

1.29 $t = 3W/gk$

1.30 $s = 2.05\ W^2/gk^2$

1.31 $V_t = 56.8$ m/s, $V_{100} = 38.3$ m/s

1.32 $s \approx 10$ m

1.33 $V_{arriba} \approx 0.7$ m/s, $V_{abajo} \approx 2.3$ m/s

1.34 $V_0 = 37.7$ m/s, $\theta_0 = 21.8°$

1.35 $V_t = 53.9$ m/s, $s = 345$ m, $s = 134$ m

1.36 1 Pa = 1.45×10^{-4} lbf/pulg^2

1.41 1 pie^3 = 7.48 gal, 1 gal = 3.79 L

1.43 $\forall = 15\ 600$ gal

1.45 DR = 13.6, $v = 7.37 \times 10^{-5}$ m^3/kg,
$\gamma_E = 847$ lbf/pies^3, $\gamma_M = 144$ lbf/pies^3

1.46 1 m^3/s = 35.3 pies^3/s;
1 pie^3/s = 449 gpm,
1 gal/hr = 0.631 kg/min;
1 pie^3/min = 4.59 lbm/hr

1.48 1 jomrón = 117 m; 1 bola rápida = 40.2 m/s;
1 béisbol = 1.41 N
masa = béisbol · jomrón · bola rápida^{-2} = 0.103 kg

1.49 $W = 59.9$ lbf; $\forall = 0.964$ pies^3

1.50 $\Delta\gamma = -1.75$ lbf/pies^3

Capítulo 2

2.7 $(x, y) = (2.72, 2.94)$ a $(8.15, 2.94)$

2.8 $y = cx^{-b/a}$

2.9 $xy = c$

2.11 $\vec{V} = 8\hat{i} - 4\hat{j}$ m/s; $y = 2x^{-2}$

2.13 $(x - B/A)y =$ constante

2.14 $x = y/3$; $t = 2$ s

2.16 $xy = 2$ m^2

2.17 $y - y_0 = (B/2A^2)(x - x_0)^2$

2.20 $\vec{x} = y$, $x = \exp(\ln y - A(\ln y)^2/2)$

2.31 $\vec{F}_B = 937\hat{j}$ lbf

2.32 $\vec{F}_B = 16.8\hat{j} + 88.0\hat{k}$ N

2.33 $\vec{F}_B = 261\hat{i} + 312\hat{k}$ N

2.34 $\vec{F}_B = 144\hat{i} + 192\hat{j}$ N

2.35 $\sigma = 51.0$ psi; $\tau = 115$ psi

2.36 $A = 5.92 \times 10^7$ kg/m · s; $B = 2180$ K

2.41 $\tau_{xy} = -2.64$ N/m^2; más x

2.42 $F = 0.0144$ N; Derecha

2.44 $F = 8.07$ mN

2.47 $F = 37.4$ lbf

2.48 $V_t = 0.0123$ m/s

2.50 $V = 34.3$ pie/s

2.51 $t = 2.30$ s

2.52 F_v

2.54 U

2.55 F

2.56 T =

2.57 μ =

2.58 μ =

2.60 μ =

2.65 T =

2.66 $\dot{\gamma}$ =

2.67 T =

s =

2.69 τ =

2.70 T =

2.72 τ_{yx}

2.75 n =

τ_{yx}

2.76 n =

2.78 Lan

2.79 $\forall_{má}$

2.80 Re =

Capítulo 3

3.1 D =

3.2 (a) C

3.3 D =

3.4 σ =

3.5 m =

3.6 p =

σ_c =

3.7 p_{abs}

3.8 p_{abs}

3.9 δh =

3.10 p_{atm}

3.11 ρ_s =

3.12 F =

3.13 F =

3.15 p_{gas} =

Δh =

3.16 p = 3

3.17 Δz =

3.18 Δz =

3.20 No

3.22 ρ = 0

3.23 p = 5

3.27 p/p_0 =

3.29 p = 6.

3.30 H = 2

2.52 $F_v = \mu VA/h$, $V_{máx} = mgh/\mu A$
2.54 $U = 9.84$ m/s
2.55 $F = 1.01$ N
2.56 $T = 15.3$ pies · lbf
2.57 $\mu = 8.07 \times 10^{-4}$ N · s/m^2
2.58 $\mu = 0.0208$ N · s/m^2
2.60 $\mu = 0.0781$ N · s/m^2
2.65 $T = \pi\mu\omega R^4/2h$
2.66 $\dot{\gamma} = \omega/\theta$; $T = 2\pi R^3\tau_{yx}/3$
2.67 $T = \pi\mu\,\Delta\,\omega R^4/2a$; $\mathcal{P} = \pi\mu\omega_0\Delta\,\omega R^4/2a$; $s = 2Ta/\pi\mu R^4\omega_i$; $\eta = 1 - s$
2.69 $\tau = \mu\omega z \tan\theta/a$; $T = 0.0206$ N · m
2.70 $T = \dfrac{2\pi\mu\omega R^4}{h}\left(\dfrac{\cos^3\alpha}{3} - \cos\alpha + \dfrac{2}{3}\right)$
2.72 $\tau_{yx} = 4.6$ N/m^2; $\tau_{lechada}/\tau_{H_2O} = 9.2$
2.75 $n = 0.661$; $k = 0.121$ N · s$^{0.661}$/m^2; $\tau_{yx} = 0.0264$ N/m^2; $\eta_{crema}/\mu_{H_2O} = 264$
2.76 $n = 1.227$; $k = 0.00251$ N · s$^{1.227}$/m^2
2.78 Laminar
2.79 $V_{máx} = 5.07 \times 10^{-2}$ m/s
2.80 $Re = 1440$; Laminar

Capítulo 3

3.1 $D = 6.0$ mm
3.2 (a) 0.3 por ciento; (b) −0.2 por ciento
3.3 $D = 0.254$ m; $p = 154$ kPa (manométrica)
3.4 $\sigma = 432$ MPa; Circunferencial
3.5 $m = 14.7$ kg; $t = 11.9$ mm
3.6 $p = 51.0$ MPa; $\sigma_a = 421$ MPa; $\sigma_c = 842$ MPa; $\tau = 211$ MPa
3.7 $p_{abs} = 927$ kPa; $p_{manométrica} = 824$ kPa
3.8 $p_{abs} = 79.3$ kPa
3.9 $\delta h = 5.08 \times 10^{-5}$ pulg
3.10 $p_{atm} = 2080$ psf; $h_0 = 746$ mm Hg
3.11 $\rho_s = 5.09$ kg/m^2
3.12 $F = 21.9$ N
3.13 $F = 2620$ lbf; $T = 62.4$ lbf
3.15 $p_{gas} = -365$ Pa (manométrica); $\Delta h = -37.2$ mm H_2O
3.16 $p = 34.7$ psig; $F = 19.3$ lbf; $s = 3.81$ pulg
3.17 $\Delta z = 89.1$ m
3.18 $\Delta z = 1390$ m
3.20 No
3.22 $\rho = 0.00332$ kg/m^3
3.23 $p = 57.5$ kPa; $p = 60.2$ kPa
3.27 $p/p_0 = [(1 + mz)/(1 + mz_0)]^{-g/mRT_0}$
3.29 $p = 6.72$ psig
3.30 $H = 20.9$ mm
3.31 $H = 30.0$ mm
3.33 $p_1 - p_2 = 58.8$ Pa
3.34 $d = 75.0$ mm
3.35 $p_a = 1.18$ psig
3.36 DR = 0.900
3.38 $l = 1.60$ m
3.39 $l = 0.546$ m
3.40 $h = 1.11$ pulg
3.41 $h = 7.85$ mm; $s = 0.308$
3.43 $\Delta p = 1.05$ kPa; $s = 2.15$
3.44 $\Delta p = 98.0$ Pa; $s = 3.27$
3.45 $p = 2.45$ kPa (manométrica); $s = 2.40$
3.46 $\theta = 12.5°$; $s = 5.0$
3.47 $\theta = 11.1°$
3.48 $L = 56.1$ mm; $s = 5.6$
3.49 $l = 0.316$ m
3.52 $\Delta h = 75.6$ mm
3.53 $T = 96.6$ C; $T = 93.2$ C
3.54 $F = 552$ kN; $x' = 2.50$ m, $y' = 2$ m
3.57 $R = 14.7$ kN
3.58 $R = 52.6$ kN
3.59 $R = 1.74$ kN, a la derecha
3.60 $F_R = 61\,700$ lbf
3.61 $F_R = 376$ N; $y' = 0.3$ m
3.62 $F = 33.3$ kN; $D \approx 7.3$ mm
3.63 $F_A = 32.7$ kN
3.64 $d = 2.66$ m
3.65 $F/b = 174$ lbf/pies
3.66 $b = 6.15$ m
3.67 $W = 15\,800$ lbf
3.68 $M = 344$ slug
3.69 $F_A/b = 15.6$ kN/m
3.70 $F = 1800$ lbf
3.71 $D = 2.60$ m
3.72 DR = 0.542
3.73 $F = 2\rho gR^3/3$; $y' = 3\pi R/16$
3.74 $F = 63\,800$ lbf
3.75 $F = 31.6$ N
3.76 $F = 1.82 \times 10^6$ lbf; $R_x = 1.76 \times 10^6$ lbf; $R_y = 3.04 \times 10^6$ lbf
3.77 $F_{R_y} = -73.9$ kN; $x' = 1.06$ m
3.78 $F_{R_y} = 7.63$ kN; $M = 3.76$ kN · m
3.80 $F_{R_y} = \rho g\, w\pi R^2/4$; $x' = 4R/3\pi$
3.81 $F_{R_y} = 17\,100$ lbf; $x' = 2.14$ pies
3.82 $F_{R_y} = 582$ lbf; $x' = 0.858$ pies
3.83 $F_V = 14\,200$ lbf; $z' = 1.91$ pies
3.84 $F_V = 12\,500$ lbf; $z' = 1.93$ pies
3.86 $F_A = 30.2$ kN

3.88 $F_A = 5.71$ kN
3.90 $M = 7.68$ kN · m(ccw)
3.93 $F_R = 1.83 \times 10^7$ N; $\alpha = 20.2°$
3.95 $F_R = 370$ kN; $\alpha = 57.6°$
3.96 $M/L = \rho R^2[1 + 3\pi/4]$, $F/L = \rho g R^2/2$
3.97 $F_V = 1.55$ kN; $x' = 0.120$ m
3.98 $F_V = 2.48$ kN; $x' = 0.642$ m;
$F_H = 7.35$ kN; $y' = 0.217$ m
3.100 DR = $(\cos^{-1}(1 - \alpha) + (\alpha - 1)\sqrt{2 - \alpha})/\pi$
3.101 $\gamma_s = 51.2$ lbf/pies^3; No
3.103 $h = 177$ mm
3.104 DR = $DR_{H_2O}\, W_{aire}/(W_{aire} - W_{neta})$
3.106 $F_B = 8.02 \times 10^{-11}$ N;
$V = 0.341$ mm/s
3.108 $D = 27.4$ m; $\forall_{SW}\ /\forall_{aceite} = 0.507$
3.109 Las demandas son válidas; se incrementa la sustentación 45 por ciento
3.110 $\theta = 23.8°$
3.111 El tanque no está flotando neutralmente
3.112 $D = 82.7$ m; $M = 637$ kg
3.113 $D = 116$ m; $M = 703$ kg
3.115 DR > 0.70
3.116 $R = 8.79$ mN
3.118 $M = \rho g L a^3 \Delta\, \theta/12$; estable para $0 \leq l \leq a/3$
3.119 $\omega = 1.81$ rad/s
3.120 $\omega = 13.1$ rad/s; No
3.121 $a = gh/L$
3.122 Inclinación = 0.22
3.123 $a_r = -1.61$ m/s^2; $\alpha = 9.3°$
3.125 $a_r = -r\omega^2$; $\partial p/\partial r = \rho r\omega^2$; $p = 7.19$ MPa
3.126 $\Delta p = \rho\omega^2 R^2/2$; $\omega = 7.16$ rad/s
3.127 $\omega = 188$ rad/s
3.128 Inclinación = −0.20;
$p(x, 0) = 106 - 1.57x$(m) kPa
3.129 $\alpha = 13.3°$
3.130 $\alpha = 30°$; Inclinación = 0.346
3.131 Inclinación = 0.540; $\omega = 3.48$ rad/s
3.132 $T = 47.6$ lbf; $p = 55.3$ lbf/pies^2 (manométrica)
3.133 $p_2/p_1 = 24.2$
3.134 $F_{\text{parte posterior}} = 107$ N; $F_{\text{frente}} = 54.1$ N;
$F_{\text{fondo}} = 156$ N
3.135 $\theta = 14.3°$ (hacia el centro de curvatura)
3.136 $\omega = 31.3$ rad/s;
$p_{máx} = 51.5$ kPa (manométrica);
$p_{min} = 43.9$ kPa (manométrica)

Capítulo 4

4.1 $F = 961$ N; $F = 586$ N
4.2 $W = 469$ kJ
4.3 $Q = 9.57$ kJ
4.4 $s_1 - s_1 = -0.291$ kJ/kg · K
4.5 $t = 16.7$ s
4.6 $V = 87.5$ km/hr
4.7 $s = 2680$ pies; $t = 26.1$ s
4.8 $k = 2.50 \times 10^{-5}$ N · s^2/m^2
4.9 $\theta = 48.2°$
4.11 $\Delta u = 77.5$ kJ/kg
4.12 $t = 419$ s
4.13 $t = 4.18$ hr
4.14 $t = 9.38$ s; $s = 156$ m
4.15 $a_r = -31.7$ m/s^2; $V = 89.0$ m/s
4.16 $h = 21.2$ mm; $\mu = 0.604$
4.17 $\vec{T} = -780\hat{k}$ N · m
4.18 $\vec{T}_{prom} = -3.25 \times 10^{-4}\,\hat{k}$ N · m
4.20 $Q = 1.50$ pies^3/s
4.22 $mf_x = -\rho V^2 wh/3$
4.23 (a) $u_{máx}\pi R^2/2$; (b) $\hat{i}u_{máx}^2\,\pi R^2/3$
4.25 $Q_3 = -5.00$ pies^3/s (dentro del VC)
4.26 $D = 55.6$ mm
4.27 $\dot{m}_3 = 2500 + 999\cos(4\pi t)$ kg/s
4.28 $\vec{V}_3 = 4.04\,\hat{i} - 2.34\,\hat{j}$ m/s
4.29 $\dot{m}/w = \rho^2 g h^3\,\text{sen}\theta/6\mu$
4.30 $k = 2$ s^{-1}
4.31 $u_{máx} = 7.50$ m/s
4.32 $V_m = \pi V_1/4$
4.33 $U = 5.00$ pies/s
4.34 $V_3 = 3.33$ pies/s (dentro del VC)
4.36 $\dot{m}_2 = 16.2$ kg/s
4.37 $\partial\forall/\partial t = -0.181$ gal/s
4.38 $dh/dt = -0.50$ m/s (cayendo)
4.39 $dh/dt = -0.289$ mm/s (cayendo)
4.41 $\partial\rho/\partial t = -0.369$ kg/m^3 · s
4.42 $\partial\rho_0/\partial t = 2.50 \times 10^{-3}$ slug/pies^3 · s
4.43 $dh/dt = -56.6$ mm/s
4.44 $y = 0.134$ m
4.45 $t = 28.5$ s
4.46 $dy/dt = -9.01$ mm/s
4.47 $Q_0 = 3.61 \times 10^{-5}$ m^3/s;
$dh/dt = -0.0532$ m/s
4.49 $\dot{m}_{bc} = 1.42$ kg/s (salida)
4.50 $t = 6\forall_0/5Q_0$
4.54 $mf = 349\,\hat{i} - 13.5\,\hat{j}$ N
4.55 Relación = 1.2
4.56 Relación = 1.33
4.57 $T = 59.9$ N
4.58 $M = 409$ kg
4.60 $F_x = 0.0230$ lbf
4.61 $F_x = 184$ N
4.62 F_m
4.63 M
4.64 La
4.65 F =
4.66 F =
4.67 F =
4.68 F =
4.69 F =
4.70 F =
4.71 F =
4.72 F =
4.73 Q =
4.76 $\dot{m}_2$ =
4.78 T =
4.80 t =
4.81 $\vec{F}$ =
4.82 $\vec{F}$ =
4.83 $\vec{V}_2$ =
4.84 $\vec{F}$ =
4.85 Q_2 =
p_3 =
4.86 F =
4.87 F =
4.88 F =
4.89 Q =
4.92 $\dot{m}$ =
F_D =
4.93 $u_{máx}$ =
4.94 $u_{máx}$ =
4.96 $F = 7$
4.97 $u_{máx}$ =
4.98 F/w =
4.99 $D = 0$
4.100 F/w =
4.101 F/w =
4.102 $F = 7($
4.103 $F = 1$
4.105 h_2/h_1 =
4.106 F_D/w =
4.108 Error =
4.110 $h = H/$
4.111 $h = 89$
4.112 $\mu_x < 0.$
4.113 $h = 3.2$
4.115 $V = [V$
4.116 $V = [V$
4.118 $t \approx 730$
4.120 $z = 3V_0^2$
4.121 $z = V_0^2/$

4.62 $F_{máx} = 97.0$ lbf
4.63 $M = 671$ kg
4.64 La balanza registra 213 lbf; $W = 203$ lbf
4.65 $F = 1.81$ kN, tensión
4.66 $F = 496$ N, tensión
4.67 $F = 321$ N
4.68 $F = 446$ lbf
4.69 $F = 370$ N
4.70 $F = 206$ lbf, tensión
4.71 $F = 8.32$ kN
4.72 $F = 1.70$ lbf
4.73 $Q = 0.424$ m^3/s; $F_y = 4.05$ kN
4.76 $\dot{m}_2 = 0.760\, \dot{m}_1 \sqrt{A_2/A_1}$
4.78 $T = 30.0$ N; $\vec{F} = 30\,\hat{i} - 51.9\,\hat{j}$ N
4.80 $t = 1.19$ mm; $F_x = 3.63$ kN
4.81 $\vec{F} = -26.7\,\hat{i} - 139\,\hat{j}$ lbf
4.82 $\vec{F} = -4.68\,\hat{i} + 1.66\hat{j}$ kN
4.83 $V_2 = 6.60$ m/s; $p_2 - p_1 = 84.2$ kPa
4.84 $\vec{F} = -139\,\hat{i} - 740\,\hat{j}$ N
4.85 $Q_2 = 1.43 \times 10^{-3}$ m^3/s (salida); $p_3 = 146$ kPa (abs)
4.86 $F = 837$ lbf
4.87 $F = 4.77$ lbf
4.88 $F = 5.11$ kN
4.89 $Q = 0.141$ m^3/s; $\vec{F} = -1.65\,\hat{i} - 1.34\,\hat{j}$ kN
4.92 $\dot{m} = 9.67$ kg/s; $V_{2,máx} = 15.0$ m/s; $F_D = 65$ N
4.93 $u_{máx} = 30$ pies/s; $p_1 - p_2 = 0.190$ lbf/pies^2
4.94 $u_{máx} = 60$ pies/s; $p_1 - p_2 = 0.699$ lbf/pies^2
4.96 $F = 7.90 \times 10^{-4}$ N
4.97 $u_{máx} = 31.6$ pies/s; $p_1 - p_2 = 0.0762$ lbf/pies^2
4.98 $F/w = 0.277$ N/m
4.99 $D = 0.446$ N
4.100 $F/w = 0.0393$ N/m
4.101 $F/w = 2.94$ N/m
4.102 $F = 760$ N
4.103 $F = 15.6$ kN
4.105 $h_2/h_1 = 0.5(1 + \text{sen}\theta)$
4.106 $F_D/w = 54.1$ N/m
4.108 Error = 1.73 por ciento
4.110 $h = H/2$
4.111 $h = 89.6$ mm; $F = 0.242$ N
4.112 $\mu_x < 0.202$
4.113 $h = 3.26$ m
4.115 $V = [V_0^2 + 2gh]^{1/2}$; $F = 1.49$ N
4.116 $V = [V_0^2 - 2gh]^{1/2}$; $h = 4.15$ pies
4.118 $t \approx 730$ s
4.120 $z = 3V_0^2/2g$
4.121 $z = V_0^2/2g$
4.122 $p(x) = p(0) - \rho(Qx/whL)^2$
4.124 $V(x) = V_0 - qx/A$; $p(x) = p_0 + (2\rho q V_0 x/A)(1 - qx/2V_0A)$
4.125 $V(x) = V_0 - (q_{máx}x^2/2AL)$; $p(x) = p_0 + (\rho q_{máx} V_0 x^2/AL)\times (1 - q_{máx}x^2/4ALV_0)$
4.128 $c = [gh]^{1/2}$
4.130 $h_1 = [h_2^2 + 2Q^2/gb^2h_2]^{1/2}$
4.131 $D/D_0 = [1 - x/L]^{1/2}$
4.132 $V(x) = V_0x/h$
4.133 $V(r) = V_0r/2h$
4.134 $\vec{F} = -8.22\,\hat{i} + 220\,\hat{j}$ N
4.135 $\vec{F} = -570\,\hat{i} + 329\,\hat{j}$ lbf
4.136 $\vec{F} = -135\,\hat{i} + 135\,\hat{j}$ N
4.137 $F = 1.73$ kN
4.138 $F = 3210$ lbf
4.139 $V = 95.4$ pies/s
4.140 $F = 167$ N
4.141 $F = 3840$ lbf a $U = 75$ mph
4.142 $F = 15.5$ kN
4.144 $\dot{W} = \rho(V - U)^2UA(1 - \cos\upsilon)$
4.145 $T = 4.17$ mm; $F = 4240$ N
4.146 $t = 6.25$ mm; $F = 7940$ N
4.147 $\alpha = 30°$; $F = 10.3$ kN
4.148 $U = V/2$
4.149 $\dot{m}_2/\dot{m}_3 = 0.5$; $F = 7.46$ kN
4.151 $D = 1.44$ m; $T = 1.60$ kN; $T = 800$ N
4.152 $F = 187$ N
4.153 $a_{rf} = 13.5$ m/s^2
4.154 $U = 83.9$ pies/s
4.155 $dU/dt = 13.7$ m/s^2; $U_t = 15.8$ m/s
4.156 $U/V = \ln[M_0/(M_0 - \rho VAt)]$
4.157 $\theta = 19.7°$
4.158 $A = 111$ mm^2
4.159 $A = 0.900$ pulg^2; $t = 3$ s
4.160 $t = 22.6$ s
4.161 $h = 17.9$ mm
4.162 $U = 22.5$ m/s
4.163 $a_{rf} = 5.99$ m/s^2; $U/U_t = 0.667$
4.164 $t = 1.71$ s; $s = 7.47$ m
4.165 $t = 0.0668$ s; $x = 0.177$ m
4.166 $dU/dt = 14.2$ m/s; $U_t = 15.2$ m/s
4.167 $U_t = 15.8$ m/s
4.169 $U/U_0 = e^{-4\rho VAt/M}$
4.170 $t = 0.750\, M/\rho VA$; $x = 0.238\, MU_0/\rho VA$
4.172 $a_y = -16.5$ pies/s^2
4.175 $t = 129$ s
4.176 $U = 834$ m/s; $a_{máx} = 96.7$ m/s^2
4.177 $a = 33.3$ m/s^2; $U = 288$ m/s

4.178 $M_f = 186$ lbm
4.179 $U = 344$ m/s
4.180 Fracción de la masa = 0.393
4.181 $a_0 = 17.3\ g$
4.182 $V = 1910$ m/s
4.183 $V = 3860$ pies/s; $F = 33\,500$ pies
4.184 $F = aM_0 - \rho V_f^2 A + 3\rho V_f(at)A - 1.5\rho(at)^2 A$
4.187 $t = 3$ s
4.188 $\theta = 18.9°$
4.189 $U = 16.5$ m/s
4.190 $t = M/2\rho VA$
4.192 $\dot{m} = Mg/V_e$; $t = 110$ s
4.193 $I = 2.21$ lbf · s; $I_{sp} = 80.3$ s; $V_{máx} = 139$ m/s; $Y_{máx} = 1100$ m
4.194 $\dot{m} = 186$ lbm/s
4.199 $\vec{a}_{XYZ} = -\hat{e}_r(V_0^2 r_0^2/R^3 + \omega^2 R) + \hat{e}_\theta 2\omega V_0 r_0/R$
4.204 $\dot{\omega} = -2.75$ rad/s^2
4.205 $k = 0.004$ N · s^2/m; $t = 21.5$ s
4.206 $M = 8.14$ kN · m
4.207 $F = 44.4$ kN; $T = 920$ kN · m
4.212 $T = 0.0161$ N · m
4.213 $T = 0.0722$ N · m
4.214 $\dot{\omega} = 0.161$ rad/s^2
4.215 $\dot{W} = R\omega(1 - \cos\theta)\rho VA(V - U)$; $U/V = 1/2$
4.216 $\vec{F} = 969\,\hat{i} - 2\hat{j} + 492\,\hat{k}$ lbf
4.217 $\omega = 6.04$ rad/s; $A = 1720$ m^2
4.218 $T = 29.4$ N · m; $\vec{M} = 51.0\,\hat{i} + 1.40\,\hat{j}$ N · m
4.222 $\dot{W} = -80.0$ kW
4.223 $\dot{Q} = -146$ Btu/s
4.224 $\dot{W} = -96.0$ kW
4.225 $p_1 - p_2 = 75.4$ kPa
4.226 $\eta = 0.348$
4.227 $\partial T/\partial t = -0.177$ R/s
4.228 $\dot{W} = -3.41$ kW
4.231 $\eta = 0.571$
4.232 $V = 133$ pies/s; $z_0 = 248$ pies; $\dot{W} = -5.69$ HP; $\Delta z = 30.1$ pies
4.233 $Q = 0.0166$ m^3/s; $z_{máx} = 61.4$ m; $F = 561$ N
4.234 $\eta = 0.631$
4.235 $\eta = 0.500$; $\eta = 0$
4.236 $\eta = 0.554$
4.238 $V = 94.5$ m/s; $\dot{W} = -739$ kW
4.239 $\Delta m.e. = -1.88$ N · m/kg; $\Delta T = 4.49 \times 10^{-4}$ K

Capítulo 5

5.1 (a)
5.2 (b), (c)
5.3 (a), (b)
5.4 $A + E + J = 0$
5.5 $u = -2yx - 2x + f(y)$
5.6 $v = Ay/x^2$
5.7 $v/U)_{máx} = 0.0025$
5.8 $v/U)_{máx} = 0.00167$
5.9 $v/U)_{máx} = 0.00182$
5.11 (a), (b), (c)
5.12 $r = q/2\pi$, $\theta = \pm\pi$
5.13 $V_\theta = -\nabla \operatorname{sen}\theta/r^2 + f(r)$
5.14 $\vec{V} = \hat{e}_\theta\, \omega rz/h$
5.15 Sí; $r = e^\theta$
5.16 $\Psi = Vy\cos\alpha - Vx\operatorname{sen}\alpha$
5.17 $\vec{V} = Ax\,\hat{i} - Ay\,\hat{j}$
5.18 $\Psi = Uy^2/2h$; $y = h/\sqrt{2}$
5.19 $\Psi = x^2y - y^3/3$
5.20 $\Psi = A\theta - A\ln r$
5.21 $\vec{V} = (-U\cos\theta + q/2\pi r)\hat{e}_r + U\operatorname{sen}\theta\hat{e}_\theta$
5.22 $|\vec{V}| = U$ a $\theta = \pm 30°, \pm 150°$
5.23 $\Psi = -y^3z - 2z^2$
5.24 $Q = 4$ m^3/s/m
5.25 $\Psi = Uy^2/2h$; $y = 2.83$ pies
5.28 $y/\delta = 0.460, 0.667$
5.29 $\Psi = -\omega r^2/2$; $Q/b = 6 \times 10^{-4}$ m^3/s/m
5.30 $\Psi = -c\ln r$; $Q/b = 0.168$ m^3/s/m
5.32 Sí; $\vec{a}_p = 0.625\,\hat{i} + 0.313\,\hat{j}$ m/s^2
5.33 $\vec{a}_p = (16\,\hat{i} + 32\,\hat{j} + 16\,\hat{k})/3$ m/s^2
5.34 3-D; No; $\vec{a}_p = 27\,\hat{i} + 9\,\hat{j} + 64\,\hat{k}$ m/s^2
5.36 $u = Ax^2/2$; $\vec{a}_p = A^2(0.5\,\hat{i} + \hat{j})$
5.37 $\vec{a}_p = -4\,\hat{i} - 12\,\hat{j}$ m/s^2
5.38 $\vec{a}_p = -\hat{i}aV_1^2 e^{-2ax}$
5.39 $\vec{a}_p = -(Q/2\pi h)^2 r^{-3}\hat{e}_r$
5.40 $a_r = -81.0$ km/s^2; $a_r = -3.0$ km/s^2
5.41 $V_r = qr/2h$; $a_r = 60.0$ m/s^2
5.42 $\vec{a}_p = -5.56\hat{e}_r + 1.36\hat{e}_\theta$ pies/s^2; $\vec{a}_p = -22.2\hat{e}_r$ pie/s^2
5.45 $\partial T/\partial x = -0.0873$ F/mi
5.47 $\vec{a}_p = x\hat{i} + y\hat{j}$
5.49 $c = -2\text{s}^{-1}$; $\vec{a}_p = 4\,\hat{i} + 8\,\hat{j} + 5\,\hat{k}$ m/s^2
5.50 Relación = 100
5.51 $y/\delta = 0.634$
5.53 $v = v_0(1 - y/h)$; $\vec{a}_p = \hat{i}v_0^2 x/h^2 - \hat{j}(v_0^2/h)(1 - y/h)$
5.54 $\vec{a}_p = \hat{e}_r\,(v_0/2h)^2 r - \hat{k}(v_0^2/h)(1 - z/h)$
5.56 $\vec{a}_p = 44.5\,\hat{i}$ pies/s^2; $\vec{a}_p = 103\,\hat{i}$ pies/s^2
5.58 $v = -bU_0 y(1 - bx^2)$; $a_{px,máx} = 201$ m/s^2

$$\vec{a}_p = \frac{U_0^2 b}{(1 - bs)^2}\left(\hat{i} - \hat{j}\frac{by}{(1 - bx)}\right)$$

5.59 a
5.60 f
t
$\vec{a}$
$\vec{a}$
5.63 S
5.64 N
5.66 Γ
5.67 Γ
5.69 S
5.70 $\vec{\omega}$
5.73 ω
5.75 $\vec{V}$
5.76 S
5.83 dy
5.84 dy
5.85 dy

Capítulo

6.1 $\vec{a}_p$
∇
6.2 a
∇
6.3 $\vec{a}_p$
∂p
6.4 ∇
6.5 v
∇
$p($
6.7 Sí
∇
Δp
6.10 a_x
6.12 F
6.14 ∇p
$(x/$
6.18 p_2
6.19 p_2
6.20 a_r
6.22 pU
6.25 V
6.26 Δh
6.29 Δh
6.30 V
6.32 V
6.33 p_{dif}
6.34 p
6.35 p

5.59 $a_x = 4(20 + 2\,\text{sen}(\omega t))^2 + 1.2\cos(\omega t)$ m/s^2

5.60 $f_1 = x_0 e^{At}, f_2 = y_0 e^{-At}$;
$t(1, 1) = 0.693$ s, $t(2, 0.5) = 1.39$ s;
$\vec{a}_p\ (1, 1) = \hat{i} + \hat{j}$ m/s^2
$\vec{a}_p\ (2, 0.5) = 2\hat{i} + 0.5\hat{j}$ m/s^2

5.63 Sí; Sí

5.64 No, Sí

5.66 $\Gamma = -0.100$ m^2/s

5.67 $\Gamma = 0$

5.69 Sí; Sí

5.70 $\vec{\omega} = -0.05\ \text{s}^{-1}\,\hat{k}$; $\Psi = Ay^2/2 + c$

5.73 $\omega = -U/2h$

5.75 $\vec{V} = -2y\,\hat{i} - 2x\,\hat{j}$

5.76 Sí; $\Psi = -(q\theta + K \ln r)/2\pi$

5.83 $df/d\forall = -356$ N/m^3

5.84 $df/d\forall = -1.85$ kN/m^3

5.85 $df/d\forall = -0.0134$ lbf/pies^3

Capítulo 6

6.1 $\vec{a}_p = 2\hat{i} + 2\hat{j}$ pie/s^2;
$\nabla p = -(4\hat{i} + 68.4\hat{j})$ lbf/pies^2/pies

6.2 $a = 2.24$ m/s^2 a $\theta = 63.4°$ arriba del eje x;
$\nabla p = -(1.0\,\hat{i} + 11.8\,\hat{j})$ kN/m^2/m

6.3 $\vec{a}_p = 605\,\hat{i} + 5\,\hat{j}$ pies/s^2;
$\partial p/\partial x = -1170$ lbf/pies^2/pies

6.4 $\nabla p = -(3.0\,\hat{i} + 9.0\,\hat{j})$ kN/m^2/m

6.5 $v = -Ay$; $\vec{a}_p = 8\,\hat{i} + 4\hat{j}$ m/s^2;
$\nabla p = -12\,\hat{i} - 6\,\hat{j} - 14.7\,\hat{k}$ N/m^3;
$p(x) = 190 - 3x^2$ Pa (manométrica)

6.7 Sí, $(x, y) = (2.5, 1.5)$;
$\nabla p = -\rho[(4x - 10)\,\hat{i} + (4y - 6)\,\hat{j} + g\hat{k}]$;
$\Delta p = 9.6$ N/m^2

6.10 $a_x = 16\nu_0^2 x/D^2$; $p(0) = 8\rho v_0^2(L/D)^2$

6.12 $F = 1.56$ N, abajo

6.14 $\nabla p = -4.23\,\hat{i} - 12.1\,\hat{j}$ N/m^3;
$(x/h) = [1 - y/h] =$ constante

6.18 $p_2 - p_1 = 150$ kN/m^2

6.19 $p_2 - p_1 = 37.5$ kN/m^2

6.20 $a_r = -2800g$; $\partial p/\partial r = 270$ lbf/pies^2/pies

6.22 $p_{L/2} - p_0 = -30.6$ N/m^2

6.25 $V = 20.1$ m/s

6.26 $\Delta h = 47.7$ mm agua

6.29 $\Delta h = 628$ mm agua

6.30 $V = 89.5$ pies/s

6.32 $V = 27.5$ m/s

6.33 $p_{\text{din}} = 296$ N/m^2; $p = -355$ N/m^2 (manométrica)

6.34 $p = 227$ kPa (manométrica)

6.35 $p = 291$ kPa (manométrica)

6.36 $h = 7.72$ m

6.37 $V = 21.5$ pies/s; $Q = 0.469$ pies^3/s

6.39 $p = -0.404$ kPa (manométrica)

6.40 $p = 52.6$ kPa (manométrica)

6.42 $V = 330$ pies/s

6.44 $V = 44.2$ m/s

6.45 $V = 101$ m/s

6.46 $\Delta h = 1.77$ pulg de agua; $\Delta h = 3.15$ pulg de agua

6.47 $\Delta p = 5.54$ kPa; $\Delta p/q = 0.933$

6.49 $Q = 301$ gpm; $F_x = 565$ lbf; Tensión

6.51 $Q = 2.55 \times 10^{-3}$ m^3/s

6.52 $p_{1g} = 49.2$ kPa; $K_x = 57.5$ N

6.53 $Q = 1.25 \times 10^{-2}$ m^3/s; $p_c = 71.6$ kPa

6.55 $p = 1.35$ psig; $p_{\text{máx}} = 1.79$ psig;
$F = 4.76$ lbf

6.56 $p_1 = 294$ kPa (abs);
$p_2 = 3365$ kPa (abs); $\mathcal{P} = 17.4$ MW

6.57 $$h/h_0 = \left[1 - \sqrt{\frac{g}{2h_0(AR^2 - 1)}}\,t\right]^2$$

6.58 $h = H/2$; $R = H$

6.59 $\Delta h = 89.6$ mm; $K_x = 0.242$ N

6.61 $F_v = 532$ kN

6.62 $p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\,\text{sen}^2\theta)$;
$\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$; $F = 0$

6.63 $F_v = 83.3$ kN

6.64 $p = 164$ kPa (manométrica); $F = 152$ N

6.65 $p = -85.4$ psfg; $p = 73.8$ pulg Hg

6.67 $C_c = 0.5$

6.68 $p = 12.3$ kN/m^2 (manométrica)

6.69 $p_1 - p_2 = 1.73\cos(\omega t)$ kN/m^2

6.71 $dQ/dt = 0.0516$ m^3/s/s

6.72 $d^2l/dt^2 = 2gl/L$

6.73 $p_{\text{manométrica}} = 3\rho V^2 R^2/8b^2$

6.74 $D/d = 0.32$

6.75 $\Delta p = -615$ N/m^2

6.76 $\Delta p = -18.8$ kN/m^2

6.77 $\vec{\omega} = -\hat{k}A(x^2 + y^2)/2$

6.78 No; Sí

6.80 $\vec{\omega} = \hat{k}$

6.82 $\phi = xy^2 - x^3/3$

6.83 $\vec{V} = -2(y\,\hat{i} + x\,\hat{j})$; $\phi = 2xy$

6.84 $\psi = -2xy$

6.85 $\psi = B(x^2 - y^2)/2 - 2Axy$

6.86 $\vec{V} = -(2x + 1)\hat{i} + 2y\hat{j}$; $\psi = 2xy + y$;
$\Delta p = 23.3$ psf

6.88 $\phi = 3A(x^2y - x^3)$

6.91 $\psi = Ax^2y^3/3$; $2\vec{\omega} = -B(y^3 + 3x^2y)\hat{k}$; No

6.96 $C_{p,\,\text{máx}} = 1$, $C_{p,\,\text{mín}} = -3$; $\theta = 30°, 150°, 210°, 270°$; $\partial C_p/\partial\theta = -3.46$

6.98 $r > 10a$
6.100 $0 \leq K < 4\pi Ua$
6.102 $r > 9.77$ m, $p = -6.37$ kPa (manométrica)
6.104 $y = \pm a$
6.105 $\psi = 0.324q$; $Q/b = 0.176q$; $p_{din} = 0.8\rho q^2/4\pi^2 a^2$
6.107 Estancamiento en $r = 0.367m$, $\theta = 0, \pi$
6.108 $h = 0.162$ m; $V = 44.3\hat{i}$ m/s, $p = -957$ N/m^2 (manométrica)
6.110 $q = 25\pi$ m^2/s; $y = \pm \pi/2$
6.111 $r = 1.82$ m, $\theta = 63°$; $p = -317$ N/m^2 (manométrica)
6.112 $R_x/b = 5.51$ kN/m
6.113 $V_\infty = 4K/5\pi a$

Capítulo 7

7.1 $F/\mu VD$ = constante
7.2 $\Delta p/\rho V^2 = f(\mu/\rho VD, d/D)$
7.3 $\delta/x = f(\rho Ux/\mu)$
7.4 $\tau_w/\rho U^2 = f(\mu/\rho UL)$
7.6 $Q = h^2(gh)^{1/2} f(b/h)$
7.7 $V = \sqrt{gDf}(\lambda/d)$
7.8 $V(\rho\lambda/\sigma)^{1/2}$ = constante
7.9 $W/D^2\omega\mu = f(l/D, c/D)$
7.10 $T = R^3 \mu\omega f(h/R)$
7.11 $E = \rho V^3 f(nr/V)$
7.12 $\mathcal{P} = \rho D^5\omega^3 f(Q/D^3\omega)$
7.13 $\zeta r^2/\Gamma_0$, $\Gamma_0\tau/r^2$, ν/Γ_0
7.14 4; 3; $\mu/\rho d^{3/2}g^{1/2}$
7.15 4; 3; $\mu/\rho d^{3/2}g^{1/2}$
7.16 $Q = Vh^2 f(\rho Vh/\mu, V^2g/h)$
7.17 $R/\rho V^2b^2$, $\rho Vb/\mu$, h/b
7.18 3; $\rho VD/\mu$, d/D, $\sigma/\rho DV^2$
7.19 $\rho VD/\mu$, h/d, D/d
7.20 4; Q/Vd^2; $\mu/\rho VD$
7.21 3; $\dot{m} = \rho A^{5/4} g^{1/2} f(h/a^{1/2}, \Delta p/\rho A^{1/2} g)$
7.22 $T/\rho V^2D^3$, $\mu/\rho VD$, $\omega D/V$, d/D
7.23 $F\pi/\rho V^2D^2$, gD/V^2, $\omega D/V$, $p/\rho V^2$, $\mu/\rho VD$
7.24 $\mathcal{P} = p\omega D^3 f(\mu\omega/p, c/D, \varepsilon D)$
7.25 $\mathcal{R}/\rho D^2V^3$, $\omega D/V$, $\mu/\rho VD$, c/V
7.26 $\dot{Q}/\rho V^3L^2$, $c_p\Theta/V^2$, $\mu/\rho VL$
7.27 $p_{máx}/\rho U_0^2 = f(E_v/\rho U_0^2)$
7.28 $p = 539$ kPa; $F = 1.34$ kN
7.29 $V_m/V_p = 0.345$; $F_D = 219$ N
7.30 $p = 1.93$ MPa (abs); $F_D = 43.7$ kN
7.31 $V_m = 39.2$ m/s; $V_p = 39.2$ m/s
7.32 $V = 158$ pies/s; $F_m/F_p = 3.85$
7.33 $V_m = 6.21$ m/s; $F_D = 0.978$ N
7.34 $D_m = 5.04$ pulg; $\omega_m = 1000$ rpm
7.35 $V_m = 80$ pies/s; $\omega_m = 1600$ rpm
7.36 $p_m = 2.95$ psia
7.37 $V = 0.051$ pies/s; $\Delta p = 0.021$ psig
7.38 $\Delta h_B = 0.50$ pulg
7.39 $V_{máx} = 27.1$ pies/s
7.40 $C_{D,m} = 0.0972$; $F_D = 470$ N
7.42 $V_1/V_2 = 1/2$; $f_1/f_2 = 1/4$
7.43 $F_D = 2.46$ kN; $\mathcal{P} = 55.1$ kW
7.44 $F_D = 237$ kN
7.45 $\tau = 1070$ hr
7.46 $C_D = 0.951$; $F_D = 794$ lbf; $V = 807$ pies/s
7.47 Relación de escala = 1/50; No es posible
7.49 $Q = 4930$ cfm
7.51 $H = 145$ pies · lbf/slug; $Q = 5.92$ pies^3/s; $D = 0.491$ pies
7.52 $F_t/\rho\omega^2D^4 = f_1(g/\omega^2D, \omega D/V)$; $T/\rho\omega^2D^5 = f_2(g/\omega^2D, \omega D/V)$; $\mathcal{P}/\rho\omega^3D^5 = f_3(g/\omega^2D, \omega D/V)$
7.53 $\omega = 533$ rpm; $F_t = 17\,800$ lbf; $T = 53\,000$ pies · lbf
7.54 $V = 80$ pies/s; $F_t = 1.47 \times 10^5$ lbf; $T = 6.72 \times 10^5$ pies · lbf; $\mathcal{P}_t = 2.14 \times 10^4$ HP; $\mathcal{P}_{en} = 3.07 \times 10^4$ HP; $\eta = 0.697$
7.55 Relación de EC = 7.38
7.57 $C_D = 0.464$; $F_B \approx 0.273$ N; $F_D = 5.82$ N
7.58 $F_B = 0.574$; 0.44%
7.59 $\sigma/\rho LV_0^2$, gL/V_0^2
7.60 V_0^2/gL
7.61 gL/V_0^2
7.62 ν/V_0L

Capítulo 8

8.1 Turbulento; $7.5 < L < 12.0$ m
8.5 $Q = 2.29 \times 10^{-5}$ m^3/s; $\bar{V} = 2.63$ m/s; $L = 1.75$ m
8.6 $Re = 4Q/\pi D\mu$; $Re = 3000$
8.7 $\bar{V}/u_{máx} = 2/3$
8.8 $Q/b = 2h/3$; $\bar{V}/u_{máx} = 2/3$
8.9 $\tau_{yx} = -1.80$ N/m^2 (a la izquierda); $Q/b = 5.40 \times 10^{-6}$ m^3/s/m
8.10 $\tau_{yx} = -0.040$ lbf/pies^2 (a la izquierda); $Q/b = 6.67 \times 10^{-5}$ pies^3/s/pies
8.11 $\tau_{yx} = y\partial p/\partial x$; $\tau_{máx} = -0.00835$ lbf/pies^2
8.12 $Q = 6.32 \times 10^{-2}$ pulg^3/s
8.13 $Q = 2.44 \times 10^{-2}$ pulg^3/s
8.14 $Q = 5.93 \times 10^{-4}$ pulg^3/s
8.15 $w = 0.5$ pies; $dp/dx = -400$ psi/pies;
8.16
8.21
8.22
8.23
8.24
8.25
8.26
8.28
8.29
8.30
8.31
8.35
8.37
8.38
8.39
8.40
8.41
8.42
8.43
8.44
8.46
8.52
8.53
8.55
8.56
8.57
8.58
8.61
8.63
8.64
8.65
8.66
8.67
8.68
8.69
8.71
8.73
8.75
8.76
8.77
8.78
8.79
8.80
8.81
8.82

$h = 1.96 \times 10^{-3}$ pulg

8.16 $M = 4.32$ kg; $a = 1.28 \times 10^{-5}$ m

8.21 $\mu = 0.0695$ N · s/m^2

8.22 $Q/b = 0.0146$ pies^3/s/pies

8.23 $U_2/U_1 = 2$

8.24 $Q/b = 1.53 \times 10^{-7}$ m^3/s/m

8.25 $\partial p/\partial x = -94.0$ N/m^2/m

8.26 $Re = 1.95$; $\tau = 2.01$ kN/m^2; $\mathcal{P} = 11.4$ W

8.28 $\tau = 3.92$ N/m^2; $Q/w = 7.60 \times 10^{-4}$ m^3/s/m

8.29 $y/b) = 0.892$; $u_{máx}/U = 1.02$;
$\forall = 7.13 \times 10^{-2}$ pies^3/pies

8.30 $U = -(h^2/2\mu)\partial p/\partial x$

8.31 $u = U_0 + (\rho g/\mu)(y^2/2 - hy)$

8.35 $r = 0.707R$

8.37 $\Delta p = 3.53 \times 10^6$ Pa

8.38 $\Delta p = 5.10$ lbf/pulg^2; $u_\mu = 32\%$

8.39 $Q = 11.3$ mm^3/s

8.40 $\delta D = \pm 0.775\,\mu m$

8.41 $\Delta p = 349$ kPa, 14.0 GPa

8.42 $Q = 0.00203$ pies^3/s

8.43 $D = 1.96$ mm, 115 mm

8.44 Error = 15.5 por ciento

8.46 $u = (c_1/\mu)\ln r + c_2$; $c_1 = \mu V_0/\ln(r_o/r_i)$;
$c_2 = -V_0 \ln r_i/\ln(r_o/r_i)$

8.52 $\tau_w = 2.16$ lbf/pies^2

8.53 $\tau_w = -7.91$ N/m^2

8.55 $Q = 4.52 \times 10^{-7}$ m^3/s; $\Delta p = 235$ kPa;
$\tau_w = 294$ N/m^2

8.56 $n = 6.17$ (gráfico); 6.50 (mínimos cuadrados)

8.57 $n = 8.34$ (gráfico); 9.16 (mínimos cuadrados)

8.58 $r/R = 0.707$ (laminar); 0.757 (turbulento)

8.61 $\beta = 4/3$ (laminar); 1.02 (turbulento)

8.63 Flujo de EC = 0.296 N · m/s

8.64 $\alpha = 1.54$

8.65 $\alpha = 2.0$

8.66 $\alpha = 1.055$

8.67 $h_l = 345$ J/kg

8.68 $p = 345$ kPa (manométrica)

8.69 $H = 104$ pies, $h_l = 25.2$ pies

8.71 $f = 0.042$

8.73 $\Delta p \propto D^{-5}$

8.75 $\tau_\omega = 0.0790$ lbf/pies^2; $u = 5.48$ pies/s

8.76 $p_2 - p_1 = 24.4$ lbf/pies^2

8.77 $V = 76.2$ pies/s; $Q = 224$ pies^3/min

8.78 $Q = 1.10 \times 10^{-3}$ m^3/s

8.79 $C_c = 0.715$; $K = 0.196$

8.80 $Q = 0.0361$ pies^3/s

8.81 $\Delta Q = 0.0184$ m^3/s

8.82 $AR = 2.7$, $2\phi = 12°$; $Q = 0.172$ m^3/s

8.83 $\Delta p = 67.4$ kPa

8.84 $\Delta z = 9.80$ m

8.85 $S = -4.85°$; $\dot{Q} = -0.0271$ Btu/s

8.86 $\Delta p = 43.9$ N/m^2

8.87 $\Delta p = 5.76$ kN/m^2

8.89 $p = 1.15$ MPa (manométrica)

8.90 $\Delta z = 52.8$ m; Fracción = 1.8 por ciento

8.92 $p_1 = 1.40$ MPa (manométrica); $\Delta T = 0.215$ K

8.93 $\Delta z = 8.13$ m

8.94 $p = 135$ psig

8.96 $e/D = 0.021$; Ahorro = 48.2 por ciento

8.97 $x = 95.8$ pies

8.98 $p = -73.8$ Pa (manométrica)

8.99 $\mathcal{P} = 664$ HP

8.100 $p = 336$ psig; $\mathcal{P} = 169$ HP

8.101 $\Delta p = 43.7$ psi; $\mathcal{P} = 286$ HP;
Costo = 174 000 dólares/año

8.102 $\mathcal{P} = 4.47 \times 10^5$ HP; Fracción = 0.2 por ciento

8.103 $L = 53.1$ m

8.104 $L = 211$ m

8.105 $L = 51.1$ millas

8.107 $Q = 1.49$ pies^3/s

8.108 $Q = 0.980$ pies^3/s

8.109 $V = 27.5$ pies/s

8.110 $Q = 0.227$ pies^3/s

8.111 $V_0 = 28.0$ m/s; $F = 365$ N

8.113 $Q_A = 0.0108$ m^3/s, $Q_B = 0.00373$ m^3/s

8.115 $Q = 108$ gpm; $V = 124$ pies/s;
$\mathcal{P} = 13.4$ HP

8.116 $Q = 0.0136$ m^3/s

8.117 $Q = 5.30 \times 10^{-4}$ m^3/s

8.120 $Q \approx 10^4$ pies^3/min

8.121 $Q = 106$ gpm

8.122 $D \geq 14$ mm

8.123 $D = 2.5$ pulg (nominal)

8.124 $h = 0.194$ m, $b = 0.388$ m

8.125 $D = 6$ pulg

8.130 p_2 (manométrica) $= 26.3Q_2^2$; $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_0/3$

8.132 $\dot{m} = 0.0592$ g/s

8.133 $\Delta p = 462$ lbf/pies^2

8.134 $Q = 8.15$ pies^3/s

8.135 $Q = 0.0404$ m^3/s

8.136 $Q = 92.4$ gpm

8.137 $Q = 136$ gpm

8.138 $D = 40.8$ mm; $\dot{m} = 0.0220$ kg/s

8.139 $\dot{m} = 2.10$ kg/s; $\Delta h = 170$ mm Hg

8.141 $Q = 1.37$ pies^3/s

8.142 $Re = 1810$; $f = 0.0354$;
$p = -289$ N/m^2 (manométrica)

Capítulo 9

9.1 $x = 71.6$ mm

9.2 $x = 196$ mm; $x_m = 14.5$ mm

9.3 $x = 0.114$ m

9.7 $A = U$; $B = \pi/2\delta$, $c = 0$

9.8 $a = 0$, $b = 3$, $c = -2$

9.11 $\delta_t/\delta_l = 144/105$

9.12 $\delta^*/\delta = 1/2,\ 1/3,\ 3/8,\ 0.363$

9.13 $\delta^*/\delta = 0.125$, $\theta/\delta = 0.0972$

9.15 $\delta^* = 1.9$ mm; $\theta = 0.76$ mm; $\tau_w = 0.125$ N/m^2

9.16 $\theta/\delta = 0.167,\ 0.133,\ 0.139,\ 0.137$

9.17 $H = 3,\ 2.50,\ 2.69,\ 2.65$

9.18 $H_{\text{turbulento}} = 1.29$; $H_{\text{laminar}} = 2.69$

9.19 $\theta = 0.0342$ pulg

9.23 $\Delta p = 59.0$ Pa

9.24 $U_2 = 81.4$ pies/s, $p_1 - p_2 = 0.264$ lbf/pies^2

9.25 $U_2 = 18.4$ m/s; $\Delta p = 2.19$ Pa

9.26 $\delta_2^* = 5.00$ mm; $p_1 = -138$ Pa (manométrica)

9.27 $p_2 = -73.1$ Pa (manométrica); $\tau = 0.300$ N/m^2

9.28 $U_2 = 24.6$ m/s; $p_1 = -43.9$ mm H_2O;
$p_2 = -44.5$ mm H_2O

9.29 $Q = 2.44$ pies^3/s; $V_2 = 55.1$ pie/s;
$\delta_2^* = 0.075$ pulg

9.30 $F = 0.150$ lbf; $\tau_w = 0.0188$ lbf/pies^2

9.39 $y = 3.28$ mm; Inclinación $= 0.00327$;
$\theta = 1.09$ mm

9.43 $F = 1.62$ N

9.44 $\theta = 0.317$ mm; $F = 0.810$ N

9.45 $F = 10.7$ mN

9.48 $\theta = 0.0343$ pulg; $F = 0.00416$ lbf

9.53 $F = 0.767$ N

9.57 $\theta = 0.00986$ pulg; $F = 0.0765$ lbf

9.59 $F = 2.27$ N/m

9.62 $F = 2.32$ N

9.65 $\delta_l = 5.48$ mm, $\tau_w = 0.101$ N/m^2;
$\delta_t = 23.7$ mm, $\tau_w = 0.502$ N/m^2

9.66 $\delta = 32.3$ mm; $\tau_w = 0.433$ N/m^2; $F = 0.380$ N

9.67 $W = 80.1$ mm

9.70 $mf_a = \rho U^2 w\delta/3$; $mf_b = 8\rho U^2 w\delta/15$

9.71 $a = b = 0$, $c = 3$, $d = -2$; $H = 3.89$

9.72 $W_2 = 12.4 - 0.4H_1$

9.73 $d\delta/dx = -0.00865$

9.74 $d\delta/dx = -0.00828$

9.75 $U = 5.11 + 1.42x$

9.77 $U_{\text{máx}} = 7.82$ pies/s; $\Delta h = 0.00340$ pulg H_2O

9.80 $\mathcal{P} = 3.86$ kW

9.81 $Re_L = 1.54 \times 10^7$; $x_t = 53.6$ mm;
$\mathcal{P} = 15.3$ kW

9.82 $F = 7.87$ kN; $\mathcal{P} = 1.79$ MW

9.83 $\bar{L} = 9.96$ pies; $F = 2250$ lbf

9.84 $V = 2.18$ mph; $x_t = 0.0339$ pies; $F_m = 3.65$ lbf;
$F_p = 4110$ lbf

9.85 $V = 11.0$ pies/s

9.86 $F = 5.49 \times 10^5$ N; $a_x = -0.0528$ m/s^2

9.88 $\delta = 1.71$ m; $F = 1.59$ MN; $\mathcal{P} = 11.4$ MW;
KE $= 2.73 \times 10^7$ W · s; $\Delta t = 23.4$ min

9.89 $F = 92.3$ kN

9.90 $T = 86.2$ N · m; $\mathcal{P} = 542$ W

9.91 $D = 6.90$ m

9.92 $\bar{C}_D = 0.299$

9.93 $s = 117$ m

9.95 Horizontal es 20 por ciento mejor

9.96 $t = 1.33$ mm

9.97 $P_{\text{máx}} = 243$ W

9.100 $V_t = 43.5,\ 121$ m/s;
$t = 8.11,\ 22.6$ s; $y = 224,\ 1730$ m

9.104 $a_{\text{máx}} = 2.54$ m/s^2; $V_{\text{máx}} = 60.3$ m/s

9.106 $C_D = 1.17$

9.108 $V_{2(rel)} = 15$ m/s; $p_2 = -133$ N/m^2 (manométrica);
m $= 0.814$ kg

9.110 $\omega_{\text{opt}} = V/3R$

9.111 $F = 0.830$ N; $M = 0.125$ N · m

9.112 $T = 11.9$ N · m

9.113 $D < 0.231$ mm

9.114 $D = 3.81\ \mu$m

9.115 $C_D = 0.479$

9.116 $\mathcal{P} = 19.2$ kW

9.117 $x = 13.9$ m

9.118 $V \approx 15.4$ m/s

9.119 $V \approx 29.8$ pies/s

9.120 $V \approx 85$ pies/s

9.122 $V = 25.9$ m/s, $t = 4.83$ s; $y = 79.6$ m

9.123 $C_D = 61.9$; $\rho = 3720$ kg/m^3;
$V = 0.731$ m/s

9.124 $V = 10.3$ m/s

9.127 $M = 386$ kN · m

9.128 $D \approx 6.2$ m

9.133 $C_D = 1.08$

9.137 $C_D = 0.606$

9.140 $\Delta\mathcal{P} = 18.2$ kW

9.141 $V \approx 10.7$ m/s

9.142 $A_p = 7.03$ m^2

9.143 $\dot{m} = 7260$ kg

9.145 $\vec{F} = 4.79\,\hat{i} + 20.3\,\hat{j}$ lbf; $\mathcal{P} = 0.388$ HP

9.146 $V = 5.62$ m/s; $\mathcal{P} = 13.0$ kW;
$V = 19.9$ m/s

9.148 $V = 140$ m/s; $R = 408$ m

9.150 $T = 14\,800$ lbf

9.151 F

9.153 θ

9.156 s

9.157 p

9.158 F

9.162 ω

Capítulo

10.1 u

10.4 y

10.5 $\lambda/$

10.7 F_l

10.8 V

10.9 V

10.10 V

10.13 E

V

10.14 y =

10.15 H(

H(

10.17 Q

10.18 y_c

10.19 y_c

10.20 (b

10.21 Q =

10.22 y =

10.23 y =

10.24 y =

10.25 y =

10.26 y_0 =

10.27 Q =

10.28 y =

10.29 Q =

10.30 S_b =

10.31 b =

10.32 S_b =

10.33 y_n =

10.34 Q =

10.35 Q =

10.36 y_n =

10.37 y_n =

10.38 y_n =

10.39 y_n =

10.41 y_n =

10.42 y_n =

44.6

10.44 S_c =

10.45 b =

9.151 $F_D = 2.15$ kN; $\mathcal{P} = 149$ kW
9.153 $\theta = 3.42°$; $L = 168$ km
9.156 $\mathcal{P} = 0.190$ HP
9.157 $p = -190$ N/m^2 (manométrica); $V = 149$ km/hr
9.158 $F_L = 5.91$ mN
9.162 $\omega = 11.600$ rpm; $s = 1.19$ m

Capítulo 10

10.1 $u = 2V_{max}y(1 - y/2D)/D$
10.4 $y = 6.68$ pies
10.5 $\lambda/y = 31.3$
10.7 $Fr = 0.498, 1.50$
10.8 $V = 3.95$ pies/s
10.9 $V = 4$ pies/s; $y = 2.52$ pies
10.10 $V = 8.02$ pies/s; $Fr = 2$
10.13 $E = 2.19$ pies, $y = 1.46$ pies; $V = 6.85$ pies/s
10.14 $y = 0.645$ pies, 4.30 pies
10.15 $HGL_1 = 11.97$ pies, $EGL_1 = 12.11$ pies; $HGL_2 = 11.25$ pies, $EGL_2 = 11.50$ pies
10.17 $Q = 834$ pies^3/s
10.18 $y_c = 3.28$ pies
10.19 $y_c = (Q^2/g\cot^2\alpha)^{1/5}$
10.20 $(b + 2y\cot\alpha)/(by + y^2\cot^2\alpha)^3 = g/Q^2$
10.21 $Q = 3.25$ pies^3/s
10.22 $y = 1.30$ pies
10.23 $y = 0.61$ pies (32 por ciento de reducción)
10.24 $y = 0.334$ pies (11.3 por ciento de aumento)
10.25 $y = 1.32$ pies
10.26 $y_0 = 5.70$ m; $Q/b = 23.2$ m^2/s
10.27 $Q = 49.5$ pies^3/s
10.28 $y = 0.507$ m; $Fr = 2.51$
10.29 $Q = 85.5$ pies^3/s
10.30 $S_b = 1.49 \times 10^{-3}$
10.31 $b = 2.36$ m; $b = 2.49$ m
10.32 $S_b = 1.93 \times 10^{-3}$
10.33 $y_n = 2.32$ m
10.34 $Q = 0.171$ m^3/s
10.35 $Q = 0.623$ m^3/s
10.36 $y_n = 2.47$ pies
10.37 $y_n = 1.79$ m
10.38 $y_n = 0.773$ m
10.39 $y_n = 0.334$ m
10.41 $y_n = 2.00$ pies; $b = 4.00$ pies
10.42 $y_n = 7.79$ m, $b = 6.46$ m; 44.6 por ciento
10.44 $S_c = 3.82 \times 10^{-3}$
10.45 $b = 4.78$ pies; $S_c = 6.15 \times 10^{-3}$
10.47 $S_c = 3.82 \times 10^{-3}$
10.48 Aumenta la profundidad (curva S3)
10.49 Perfil A3
10.50 $\Delta x = 892$ pies, aguas abajo
10.51 $S_b = 0.00116$
10.52 $y = 0.966$ m
10.53 $\Delta x = 240$ pies, 8 aguas abajo
10.54 $y = 2.86$ m (un tramo)
10.55 $x = 3450$ m (aguas arriba)
10.56 $x = 202$ m (221 m en un tramo)
10.57 $x = 161$ m
10.58 $\Delta T = 0.00221$ K
10.59 $y = 4.51$ pies; $h_l = 2.40$ pies
10.60 $y = 5.95$ pies
10.61 $y = 3.99$ pies, $h_l = 1.13$ pies
10.62 $Q = 54.0$ pies^3/s; $h_l = 1.62$ pies
10.63 $y = 10.3$ m; $V = 2.18$ m/s; $E_d/E_u = 0.321$
10.64 $y = 4.44$ m; $h_l = 9.30$ m
10.65 $V = (gy_2(1 + y_2/y_1)/2)^{1/2}$
10.66 $V = 4.89$ mph
10.67 $Q/b = 3.41$ pies^3/s/pies
10.68 $Q = 16.8$ pies^3/s
10.69 $Q = 0.402$ pies^3/s
10.70 $Q/b = 27.2$ pies^3/s/pies

Capítulo 11

11.1 $\Delta p = 71.6$ psi; $H = 165$ pies (H_2O), 230 pies (gasolina)
11.6 $\theta_{efi} = 30.4°$
11.8 $H_0 = 77.0$ m; $V_2 = 25.7$ m/s; $V_{rb_2} = 4.10$ m/s; $H = 72.1$ m; $\mathcal{P} = 30.0$ kW
11.9 $\beta_1 = 64.2°$; $\theta_{efi} = +18.2°$ a $Q/2$; $\theta_{efi} = -7.95°$ a $3Q/2$;
11.11 $H(\text{pies}) = 156 - 1.36 \times 10^{-4}[Q(\text{gpm})]^2$
11.12 $H(\text{pies}) = 91.5 - 4.01 \times 10^{-7}[Q(\text{gpm})]^2$
11.13 $\eta \approx 0.79$; $H \approx 196$ pies a $Q \approx 630$ gpm
11.14 $\eta \approx 0.83$; $H \approx 184$ pies a $Q \approx 820$ gpm
11.15 $H_{1l} = 11.2$ m; $H_{2l} = 45.5$ m; $\mathcal{P}_h = 1.07$ kW; $\eta = 0.80$; $\mathcal{P}_m = 2$ HP; $\mathcal{P}_{en} = 2.11$ kW
11.16 1 HP (EU) = 1.01 HPm; N_S (mhp) = $4.44N_s$ (EU)
11.17 $N_S = 1130$; $\mathcal{P}_{en} = 11.6$ HP
11.18 $\eta \approx 0.86$ a $Q = 2220$ gpm, $H = 127$ pies; $D = 13$ pulg; $Q = 2400$ gpm, $H = 149$ pies; $D = 11$ pulg; $Q = 2040$ gpm, $H = 107$ pies
11.19 $N_s = 1.21$; $\mathcal{P}_{en} = 350$ kW;

$H(\text{m}) = 95.6 - 101\,[Q\,(\text{m}^3/\text{s})]^2$;
$Q = 0.551$ m^3/s; $H = 21.2$ m;
$\eta = 0.82$; $\mathcal{P}_{\text{en}} = 139$ kW

11.20 $n = 4$ bombas/unidades de motor

11.21 $H_{1150} = 25.6$ pies

11.29 $N_m = 6730$ rpm; $D_m/D_p = 0.137$

11.30 Si; operada a una relación de flujo mejor que el *PME*, se reduce la velocidad

11.31 $N_m = 214$ rpm; $D_m/D_p = 0.172$

11.32 $a = 0.0426\,(\text{gpm})^{-1}$
$b = -1.56 \times 10^{-9}\,(\text{gpm})^{-3}$; $r^2 = 0.998$

11.33 $T = 47$ C; $Q = 0.625$ L/s; $H = 4.65$ m

11.34 $NPSHA = 23.0$ pies;
$H = 36.5$ pies ($p = 15.8$ psig)

11.35 $a = 6.29$ pies, $b = 2.17 \times 10^{-5}$ pies/(gpm)^2;
$r^2 = 0.996$

11.36 $a = 3.55$ pies, $b = 1.31 \times 10^{-5}$ pies/(gpm)^2;
$r^2 = 0.990$

11.37 $Q_{\text{máx}} = 470$ gpm

11.38 $H = 30.8$ pies; $\mathcal{P}_h = 1.17$ HP

11.39 $H = 10\,300$ pies; $\mathcal{P}_h = 38\,100$ HP

11.40 $Q = 2020$ gpm

11.41 $Q = 650$ gpm

11.42 $Q = 2540$ gpm; $L_e/D = 26\,300$

11.43 $Q = 4190$ gpm; $L_e/D = 9620$

11.44 $Q = 3040$ gpm; $L_e/D = 42\,000$

11.48 $D = 6$ pulg (nominal); $\mathcal{P}_m = 890$ HP

11.49 Con 3 bombas, $\eta \approx 0.90$; $\mathcal{P}_m = 241\,368$ HP

11.50 $H_p = 296$ pies

11.52 $Q = 898$ gpm, $H = 104$ pies; Tipo 4AE11, impulsor de 11 pulg, 1750 rpm

11.53 $Q = 2330$ gpm, $H = 374$ pies, Tipo 8AE20G, impulsor de 19 pulg, 1770 rpm

11.54 $Q = 197$ gpm, $H = 116$ pies; Tipo 4AE12, impulsor de 11 pulg, 1750 rpm

11.55 $Q = 600$ gpm, $H = 775$ pies; Tipo 5TUT-16B, 5 pasos, 1750 rpm

11.56 $Q = 11\,200$ gpm, $H = 101$ pies; 3 Tipo 10AE12, impulsor de 12 pulg, 1750 rpm

11.57 $Q = 16\,500$ gpm, $H = 692$ pies (gasolina); 4 Tipo 10TU-22C, 2 pasos, 1750 rpm

11.58 $Q = 1500$ gpm, $H = 170$ pies; Tipo 6AE14, impulsor de 13 pulg, 1750 rpm

11.60 $Q_{\text{máx}} = 11.2$ gpm a $\Delta z = 0$

11.62 $N = 3500$ rpm; $D = 4.3$ pulg; $\eta \approx 0.53$

11.63 $n = 38$ pasos; $N_s = 2530$ por paso; $\eta \approx 0.74$

11.64 $Q_1 = \sqrt{H_0/(A + C)}$; $Q_2 = \sqrt{H_0/(A + C/2)}$, etc.

11.66 $\eta \approx 0.8$ a $Q = 9200$ cfm

11.67 $A_{\text{salida}} = 7.56$ pies^2; $\eta \approx 0.89$

11.72 $\mathcal{P}_{\text{pérdida}} = 0.290$ HP

11.74 $F_T = 442,387$ lbf

11.76 $V = 16.0$ pies/s; $J = 0.748$; $C_T = 0.0415$

11.80 $\mathcal{P}_{\text{salida}} = 16\,200$ HP, $N = 353$ rpm; $T = 2.41 \times 10^5$ pies · lbf

11.81 $N_s = 35.1$; $Q = 884$ m^3/s; $D = 8.91$ m

11.82 $N_s = 13.6$; $\eta = 0.505$

11.83 $D = 3.30$ m; $D_j = 0.518$ m; $Q = 17.4$ m^3/s

11.84 $N_s = 26.5$; $T = 3.90 \times 10^6$ pies · lbf; $Q = 2590$ cfs a H = 380 pies

11.85 $N = 257$ rpm; $T = 4.68 \times 10^5$ N · m

11.86 Para un chorro, $N = 229$ rpm; $D = 10.5$ pies

11.88 $N_s = 55.0$; $Q = 876$ m^3/s

11.89 $N_s(\text{EU}) = 4.55$; $D = 6.20$ pies

11.90 $D_j \approx 2$ pulg; $\mathcal{P} \approx 30$ HP

11.91 $\eta \approx 0.78$

11.94 $H_{\text{neta}} \approx 1100$ pies; $N_s \approx 5$

11.96 $V_t \approx 167$ km/hr; $\mathcal{P}_{\text{máx}} \approx 190$ kW

11.97 $\omega \approx 26\ \text{s}^{-1}$; $\mathcal{P}_{\text{modelo}} \approx 0.034$ HP

11.98 $\mathcal{P} \approx 22$ HP

11.99 $Q \approx 8.8$ gpm a $h = 30$ pies con $\eta_{\text{bomba}} = 0.5$

11.100 $\mathcal{P}_{\text{salida}}\,(\text{W}) = 0.285\,C_P\,[V\,(\text{m/s})]^3[D\,(\text{m})]^2$

Capítulo 12

12.1 $T = 273$ K

12.2 $s_2 - s_1 = 134$ J/kg · K

12.3 $s_2 - s_1 = -1.10$ kJ/kg · K; $Q/m = -572$ kJ/kg

12.4 $s_2 - s_1 = -1.10$ kJ/kg · K; $Q/m = -317$ kJ/kg

12.5 $\Delta u = -574$ kJ/kg; $\Delta h = -803$ kJ/kg; $\Delta s = 143$ J/kg · K

12.6 Si

12.7 $\Delta S = -0.923$ Btu/R; $\Delta U = -684$ Btu; $\Delta H = -960$ Btu

12.8 < 0; > 0; 0; 0; 0

12.9 > 0; $<$; 0; 0; 0

12.10 $\dot{W} = 392$ kW

12.11 $W = 176$ MJ; $W = 228$ MJ; $T = 858$ K; $Q = -317$ MJ

12.13 $\Delta t = 828$ s

12.14 $M = 0.806$

12.15 $M = 0.525, 1.08$

12.16 $M = 0.776$; $V = 269$ m/s

12.17 $c = 299$ m/s; $V = 987$ m/s; $V/V_b = 1.41$

12.18 $c = 321, 1500$ m/s

12.19

12.20

12.22

12.23

12.24

12.25

12.27

12.28

12.29

12.30

12.31

12.32

12.33

12.34

12.35

12.36

12.37

12.38

12.39

12.40

12.41

12.42

12.43

12.44

12.45

12.46

12.47

12.48

12.49

12.50

12.51

12.52

12.53

12.54

12.55

12.56

12.57

12.19 $E_v = 219$ GPa; $c = 1450$ m/s
12.20 $c = 1150, 1500$ m/s
12.22 $V = 306, 415$ m/s
12.23 $a = 0.305, 0.267\ g$
12.24 $r = 2030, 7940$ m; $a = 22.2, 29.6$ m/s^2
12.25 $dT/dz = -6.49 \times 10^{-3}$ K/m; $dc/dz = -3.83 \times 10^{-3}, -4.36 \times 10^{-3}$ s^{-1}
12.27 $M = 0.437, 2.33, 2.77$
12.28 $V = 725$ m/s
12.29 $V = 657$ m/s; $\alpha = 31.8°$
12.30 $M = 8.32$; $\alpha = 6.90°$
12.31 $V = 6320$ pies/s
12.32 $V = 493$ m/s, $\Delta t = 0.398$ s
12.33 $M = 1.19$; $V = 804$ pies/s; $Re/x = 9.84 \times 10^6$ m^{-1}
12.34 $V = 471$ m/s; $t = 5.90$ s
12.35 $t = 8.51$ s
12.36 $\Delta x = 3.18$ km
12.37 $t \approx 48.5$ s
12.38 $p_0 = 10.2$ psia; 57.5 psia
12.39 $M = 0.885$; $V = 296$ m/s
12.40 $M = 0.199, 0.314$
12.41 $M = 0.851$; $V = 255$ m/s; $z \approx 10$ km
12.42 $p_0 = 546$ kPa; $T_0 = 466$ K; $h_0 - h = 178$ kJ/kg
12.43 p_0 125, 127.6 kPa
12.44 $M = 0.801$; $V = 236$ m/s; $T_0 = 245$ K
12.45 $c = 295$ m/s; $V = 649$ m/s; $\alpha = 27.0°$; $V/V_b = 1.41$; $T_0 = 426$ K
12.46 $p_0 = 28.85$ kPa; $V = 274.1$ m/s, 9.3 por ciento
12.47 $a_x = -161$ m/s^2; $p_0 = 191$ kPa (abs); $T_0 = 346$ K
12.48 $T = 1460$ R; $p_0 = 184$ psia; $\dot{m} = 174$ lbm/s
12.49 Si; No
12.50 $p = 13.23$ psia; -0.454 por ciento
12.51 $V = 890$ m/s; $T_0 = 677$ K; $p_0 = 212$ kPa
12.52 $T_0 = 308$ K; $p_0 = 101.4$ kPa; $\Delta p_0 = 800$ Pa; 0.79 por ciento
12.53 $T_0 = 318$ K; $p_0 = 2.06$ MPa (abs); $p = 1.67$ MPa (abs)
12.54 $V = 620$ m/s; $p_0 = 208$ kPa; $p_0 = 140$ kPa; $T_0 = 408$ K
12.55 $V = 987$ m/s; $p_0 = 125$ kPa; $p_0 = 31.6$ kPa; $T_0 = 707$ K
12.56 $T_0 = 288$ K; $p_0 = 101, 39.9$ kPa; $s_2 - s_1 = 267$ J/kg · K
12.57 $T_0 = 585, 1782$ K; $p_0 = 1.03$ MPa, 963 kPa; $s_2 - s_1 = 1140$ J/kg · K
12.58 $T_0 = 445$ K; $p_0 = 57.5, 46.7$ kPa (abs); $s_2 - s_1 = 59.6$ J/kg · K
12.59 $T_0 = 2900, 1870$ R; $p_0 = 101, 4.57$ psia; $s_2 - s_1 = 0.107$ Btu/lbm · R
12.60 $\Delta p = 48.2$ kPa
12.61 $T_0 = 309, 573$ K; $p_0 = 838$ kPa (abs), 8.13 MPa (abs); $s_2 - s_1 = 170$ J/kg · K
12.62 $\delta Q/dm = 63.0$ Btu/lbm; $p_{0_2} = 56.5$ psia
12.64 $T_0 = 344$ K; $p_0 = 223, 145$ kPa; $s_2 - s_1 = 0.124$ kJ/kg · K
12.65 $T_0 = 621, 883$ R; $p_0 = 67.6, 56.6$ psia; $s_2 - s_1 = 0.0968$ Btu/lbm · R
12.67 $p^*/p_0^* = 0.488, 0.547$
12.68 $T^* = 258$ K, $p^* = 476$ kPa (abs); $V^* = 322$ m/s
12.69 $T^* = 253$ K, $p^* = 476$ kPa (abs); $V^* = 319$ m/s
12.70 $T^* = 260$ K, $p^* = 24.7$ MPa (abs); $V^* = 252$ m/s
12.71 $T^* = 265$ K, $p^* = 19.2$ MPa (abs); $V^* = 254$ m/s
12.72 $T^* = 1880$ K, $p^* = 2.98$ MPa (abs); $V^* = 2550$ m/s
12.73 $T^* = 3180$ K, $p^* = 22.6$ MPa (abs); $V^* = 1110$ m/s
12.74 $T^* = 268$ K, $p^* = 456$ kPa (abs); $V^* = 426$ m/s
12.75 $T^* = 2390$ R, $p^* = 79.2$ kPa (abs); $V^* = 2400$ pies/s

Capítulo 13

13.1 $V = 3280$ pies/s
13.2 $V = 4210$ pies/s
13.3 $V = 996$ m/s
13.4 $V = 1280$ m/s
13.5 $V = 1660$ pies/s; $M = 0.787$; $\dot{m} = 0.274$ lbm/s
13.6 $V = 2620$ pies/s; $M = 0$ 1.36; $\dot{m} = 1.76$b lbm/s
13.7 $V = 502$ m/s; $M = 0.784$; $\dot{m} = 0.190$ kg/s
13.8 $V = 797$ m/s, $M = 1.35$; $\dot{m} = 0.706$ kg/s
13.9 $M = 0.851$; $V = 648$ mph
13.10 $M = 1.35$
13.11 $M_2 = 0$ 1.20
13.12 $M_2 = 1.20$
13.13 $V = 610$ m/s; $A = 0.129$ m^2

13.14 $A = 1.49 \times 10^{-3}$ m^2
13.15 $T = 575$ R; $p = 21.0$ psia
13.16 $\Delta p = 315$ kPa; $A_1/A_2 = 3.79$
13.17 $V = 903$ pies/s; $p_0 = 119$ psia
13.18 $\dot{m} = 8.50$ kg/s
13.19 $p_t = 33$ psia; $M_t = 0.90$; $V_t = 1060$ pies/s
13.20 $p_t = 112$ kPa
13.21 $\dot{m} = 0.548$ kg/s
13.22 $\rho_t = 0.478$ kg/m^3
13.23 $A = 1.92 \times 10^{-3}$ m^2
13.24 $A_{\text{empuje}} = 24.1$ mm^2
13.25 $p_0 = 113$ psia; $\dot{m} = 3.25$ lbm/s
13.26 $M = 1.0$; $A = 450$ mm^2
13.27 $T = 369$ K; $\Delta p = 2.64$ MPa; $\dot{m} = 1.14 \times 10^{-2}$ kg/s
13.28 $p_0 \geq 191$ kPa; $\dot{m} = 1.28$ kg/s
13.29 $\dot{m} = 0.0107$ lbm/s
13.30 $t = 68.4$ s; $\Delta s = 0.0739$ Btu/lbm · R
13.31 $R_x = 1560$ N (a la izquierda)
13.32 $T_0 = 522$ R; $\Delta A = -15.9$ por ciento, $p = 13.5$ psia; $V = 1020$ pies/s
13.33 $p = 803$ kPa (abs); $\dot{m} = 0.113$ kg/s, $a_{rf_x} = 2.28$ m/s^2
13.34 $\dot{m} = 2.73$ lbm/s; $a_{rf_x} = 99.8$ pies/s^2
13.35 $R_x = 304$ lbf, tensión
13.36 $A = 0.0173$ m^2; $V = 390$ m/s
13.38 $t = 23.6$ s
13.39 $t = 23.5$ s; $\Delta s = 161$ J/kg · K
13.40 $\dot{m} = 0.856$ lbm/s
13.41 $M = 0.60$; $T = 298$ K; $p_0 = 700$ kPa; $\dot{m} = 0.622$ kg/s
13.42 $p = 125$ kPa (abs); $\dot{m} = 0.401$ kg/s
13.43 $\dot{m} = 0.0957$ kg/s
13.44 $V = 1300$ m/s; $\dot{m} = 87.4$ kg/s
13.45 $A = 2.99$ pulg^2; $\dot{m} = 3.74$ lbm/s
13.46 $\dot{m} = 5.44$ kg/s
13.47 $\dot{m} = 6.05$ lbm/s; Se reduce en un factor de 2
13.48 $A = 8.86 \times 10^{-4}$ m^2, 1.50×10^{-3} m^2
13.49 $V = 504$ m/s; $A = 0.0596$ m^2
13.50 $R_x = 550$ N
13.51 $\dot{m} = 39.4$ lbm/s; $F_x = 9750$ lbf
13.52 $\dot{m} = 33.0$ kg/s; $A_e = 0.158$ m^2; $A_e/A_t = 18.0$
13.53 $p = 88.3$ kPa (abs); $\dot{m} = 0.499$ kg/s; $K_x = 1030$ N
13.54 $A = 1560$ mm^2
13.55 $p_t = 3290$ psia; $\dot{m} = 0.0524$ lbm/s; Empuje = 2.37 lbf; 36.3 por ciento
13.56 $p = 488$ kPa (abs); $\dot{m} = 0.0688$ kg/s; $D = 12.7$ mm 13.108
13.57 $A_{\text{efi},t} = 74.7$ mm^2; $A_{\text{efi},e} = 295$ mm^2; 13.109
$M = 0.149$, 2.93; 4.9 por ciento de reducción 13.110
13.58 $V = 316$ m/s; $T = 248$ K
13.59 $M = 0.897$; $T_0 = 339$ K 13.111
13.60 $M = 0.20$; $\Delta s = 311$ J/kg · K 13.112
13.61 $\dot{m} = 0.0726$ kg/s; $p \leq 33.5$ kPa (abs) 13.113
13.62 $M = 0.20$; $\dot{m} = 3.19 \times 10^{-3}$ kg/s; 13.114
$p = 47.9$ kPa (abs)
13.63 $T = 287$ K; $p_{0_2} = 423$ kPa; 13.115
$\Delta s = 132$ J/kg · K
13.64 $p = 477$ kPa (abs); $\Delta s = 49.5$ J/kg · K 13.116
13.65 $p = 18.5$ psia; $V = 1040$ pies/s
13.66 $\dot{m} = 0.00321$ kg/s; $p_0 = 33.8$ kPa (abs); 13.117
$\Delta s = 314$ J/kg · K
13.67 $\dot{m} = 0.0192$ kg/s; $T^* = 244$ K; 13.118
$p^* = 53.4$, 13.6 kPa (abs) 13.119
13.68 $F = 822$ lbf
13.69 $M = 0.844$; $p_2 = 475$ kPa; $F = 2650$ N 13.120
13.70 $T = 568$ R; $T_0 = 610$ R; 13.121
$\Delta p_0 = -18.3$ psi; 13.122
$\Delta s = 0.0312$ Btu/lbm · R 13.123
13.72 $p_t = 56.6$ psia; $T = 433$ R; $p_0 = 27.8$ psia; 13.124
$\dot{m} = 0.0316$ lbm/s 13.125
13.73 $V = 686$ m/s; $M = 1.90$ 13.126
13.74 $p = 47.5$ psia; $T = 417$ R; $\Delta s = 0.0360$ Btu/lbm · R 13.127
13.75 $T = 468$ K; $p = 313$ kPa (abs)
13.76 $T = 468$ K; $F = 60$ N; $\Delta s = 149$ J/kg · K 13.128
13.77 $V_1 = 688$ m/s; $M_1 = 1.90$; $F = 220$ N (a la derecha)
13.78 $T = 238$ K; $p = 26.1$ kPa (abs); 13.129
$\Delta s = 172$ J/kg · K
13.79 $L = 2.88$ m 13.130
13.81 $L = 1.27$ m 13.131
13.82 $T = 459$ K; $L = 34.5$ m 13.132
13.84 $L = 18.8$ pies
13.90 $L = 11.1$ pies 13.133
13.91 $L = 0.405$ m 13.134
13.93 $p = 191$ kPa (abs); $L = 5.02$ m; 13.135
$\Delta s = 326$ J/kg · K
13.95 $M = 0.25$; Se añade 13.136
13.102 $Q = 1.84 \times 10^8$ pies^3/día
13.103 $\delta Q/dm = 145$ kJ/kg; $\Delta p = 405$ kPa 13.137
13.104 $\delta Q/dm = 243$ Btu/lbm
13.105 $M_1 = 0.604$; $\dot{Q} = 1.37$ MW; $p_2 = 265$ kPa (abs); $\Delta s = 150$ J/kg · K 13.140
13.106 $\delta Q/dm = 449$ kJ/kg; $\Delta s = 0.892$ kJ/Kg · K 13.141
13.107 $T = 1490$ K; $M = 0.230$; 13.144
$\Delta p_0 = -28.0$ kPa 13.145

13.108 T_0= 497 K; M = 0.286; Δs = 593 J/kg · K
13.109 $\dot{Q}$ = 111 kW; $p_1 - p_2$ = 1.30 MPa
13.110 $\delta Q/dm$ = 18 kJ/kg; Δs = 53.2 J/kg · K; Δp_0 = 2.0 kPa
13.111 $\dot{Q}$ = 1080 Btu/s; M = 0.501
13.112 $\delta Q/dm$ = 240 Btu/lbm; p_{0_2} = 97.1 psia
13.113 T_0 = 483 R; p = 13.4 psia; Δp_0 = 0.1 psia
13.114 p = 105 psia; T_0 = 2380 R; M = 0.901; $\delta Q/dm$ = 371 Btu/lbm
13.115 M = 0.498; T = 1480 K; T_0 = 1550 K; $\dot{Q}$ = 1.85 MJ/s
13.116 V = 1520 pies/s; T = 2310 R; $\dot{Q}$ = 740 Btu/s
13.117 p = 209 psia; $\dot{Q}$ = 2300 Btu/s; $\dot{m}_f$ = 0.128 lbm/s
13.118 $\delta Q/dm$ = 330 Btu/lbm; Δp_0 = − 2.45 psia
13.119 V = 866 m/s; p = 46.4 kPa; M = 1.96; $\delta Q/dm$ = 156 kJ/kg
13.120 $\delta Q/dm$ = 62.9 Btu/lbm; p_0 = 56.6 psia
13.121 $p_2 < p_{atm}$; $M_2 > 1.0$
13.122 $\delta Q/dm$ = 145 kJ/kg; p = 696 kPa
13.123 M = 0.26; p = 97.9 kPa
13.124 M = 0.30; T_0 = 2000 R; P_0 = 97.1 psia
13.125 M = 0.50; T_0 = 1560 R; $\dot{Q}$ = 1.86 MJ/s
13.126 V = 865 m/s; p = 46.7 kPa; M = 1.96; $\delta Q/dm$ = 162 kJ/kg
13.127 Δp_0 = − 22 kPa; $\delta Q/dm$ = 447 kJ/kg; Δs = 889 J/kg · K
13.128 $\delta Q/dm$ = 17.0 kJ/kg; T = 318 K; p = 46.3 kPa; p_0 = 87.7 kPa
13.129 T_0 = 497 K; M = 0.28; Δp_0 = − 7.0 kPa; $s_2 - s_1$ = 588 J/kg · K
13.130 $\dot{Q}$ = 898 Btu/s; M = 0.50; p = 7.84 psia
13.131 M = 1.0; p = 48.8 kPa; Δp_0 = − 8.60 kPa
13.132 A = 0.00269 m^2; $\delta Q/dm$ = − 26.4 kJ/kg; Δp_0 = 0.60 kPa; Δs = − 95.6 J/kg · K
13.133 $\dot{Q}$ = 5.16 × 10^4 Btu/s
13.134 $\delta Q/dm$ = 313 Btu/lbm; Δp_0 = − 34 psia
13.135 T_0 = 764 K; $\dot{m}$ = 0.0215 kg/s; A_e/A_t = 4.23
13.136 T_0 = 623 K; M = 0.601; $\delta Q/dm$ = 342 kJ/kg; Fracción = 0.614
13.137 $\delta Q/dm$ = 899 kJ/kg; M = 1.0; Δp_0 = − 173 kPa
13.140 $\delta Q/dm$ = 0; F = 24.3 N; Δs =0 45.6 J/kg · K
13.141 Q = 53.1 pies^3/min;: Δh 0 0.665 pulg H_2O
13.144 p = 344 kPa
13.145 p = 28.1 psia
13.146 V =0 247 m/s; T = 671 K
13.147 V = 256 m/s; M = 0.490
13.148 M = 0.707; V = 269 m/s; p_0 = 205 kPa
13.149 T = 521 K; p_0 = 1.29 MPa
13.150 M = 0.50; T = 679 K
13.151 T_0 = 426 K; p_0 = 207, 130 kPa
13.152 V = 536 m/s
13.153 p_0 = 7.22 psia; T_0 = 954 R
13.154 ρ = 0.359 lbm/pies^3; M = 0.701
13.156 V = 258 m/s; Δp = 471, 482 kPa
13.157 M = 0.545; p = 514 kPa; p_0 = 629 kPa; A = 0.111 m^2
13.158 T_0 = 533 K; Δp = 37.4 kPa; Δs = 30.0 J/kg · K; p_0 = 116 kPa
13.159 V = 265, 279 m/s
13.160 M = 0.701; V = 267 m/s; p_0 = 205 kPa
13.161 p = 345 kPa; Δp_0 = − 167 kPa
13.162 V = 247 m/s, T = 670 K; Δs = 315 J/kg · K
13.163 p = 28.1, 85.7 psia
13.164 T = 520 K; p_0 = 1.29 MPa
13.165 M = 0.501; T = 680 K; Δs = 229 J/kg · K
13.166 V = 257 m/s; M 0 0.493; Δp_0 = − 512 kPa
13.167 V = 255 m/s; Δp = 473, 824 kPa
13.168 T_0 = 426 K; p_0 = 207, 130 kPa
13.169 T = 533 K; p_0 = 54.6 kPa
13.170 M = 2.48; V = 2420 pies/s; p = 24.3 psia; p_0 = 29.1 psia
13.171 T = 414 K; p = 51.9 kPa; p_0 = 57.9 kPa
13.172 Δp_0= 1.6 kPa; p = 51.5 kPa
13.173 A= 2.32 pies^2; Δs = 0.0423 Btu/lbm · R
13.174 Δp_0 = − 14.1 psi; Δs = 0.0591 Btu/lbm · R
13.176 M = 3.20; V = 949 m/s
13.177 V = 2170 pies/s
13.178 M_4 = 0.70; p_4 = 131 psia; L= 5.93 pies
13.179 p = 33.4 kPa; V = 162 m/s
13.180 p = 66.6 psia
13.183 Δp = 27.5 kPa; Δp_0 = − 26.9 kPa
13.184 p = 301 kPa
13.185 p = 46.7 psia; A = 1.52 pulg^2; $\dot{m}$ = 2.55 lbm/s
13.186 p = 587 kPa; A_e = 755 mm^2; A = 448 mm^2
13.189 p = 33.4 kPa; V = 162 m/s
13.190 M = 1.45; $\dot{m}$ = 0.808 lbm/s
13.191 M = 0.701; p = 167 kPa; Δs = 20.9 J/kg · K
13.192 M = 1.92; p = 89.4, 58.6, 14.5 psia

13.193 $M = 2.94$; $p_0 = 3.39$ MPa;
$p = 3.35$, 1.00 MPa, 101 kPa
13.194 $p = 301$ kPa
13.195 $p = 46.7$ psia; $A = 1.52$ pulg^2;
$\dot{m} = 2.55$ lbm/s
13.196 $p = 587$ kPa; $A_e = 756$ mm^2; $A = 448$ m^2
13.197 $M = 1.50$
13.198 $33.4 < p_b < 99.6$ kPa; $\dot{m} = 0.121$ kg/s
13.199 $M = 2.12$; $V = 2000$ pies/s
13.200 $p_{atm} < p_0 < 112$ kPa y $p_0 > 743$ kPa
13.201 $M = 2.14$
13.202 $V = 2140$ pies/s; $\Delta s = 0.0388$ Btu/lbm · R

Índice

Accesorios, pérdidas en, *véase* Pérdida de carga, en válvulas y accesorios
Aceite lubricante, 845, 846
Aceleración:
  convectiva, 232
  de una partícula en un campo de velocidad, 231, 232
    coordenadas cilíndricas, 233
    coordenadas rectangulares, 232
  gravitacional, 12
  local, 232
Aceleración convectiva, 232
Aceleración local, 232
Acelerómetro, 104
Ala pequeña, 503
Alabeo, 499
Álabes guías, 603
Alcantarilla, 541
Alerón, 506
Anemómetro:
  de hilo caliente, 431
  de película caliente, 431
Anemómetro de hilo caliente, 431
Anemómetro de película caliente, 431
Ángulo de ataque, 499
Ángulo de contacto, 841
Ángulo de Mach, 714
Área, centroide de, 73
  momento de inercia de, 73
  producto de inercia de, 73
Área del ala del avión, 496, 499
Área mojada, 484
Arrastre de fricción, *véase* Arrastre
Arrastre debido a la presión, *véase* Arrastre
Arrastre inducido, 505
Arrastre, 38, 454, 483
  forma, 506
  fricción, 484, 489
  parásito, 511
  perfil, 505
  presión, 487, 489
Atmósfera:
  estándar, 66
  isotérmica, 91
Atmósfera estándar, 66
  propiedades de, 67, 840
Atracción gravitacional, ley de, 89

Barómetro, 61
Barriles, industria petrolera de EU, 17, 446, 447
Bomba, 602, 640
  desplazamiento positivo, 659
  "leyes", 339, 632
  operación a velocidad variable, 649
  operación en paralelo, 647
  operación en serie, 646
  velocidad específica, 628
Bomba de chorro, 189, 214, 347, 449
Boquilla entrante, 312

Calor específico:
  presión constante, 701, 847
  volumen constante, 701, 847
Campo de densidad, 21
Campo de esfuerzo, 26
Campo de flujo uniforme, 23
Campo de flujo, dimensiones de, 22
Campo de presión, 56
Campo de velocidades, 21
Canal, 539
Canal, 541, 592
Canal Parshall, 592
Canal prismático, 541
Canales abiertos:
  características de, 540
  contornos de velocidad en, 542
  prismáticos, 541
  propiedades geométricas de, 540
  regímenes de flujo en, 546
  secciones transversales óptimas, 566, 567
Capa de agua, 590

Capa límite, 36, 454
control, 507, 511
ecuación integral del momento para, 464, 468
efecto del gradiente de presión sobre, 479
espesor de momento, 457
espesor del desplazamiento, 456
espesor, 456
espesores, 456
espesores integrales, 457
factor de forma, 481
laminar:
solución aproximada, 471
solución exacta, 459
perfiles de momento, 481
perfiles de velocidad, 480
placa plana, 456
separación, 480
transición, 456
turbulento, 455, 476
Capa límite laminar, 459
placa plana, solución aproximada, 471
placa plana, solución exacta, 459
Capa límite turbulenta, solución aproximada para placa plana, 475
Carga, 282, 384, 607
bruta, 622, 625
de válvula cerrada, 615
neta, 622, 625
Carga a válvula cerrada, 615
Carga de ala, 503
Carga específica, 548
Carga neta de succión positiva, 636
Cavitación, 41
Celeridad, 542
Centro de presión, 70, 71
Chumacera, 363
Chumacera, cojinete, 364
Cifras significativas, 2
Cilindro:
flujo alrededor de, 37
flujo no viscoso alrededor de, 38, 300
Cinemática del movimiento de un fluido, 229
Cintas de video, mecánica de fluidos, 851
Circulación, 239
Coeficiente de arrastre, 483
aeronave completa, 505
cilindro, 492
rotatorio, 515
esfera, 490, 532
giratoria, 512
inducido, 505
objetos seleccionados, 488
pelota de golf, 513
perfil aerodinámico, 477, 505
placa plana normal al flujo, 487
placa plana paralela al flujo, 484
puntal aerodinámico, 495
vehículo, 335
Coeficiente de carga, 337, 627
Coeficiente de contracción, 312, 443
Coeficiente de descarga, 419
compuerta de esclusa, 591
medidor venturi, 424
placa de orificio, 421
tobera de flujo, 423
vertedor, 586, 590
Coeficiente de empuje, 668
Coeficiente de energía cinética, 383
Coeficiente de flujo, 420
placa de orificio, 421
tobera de flujo, 423, 424
turbomáquina, 337, 627
Coeficiente de flujo de momento, 441
Coeficiente de fricción superficial, 462, 472, 477
Coeficiente de pérdida de carga, 391
Coeficiente de pérdida menor, *véase* Coeficiente de pérdida de carga
Coeficiente de pérdida, *véase* Pérdida de carga
Coeficiente de potencia, 337, 628, 668
Coeficiente de presión, 326, 393
Coeficiente de recuperación de presión, 393
ideal, 395
Coeficiente de rugosidad de Manning, 561
Coeficiente de rugosidad, Manning, 560
Coeficiente de sustentación, 498
cilindro rotatorio, 514
esfera girando, 512
pelota de golf girando, 513
perfil aerodinámico, 500
Coeficiente de velocidad de avance, 668
Coeficiente del momento de torsión, 627, 668
Compresor, 602
Compuerta de esclusa, 131, 273, 554, 591
relación de flujo *vs.* profundidad aguas abajo, 556
Condición de irrotacionalidad, 287
Condición sin deslizamiento, 3, 35
Condiciones críticas, flujo compresible, 723
Condiciones de diseño, *véase* Tobera
Cono de Mach, 714
Conservación:
coordenadas cilíndricas, 222
coordenadas rectangulares, 216
de la energía, *véase* Primera ley de la termodinámica
de la masa, 107, 117, 216
Consistencia, 667
Constante de gas universal, 700
Constante de gas:
ecuación de estado de gas ideal, 5, 700, 847
universal, 701
Continuidad, *véase* Conservación de la masa
Coordenadas de línea de corriente, 259, 263
Correlación de Manning, 560

Cuerda, 499
Cuerpo rígido, movimiento de un fluido, 83
Curvas del sistema, 639
Curvatura de línea de corriente, 261, 511

Deformación:
  angular, 230, 241
  lineal, 230, 243
  tasa de, 29, 241
Deformación angular, 240
Deformación lineal, 229, 244
Densidad, 19
Densidad relativa, 837, 838, 839
Derivada de materia, 232
Derivada de partícula, 232
Derivada del sistema, 109
  relación con el volumen de control, 115
Derivada sustancial, 232
Derivada, sustancial, 232
Diagrama de energía específica, 549
Diagrama de Moody, 387
Diagrama Ts, 706
Diámetro hidráulico, 397, 769
Difusor, 393, 409, 602, 738
  geometrías óptimas, 393
  recuperación de presión en, 394
  supersónico, 807
Difusor cónico, 394
Dilatación de volumen, 243
Dilatación, volumen, 243
Dilatante, 34
Dimensión, 10
Dimensión primaria, 10, 320
Dimensión secundaria, 10
Dimensiones del campo de flujo, 22
Dina, 11
Distribución de presión:
  automóvil, 512
  cilindro, flujo no viscoso, 300
  difusor, 411, 480
  esfera, 491
  longitud de entrada de tubería, 407
  perfil aerodinámico, 496, 501
  tobera convergente, 745
  tobera convergente-divergente, 751, 805
Distribución de presión hidrostática, 131
Doblete, 295
  resistencia de, 296
Ducto no circular, 396

Ecuación básica de la estática de los fluidos, 56
Ecuación de Bernoulli, 139, 263, 551
  aplicaciones, 270
  flujo irrotacional, 287
  flujo no estacionario, 284
  precauciones en el uso de, 276
  relación con la primera ley de la termodinámica, 277
  restricciones en el uso de, 264
Ecuación de Chezy, 560
Ecuación de continuidad, forma diferencial, 216
  coordenadas cilíndricas, 222
  coordenadas rectangulares, 216
Ecuación de estado de gas ideal, 5, 700, 847
Ecuación de estado, 5
  gas ideal, 5
Ecuación de Euler para turbomáquinas, 606
Ecuación de la energía, para flujo en tuberías, *véase también* Primera ley de la termodinámica
Ecuación de Laplace, 290
Ecuación de momento:
  forma diferencial, 244
  para flujo no viscoso, 258
  para un volumen de control con aceleración arbitraria, 152
  para un volumen de control con aceleración rectilínea, 144
  para un volumen de control diferencial, 136
  para un volumen de control inercial, 124
  para un volumen de control moviéndose con velocidad constante, 141
Ecuación diferencial, sin dimensionalizar, 341
Ecuación inestable de Bernoulli, 284
Ecuación integral de momento, 464, 468
  para flujo de gradiente de presión cero, 470
Ecuaciones básicas para el volumen de control, 107
  conservación de la masa, 116
  para el volumen de control con aceleración arbitraria, 152
  para el volumen de control con aceleración rectilínea, 144
  para el volumen de control diferencial, 136
  para el volumen de control rotatorio, 163
  para el volumen de control sin aceleración, 124
  primera ley de la termodinámica, 168
  principio del momento angular, para el volumen de control inercial, 159
  segunda ley de la termodinámica, 175
  segunda ley de Newton (momento lineal), para el volumen de control moviéndose con velocidad constante, 141
Ecuaciones constitutivas, 5
Ecuaciones de capa límite de Prandtl, 354, 459
Ecuaciones de Euler, 248, 258
  a lo largo de una línea de corriente, 260
  coordenadas cilíndricas, 259
  coordenadas de la línea de corriente, 259
  coordenadas rectangulares, 258
  normal a la línea de corriente, 261
Ecuaciones de Gibbs, 703
Ecuaciones de movimiento, *véase* Ecuaciones de Navier-Stokes
Ecuaciones de Navier-Stokes, 246

coordenadas cilíndricas, 849
coordenadas rectangulares, 247
Ecuaciones Tds, 704
Efecto Coanda, 185
Efecto de capilaridad, 95, 323
Efecto Doppler, 430, 714
Efecto Magnus, 515
Eficiencia:
bomba de chorro, 214
bomba, 214, 337, 607
difusor, 834
molino de viento, 214, 677
propulsiva, 214, 215, 667
propulsor, 214, 670
tobera, 834
turbina hidráulica, 607
Elemento de flujo laminar (EFL), 425
Energía específica, 548
Energía interna, 701
Energía mecánica, 384
Entalpía, 701
Entalpía de estancamiento, 729, 734
Entrada reentrante, 312
Entropía, 703
Envejecimiento de tuberías, 390
Envergadura de ala, 503
Envergadura, ala, 503
Ergómetro, 451
Esfuerzo, 26
componentes, 28, 247, 849
convención de signos, 29
de compresión, 57
de corte, 27, 247, 849
de deformación, 33
normal, 27, 170, 247, 849
notación, 28
Esfuerzo de corte aparente, 378
Esfuerzo de corte de pared, 377, 462, 472, 476
Esfuerzo de corte, 2, 27
distribución en tubería, 376
Esfuerzo de deformación, 33
Esfuerzo de Reynolds, 378
Esfuerzo normal, 27, 170, 247
Esfuerzos, fluido newtoniano, 247
Espesor de desplazamiento, 456
Espesor de momento, 457
Espesor de perturbación, *véase* Capa límite
Estabilidad, 81
Estado de estancamiento, 714
Estado:
ecuación de, 5
termodinámico, 714
Estática de fluidos:
ecuación básica de, 56
relación presión-altura, 60
Estela, 39, 454
Estrangulación, 746, 762, 781, 808, 809
Estudios de modelos, 327
Expansión de la serie de Taylor, 57, 217, 237, 245, 359, 377, 465, 466, 468
Expansión súbita, 355
Experimento de Reynolds, 355

Factor de forma, perfil de velocidad, 482
Factor de fricción, 384, 386, 387
correlación de datos para, 387
correlación de tubería lisa, 389
de Darcy, 386
de Fanning, 386, 442
Factores de conversión, 890
Fluido, 3
Fluido barotrópico, 66
Fluido estático, variación de la presión en, 59
Fluido ideal, 258
Fluido incompresible, 61
Fluido newtoniano, 30, 246
Fluido no newtoniano, 30, 33
dependiente del tiempo, 34
índice de comportamiento de flujo, 33
índice de consistencia, 33
modelo de la ley de potencia, 33
reopéctico, 34
seudoplástico, 33
tixotrópico, 34
viscoelástico, 34
viscosidad aparente, 33
Flujo adiabático, *véase* Flujo de la línea de Fanno
Flujo bidimensional, 22
Flujo completamente desarrollado, 356
laminar, 357
turbulento, 379
Flujo compresible, 41, 700
tablas para el cálculo de, 866
Flujo crítico en canal abierto, 546
Flujo de entrada sin choque, 608
Flujo de la línea de Rayleigh, 777
adición máxima de calor, 783
diagrama Ts, 781, 783
ecuaciones básicas para, 777
efectos sobre las propiedades, 782
estrangulamiento, 780, 809
tablas para el cálculo de, 786, 875
Flujo de línea de Fanno, 758, 761
diagrama Ts, 761, 762
ecuaciones básicas para, 758
efectos sobre las propiedades, 762
formación de choque normal en, 810
longitud de estrangulamiento, 763, 771, 809
tablas para el cálculo de, 766, 871
Flujo de momento, 126
Flujo deslizante, 435
Flujo en canal abierto, 42, 539

ecuación de energía para, 546
efecto del cambio de área, 551
flujo crítico normal, 568
flujo gradualmente variado, 571
flujo sin fricción en, 551
efecto de la elevación de la plantilla, 553
flujo uniforme, 558
mediciones en, 586
perfiles superficiales en, 572, 574, 575
profundidad normal, 558
propagación de ondas superficiales, 542
salto hidráulico, 580
Flujo estacionario, 21, 219, 224
Flujo externo, 45, 468
Flujo gradualmente variado, 571
clasificación de perfiles superficiales, 571
Flujo hipersónico, 712
Flujo incompresible, 41, 219, 224
Flujo inestable, 22
Flujo interno, 41, 355
Flujo irrotacional, 238, 287
Flujo isentrópico, 730
condiciones de referencia para el, 740
ecuaciones básicas para el, 730
gas ideal, 739
efecto de la variación de área sobre, 736, 741
en tobera convergente, 745
en tobera convergente-divergente, 751
tablas para el cálculo de, 743, 866
Flujo isotérmico, 775
Flujo laminar, 39, 355
en tuberías, 371
entre placas paralelas, 357
ambas placas estacionarias, 357
una placa en movimiento, 364
Flujo no viscoso, 34, 258
Flujo secundario, 395, 542
Flujo sin fricción:
adiabático compresible, *véase* Flujo isentrópico
compresible con transferencia de calor, *véase* Flujo de la línea de Rayleigh
en canal abierto, *véase* Flujo en canal abierto
incompresible, 35, 258
Flujo transónico, 712
Flujo tridimensional, 22
Flujo turbulento en una tubería, 376
distribución del esfuerzo de corte, 378
perfil de velocidad, 379
capa de pared, 378
defecto de velocidad, 380
ley de potencia, 380
logarítmica, 380
subcapa viscosa, 379
velocidad fluctuante, 378
velocidad media, 378
Flujo turbulento, 39, 355
Flujo unidimensional, 22
Flujo uniforme:
en canal abierto, 558
en una sección, 22, 119, 558
Flujo viscoso, 35
Flujos planos elementales, *véase* Teoría de flujo potencial
Fuente, 292
intensidad de, 292
Fuerza:
cuerpo, 26
de arrastre, 483
de compresibilidad, 326
de corte, 482
de flotación, 81
de gravedad, 325
de inercia, 325
de presión, 57, 325, 482
de superficie, 26, 482
de sustentación, 482
de tensión superficial, 326
hidrostática, 69
sobre una superficie curva sumergida, 77
sobre una superficie plana sumergida, 69
viscosa, 325
Fuerza de cuerpo, 26
Fuerza de flotación, 81
Fuerza debida a la presión, 57
Fuerza hidrostática, 69
en superficies curvas sumergidas, 77
en superficies planas sumergidas, 69
Fuerza superficial, 26
Función de corriente, 225, 227
Función de potencial, 289

Garganta, tobera, 737
Gas ideal, 5, 700
g_c, 11
Generador de vórtice, 508
Golpe de ariete, 348
Gradiente, 58
Gradiente de presión adverso, 39, 454, 480
Gradiente de presión, 58, 480
efecto sobre la capa límite, 479
Gradiente vertical, 727
Gráfica polar, sustentación-arrastre, 502
Gravedad, aceleración de la, 12
Gravitacional inglés (sistema de unidades), 12

Hidrómetro, 102
Hielo, 838
Homogeneidad dimensional, 10

Impulso específico, 208
Impulsor, 602
Impulsor, turbomáquina, 604

Incertidumbre experimental, 3, 882
Incertidumbre, experimental, 882
Inclinación, 667
Índice de comportamiento del flujo, 33
Índice de consistencia, 33
Instalaciones de pruebas de modelos, 340

Kilogramo fuerza, 686

Ley de arrastre de Stokes, 489
Leyes básicas para sistemas, principio del momento angular, 107-108
  conservación de la masa, 107
  forma diferencial, 245
  primera ley de la termodinámica, 108
  segunda ley de la termodinámica, 109
  segunda ley de Newton (momento lineal), 108
Límite de confianza, 884
Línea de corriente, 23
  ecuación de, 25, 226
Línea de gradiente de energía, 282, 409, 411, 560
Línea de gradiente hidráulico, 282, 409, 411, 560
Línea de gradiente, 282
  energía, 282, 409, 411
  hidráulica, 282, 409, 411
Línea de trayectoria, 24
Línea de traza, 23
Línea en el tiempo, 24
Línea media, 499
Longitud de entrada, 356
Longitud equivalente, 391
  accesorios y válvulas, 395, 396
  codos, 395
  codos angulares, 395

Manómetro, 61
  de depósito, 64
  de líquido múltiple, 62
  de tubo en U, 64
  sensibilidad, 64
Maquinaria hidráulica, 601
  bomba, 602
  características de funcionamiento, 616
  desplazamiento positivo, 601
  dinámica, *véase* Turbomáquina
  propela, 603
  turbinas, 604
  ventilador, 602
Marco de referencia no inercial, 153
Marco de referencia, no inercial, 154
Masa molecular, 701, 847
Matriz dimensional, 323
Medición de velocidad, *véase* Medición de flujo
Medición del flujo, 417
  flujo en canal abierto, 586
    canales críticos, 592
    compuertas de esclusa, 591
    vertedores, 586, 590
  flujo interno, 418
    medidores de flujo de restricción, 418
      elemento de flujo laminar, 425
      placa de orificio, 421
      tobera de flujo, 423
      venturi, 424
    medidores de flujo lineal, 429
      de desprendimiento de vórtice, 429
      electromagnético, 429
      rotatómetro, 429
      tipo flotador, 429
      turbina, 429
      ultrasónico, 430
    métodos directos, 417
    métodos transversales, 430
      anemómetro láser Doppler, 431
      anemómetro térmico, 431
Medición, flujo, *véase* Medición de flujo
Medidor de flujo de flotador, 429
Medidor de flujo de turbina, 429
Medidor de flujo mecánico, *véase* Medición de flujo
Medidor de flujo venturi, 424
Medidor de flujo, *véase* Medición de flujo
Medidor de gancho, 588
Medidor, flujo, *véase* Medición de flujo
Medio continuo, 19
Menisco, 323
Método de descripción euleriano, 10, 243
Método de descripción lagrangiano, 8, 234
Métodos de descripción:
  euleriano, 10, 234
  lagrangiano, 8, 234
Métrico absoluto (sistema de unidades), 11
Milla, náutica, 891
Modelo de la ley de potencia, fluido no newtoniano, 33
Módulo de elasticidad, 66
Módulo volumétrico (compresibilidad), 66, 710, 839
Molino de viento, 193, 214, 675
Momento:
  angular, *véase* Principio del momento angular
Momento lineal, *véase* Segunda ley de movimiento de Newton

National Transonic Facility (NTF), 341, 727
Newton, 11
Número de cavitación, 326, 671
Número de Euler, 336
Número de Froude, 326, 545
Número de Mach, 41, 327
Número de Reynolds crítico, *véase* Transición
Número de Reynolds, 41, 326
  crítico, *véase* Transición
Número de Strouhal, 343
Número de Weber, 327

Oleada, 600
Oleaje, 600
Onda aislada, 542
Onda capilar, 346
Onda de agua poco profunda, 544
Onda de choque normal, 790
  diagrama Ts, 795
  ecuaciones básicas para, 791
  efectos sobre las propiedades, 795
  flujo de canal supersónico con, 804
  tablas para el cálculo de, 799, 879
Onda de choque, normal, *véase* Onda de choque normal
Operador delta:
  coordenadas cilíndricas, 83, 224, 289
  coordenadas rectangulares, 58, 219
Orificio, reentrante, 312

Parámetro de repetición, 320
Partícula de fluido, 21
Pascal, 17, 890
Paso, 491
Películas, 851
Pendiente:
  clasificación de, 568
  plantilla, 568
Pérdida de carga, 383
  en cambios de área repentinos, 393
  en codos angulares, 395
  en codos de tubería, 395
  en contracciones graduales, 392
  en difusores, 395
  en ensanchamientos y contracciones, 392
  en entradas de tubería, 391
  en entradas, 391
  en flujo en canal abierto, 546, 560
  en salidas, 391
  en toberas, 393
  en tuberías, 384
  en válvulas y accesorios, 396
  mayor, 376, 384
  menor, 376, 391
  permanente, 425
  total, 384
Pérdida de carga permanente, *véase* Pérdida de carga
Pérdida de sustentación, ala, 498
Pérdida mayor, *véase* Pérdida de carga
Pérdida menor, *véase* Pérdida de carga
Pérdida, mayor y menor, *véase* Pérdida de carga
Perfil aerodinámico, 39, 495
Perfil de velocidad de la ley de potencia, 380
Perfil de velocidad, 36
  en flujo en tuberías, laminar, 374
    turbulento, 379
Perfil superficial, flujo en canal abierto, 572, 575
  cálculo de, 576
Perfil, velocidad, *véase* Perfil de velocidad
Perfiles de velocidad similares, 460, 461
Perímetro mojado, 397, 541, 768
Peso, 12
Peso específico, 60
Pie cúbico estándar (de gas), 15
Placa de orificio, 421
Placa final, 503
Placa plana, flujo sobre, 456
Plástico de Bingham, 33
Poise, 31
Polígono de velocidad, 608
Potencia hidráulica, 607
Potencia mecánica, 607
Potencial de velocidad, 288
Potencial, velocidad, 288
Presión, 56, 60
  absoluta, 60
  centro de, 70, 71
  dinámica, 266, 267
  estancamiento isentrópico, *véase* Propiedades de estancamiento isentrópico
  estancamiento, 266, 267
  estática, 266
  manométrica, 60
  termodinámica, 247, 266
Presión absoluta, 60
Presión de estancamiento, 266, 267
  isentrópico, *véase* Propiedades de estancamiento isentrópico
Presión dinámica, 266, 267
Presión estática, 266
Presión manométrica, 60
Presión termodinámica, *véase* Presión
Primera ley de la termodinámica, 108, 168
Principio de Arquímedes, 82
Principio del momento angular, 108, 158
  volumen de control fijo, 158
  volumen de control rotatorio, 163
Probeta de presión de estancamiento, 268
Probeta de presión estática, 267
Proceso adiabático, 703
Proceso irreversible, 703
Proceso isentrópico, 703
Proceso reversible, 703
Profundidad conjugada, 583
Profundidad crítica, 550
Profundidad hidráulica, 542
Profundidad normal, 539, 558
Profundidad siguiente, 582
Profundidades alternas, 549
Propela, 193, 603, 664
  coeficiente de empuje, 668
  coeficiente de momento de torsión, 668
  coeficiente de potencia, 668
  coeficiente de velocidad de avance, 668
  consistencia, 667

disco actuador, 664
eficiencia propulsiva, 667
eficiencia, 668
inclinación, 667
Propiedad extensiva, 108
Propiedad intensiva, 110
Propiedades de estancamiento isentrópico, 714
para gas ideal, 715, 719
Propiedades de estancamiento, *véase* Propiedades de estancamiento isentrópico
Propiedades de fluidos, 837
Propiedades físicas, 837
Propiedades, fluido, 837
Proporción dimensional:
ducto rectangular, 397
perfil aerodinámico, 502
placa plana, 487
Propulsión, eficiencia, 214, 668
Punto de estancamiento, 37, 301, 453

Radio hidráulico, 541
Razón de área, 740
flujo isentrópico, 741
Razón de energía cinética, 353
Razón de presión crítica, 723
Red, tuberías, 412
Régimen de flujo completamente rugoso, 387, 389
Relación básica presión-altura, 60
Relación de calor específico, 702, 847
Relación de corte, 30
Relación de flujo de volumen, 118
Relación de giro, 512
Relación sustentación/arrastre, 502
Reopéctico, 34
Representación de campo, 21
Rodete, turbomáquina, 604
Rotación, 229, 236
Rotacional, 238, 289
Rueda de Pelton, 211, 622
Rugosidad relativa, 386, 388
Rugosidad, relativa, 387, 388

Salto hidráulico, 215, 580
aumento de profundidad a través del, 582, 584
ecuaciones básicas para el, 580
pérdida de carga a través del, 583, 584
Sangre, 55
Segunda ley de la termodinámica, 109, 175
Segunda ley de movimiento de Newton, 108
Separación, 38, 480
Separador de vórtice, 350, 492
Seudoplástico, 33
Sifón, 271, 447
Similitud:
cinemática, 327
dinámica, 328
geométrica, 327
incompleta, 330
reglas, 632
Similitud cinemática, 327
Similitud dinámica, 328, 342
Similitud geométrica, 327
Similitud incompleta, 330
Similitud, 342
Sistema de coordenadas inercial, 124, 145
Sistema de unidades inglés para ingeniería, 12
Sistema, 6
Sistemas:
de dimensiones, 10
de unidades, 11
Sistemas de tuberías, 397
de un solo tubo, 397
redes, 413
Sistemas hidráulicos, 69
Slug, 12
Solución de Blasius, 459
Sonido, velocidad de, 708, 711
Soplador, 602
Stoke, 31
Subcapa viscosa, 379
Sumidero, 295
intensidad de, 295
Superficie de control, 7
Superficie libre, 87, 540
Superposición, de flujos planos elementales, 296
método directo de, 296
método inverso de, 300
Sustentación, 454, 482, 498

Tamaños de tuberías estándar, 399
Tasa de deformación, 29, 240
Temperatura de estancamiento, 719
Tensión superficial, 841
Teorema de Stokes, 239
Teorema Pi de Buckingham, 318
Teorema Pi, 328
Teoría de flujo potencial, 289
flujos planos elementales, 292
doblete, 293
flujo uniforme, 292
fuente, 292
sumidero, 292
vórtice, 292
superposición de flujos planos elementales, 296
Teoría de la propela de Rankine, 193, 665
Termodinámica, repaso de, 678
Tixotrópico, 34
Tobera, 270, 737
condiciones de diseño, 752
convergente, 738, 745
convergente-divergente, 738, 751, 805
flujo estrangulado en, 746, 752

flujo incompresible a través de, 270
onda de choque normal en, 805
sobreexpandida, 753
subexpandida, 752
Tobera convergente, *véase* Tobera
Tobera convergente-divergente, *véase* Tobera
Tobera de flujo, 423
Tobera sobreexpandida, 753
Tobera subexpandida, 752
Toma de presión, 266, 421
Toma de presión estática, 267
Torbellino descendente, 504
TPE (temperatura y presión estándares), 15, 19
Trabajo de corte, 170
Trabajo de flecha, 169
Trabajo, relación de, 169
convención de signos para, 108
de corte, 170
de eje, 169
Transferencia de calor, convención de signos para la, 109
Transición, 356, 455, 490
Traslación, 230
Tsunami, 545
Tuberías:
envejecimiento, 390
flujo compresible en, *véase* Flujo de la línea de Fanno
flujo laminar en, 371
no circulares, 396
pérdida de carga, *véase* Pérdida de carga
rugosidad relativa, 386, 388
tamaños estándar, 399
Tubo de carga total, 268
Tubo de corriente, 277
Tubo de Pitot, 268
Tubo de succión, 625
Túnel de viento, 333, 341
supersónico, 807
Turbina, 603
de impulso, 604, 622
de reacción, 604, 625
de viento, 675
hidráulica, 604, 671
Turbina de viento, 675
eficiencia, 677
Turbina Francis, 604, 626
Turbina hidráulica, 604, 671
Turbina Kaplan, 604, 626
Turbomáquina, 602
bomba, 602
centrífuga, 602
coeficiente de carga, 337, 627
coeficiente de flujo, 337, 627
coeficiente de potencia, 337, 628
coeficiente del momento de torsión, 627
flujo axial, 602
flujo mixto, 602
flujo radial, 602
leyes de semejanza para, 337
paso, 602
velocidad específica, 338, 628
ventilador, 602

Unidades SI, 11, 890
prefijos, 890
Unidades, 10, 820

Vector, diferenciación de, 224
Velocidad crítica:
flujo compresible, 724, 731
flujo en canal abierto, 546
Velocidad de avance de Froude, 348
Velocidad de fricción, 346, 378
Velocidad de onda, 543
Velocidad del factor de aproximación, 420
Velocidad del sonido, 708
gas ideal, 711
Velocidad específica, 338, 628, 655
Velocidad promedio, 118, 357
Velocidad terminal, 9
Vena contracta, 391, 418
Ventilador, 602, 651
"leyes," 339, 655
velocidad específica, 655, 773
Vertedor, 346, 586, 590
Viscoelástico, 34
Viscómetro de capilaridad, 375
Viscosidad, 29, 30
absoluta (o dinámica), 30, 843
aparente, 33
cinemática, 31, 844
naturaleza física de, 842
Viscosidad absoluta, 30
Viscosidad aparente, 33
Viscosidad cinemática, 31
Viscosidad dinámica, 30
Viscosímetro:
capilar, 375
de cilindros concéntricos, 50
de cono y placa, 52
Saybolt, 48
Viscosímetro de cilindros concéntricos, 50
Visualización del flujo, 23, 333, 534
Visualización, flujo, 23, 333
Volumen de control, 7
deformable, 116
relación de trabajo realizado por, 169
Volumen de control inercial, 124, 141
Volumen específico, 171, 701
Vórtice:
de estela, 503
forzado, 239

intensidad de, 295
irrotacional, 295
libre, 239, 295
Vórtice de estela, 503
Vórtice forzado, 239
Vórtice irrotacional, 295
Vórtice libre, 239, 295

Vorticidad, 238
coordenadas cilíndricas, 238

Zona:
de acción, 714
de silencio, 714

Unidades y prefijos del SI[a]

Unidades del SI	Cantidad	Unidad	Símbolo del SI	Fórmula
Unidades básicas del SI:	Longitud	metro	m	—
	Masa	kilogramo	kg	—
	Tiempo	segundo	s	—
	Temperatura	kelvin	K	—
Unidad suplementaria del SI:	Ángulo plano	radian	rad	—
Unidades derivadas del SI:	Energía	joule	J	$N \cdot m$
	Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
	Potencia	watt	W	J/s
	Presión	pascal	Pa	N/m^2
	Trabajo	joule	J	$N \cdot m$

Prefijos del SI	Factor de multiplicación	Prefijo	Símbolo del SI
1 000 000 000 000	$= 10^{12}$	tera	T
1 000 000 000	$= 10^{9}$	giga	G
1 000 000	$= 10^{6}$	mega	M
1 000	$= 10^{3}$	kilo	k
0.01	$= 10^{-2}$	centi[b]	c
0.001	$= 10^{-3}$	milli	m
0.000 001	$= 10^{-6}$	micro	μ
0.000 000 001	$= 10^{-9}$	nano	n
0.000 000 000 001	$= 10^{-12}$	pico	p

[a] Fuente: Estándar de la ASTM para la Práctica Métrica E 380-89, 1989.
[b] Se evitará cuando sea posible.

Factores de conversión y definiciones

Factor de conversión fundamental	Unidad inglesa	Valor del SI exacto	Valor del SI aproximado
Longitud	1 pulg	0.0254 m	—
Masa	1 lbm	0.453 592 37 kg	0.4536 kg
Temperatura	1 F	5/9 K	—

Definiciones:

Aceleración de la gravedad:	$g = 9.8066\ m/s^2$ ($= 32.174\ pies/s^2$)
Energía:	Btu (unidad térmica británica) ≡ cantidad de energía requerida para aumentar la temperatura de 1 lbm de agua 1 F (1 Btu = 778.2 pies · lbf)
	kilocaloría ≡ cantidad de energía requerida para elevar 1 K 1 kg de agua (1 kcal = 4187 J)
Longitud:	1 milla = 5280 pies; 1 milla naútica = 6076.1 pies
Potencia:	1 caballo de potencia ≡ 550 pies · lbf/s
Presión:	1 bar ≡ 10^5 Pa
Temperatura:	Fahrenheit, $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$ (donde T_C es en Celsius)
	Grado Rankine, $T_R = T_F + 459.67$
	Kelvin, $T_K = T_C + 273.15$ (exacto)
Viscosidad:	1 Poise ≡ 0.1 kg/m · s
	1 Stoke ≡ 0.0001 m^2/s
Volumen:	1 gal ≡ 231 $pulg^3$ (1 pie^3 = 7.48 gal)

Factores de conversión útiles:

1 lbf = 4.448 N
1 lbf/ $pulg^2$ = 6985 Pa
1 Btu = 1055 J
1 HP = 746 W = 2545 Btu/hr
1 kW = 3413 Btu/hr
1 cuarto = 0.000946 m^3 = 0.946 litro
1 kcal = 3.968 Btu

Este libro fue escrito para un curso introductorio de mecánica de fluidos, por ello aborda con detalle una amplia gama de temas convenientes para satisfacer las necesidades de un curso de uno o dos semestres, aunque requiere, por parte del lector, conocimientos sobre dinámica de cuerpo rígido, cálculo integral y algunos fundamentos de termodinámica.

Sin embargo, desde su primera edición, esta obra tiene por objetivo ayudar al estudiante a desarrollar un enfoque metódico para la solución de problemas. Así, esta cuarta edición presenta un 70% de problemas planteados en unidades del Sistema Internacional y el resto en unidades del Sistema Inglés.

Lo nuevo de la cuarta edición:

- Un capítulo sobre maquinaria hidráulica, en donde se destacan la maquinaria actual y sus aplicaciones, con un apéndice al final del libro en el que se incluyen datos sobre curvas de bombas.
- Una sección sobre flujo en canal supersónico.
- 440 problemas que se suman a otros 1000 a lo largo del libro.
- Al final de cada capítulo y con doble asterisco se presentan problemas para ser resueltos mediante programas sencillos de calculadora o computadora.

9 789701 006696
ISBN:970-10-0669-0

Mc Graw Hill